

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Daniel Ovidiu Crocnan

FIZICĂ

Manual pentru
clasa a **XI** -a

**OSCILAȚII
ȘI
UNDE**

OSCILAȚII
ȘI
UNDE



Ministerul Educației și Cercetării

Daniel - Ovidiu Crocnan

prof. gr. I dr.

FIZICĂ

manual pentru clasa a XI-a

F1 + F2

Filiera teoretică

Profil real: Matematică - informatică
Științe ale naturii

Filiera tehnologică

Calificări profesionale

Filiera vocațională

Profil militar: Matematică - informatică

EDITURA



SIGMA

Manualul a fost aprobat prin Ordinul ministrului Educației și Culturii nr. 4742 din 21.07.2006, în urma evaluării calitative organizate de către Consiliul Național pentru Evaluarea și Difuzarea Manualelor și este realizat în conformitate cu programa analitică aprobată prin Ordin al ministrului Educației și Cercetării nr. 3252 din 13.02.2006.

Redactor: Dana Florina Năstase
Tehnoredactor: Mihai Niță
Coperta: Mihai Niță

Referenți: Conf. dr. Viorel Bocancea
Prof. gr. I. drd. Ioan Suciu

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

CROC NAN, DANIEL OVIDIU

Fizică F1 + F2 : manual pentru clasa a XI-a / Daniel Ovidiu

Croc nan. - București : Sigma, 2006

Bibliogr.

ISBN (10) 973-649-263-X ; ISBN (13) 678-973-649-263-1

53(075.35)

© 2006 Editura SIGMA

Toate drepturile de editare aparțin Editurii SIGMA.

Nici o parte a acestei lucrări nu poate fi reprodusă fără acordul scris al editurii.

ISBN (10) 973 - 649 - 263 - X

ISBN (13) 978 - 973 - 649 - 263 - 1

Editura SIGMA

Sediul central:

Str. G-ral Berthelot, nr. 38, sector 1, București, cod 010169

Tel. / fax: 021-313.96.42; 021-315.39.43; 021-315.39.70

e-mail: office@editurasigma.ro; web: www.editurasigma.ro

Distribuție:

Tel. / fax: 021-243.42.40; 021-243.40.52; 021-243.40.35

Puteți transmite comenzi folosind apelul UniTel la numerele:

080.10000.10; 080.10000.11 (în rețeaua ROMTELECOM)

e-mail: comenzi@editurasigma.ro; sigmadistrib@yahoo.com

Anticariat:

e-mail: comenzi_anticar@editurasigma.ro; web: www.anticar.ro

Cuprins

Capitolul 1: Oscilații și unde mecanice

1.1. Oscilatorul mecanic	5
1.1.1. Fenomene periodice. Procese oscilatorii în natură și în tehnică	5
1.1.2. Mărimi caracteristice mișcării oscilatorii	9
1.1.3. Oscilații amortizate	14
1.1.4. Modelul „oscilatorului armonic”	16
1.1.5. Compunerea oscilațiilor paralele. * <i>Compunerea oscilațiilor perpendiculare</i>	24
1.2. Oscilatori mecanici cuplați	28
1.2.1. Oscilații mecanice întreținute. Oscilații mecanice forțate	28
1.2.2. Rezonanța	30
1.2.3. Consecințe și aplicații	33
1.3. Unde mecanice	35
1.3.1. Propagarea unei perturbații într-un mediu elastic. Transferul de energie	35
1.3.2. Modelul „undă plană”. Periodicitatea spațială și temporală	40
1.3.3. Reflexia și refracția undelor mecanice	44
1.3.4. Unde seismice	49
1.3.5. Interferența undelor mecanice. Unde staționare	53
1.3.6. Acustica	59
1.3.7. Difracția undelor mecanice – studiu calitativ	63
1.3.8. Ultrasunetele și infrasunetele. Aplicații în medicină, industrie, tehnică militară	64

Capitolul 2: Oscilații și unde electromagnetice

2.1. Circuitul RLC în curent alternativ	68
2.2. Oscilații electromagnetice libere. Circuitul oscilant	82
2.3. Câmpul electromagnetic. Unda electromagnetică	89
2.4. Clasificarea undelor electromagnetice	94
2.5. Aplicații	98

Capitolul 3: Optica ondulatorie

3.1. Dispersia luminii. * <i>Interpretare electromagnetică</i>	104
3.2. Interferența luminii	109
3.2.1. Dispozitivul Young	113
3.2.2. Interferența localizată. Aplicații	118
3.3. * <i>Difracția luminii. Aplicații</i>	123
3.4. * <i>Polarizarea luminii. Aplicații</i>	127

Capitolul 4: *Teoria haosului

4.1. * <i>Determinism și predictibilitate. Condiții. Modele</i>	133
4.2. * <i>Determinism și în predictibilitate. Comportamentul haotic. Condiții</i>	140
4.3. * <i>Descrierea comportamentului haotic. Spațiul fazelor. Atractori clasici și stranii</i>	142
4.4. * <i>Elemente de geometrie fractală</i>	150
Probleme recapitulative	155

Indicații privind utilizarea manualului

Ordinea parcurgerii textului, când sunt două coloane înguste, este: coloana din stânga și apoi cea din dreapta.

Dacă intervine un element care „sparge“ cele două coloane (de exemplu: un titlu sau o figură, un tabel – extinse pe întreaga lățime a paginii), atunci se continuă cu acesta. Sub el se reia desfășurarea textului, tot pe două coloane, citindu-se întâi cea din stânga și apoi cea din dreapta.

Semnificația marcajelor laterale este următoarea:

1. Marcaj lateral: materie studiată la F_2 , la 1 oră pe săptămână de fizică din trunchiul comun, filiera tehnologică, pentru calificările profesionale.

2. Marcaj lateral: materie studiată exclusiv la F_2 , la 2 ore pe săptămână de fizică din trunchiul comun, filiera tehnologică.

3. Observație: La programa tip F_1 materia se studiază integral la filiera teoretică, profil real, specializările matematică-informatică și științele naturii. Conținuturile marcate cu * (asterisc) nu sunt obligatorii la filiera vocațională, profil militar, specializare matematică-informatică.



Capitolul 1 OSCILAȚII ȘI UNDE MECANICE

Titlu de lecție → 1.1. Oscilații mecanice

Titlu de paragraf → 1.1.1. Fenomene periodice. Procede oscilațiilor în natură și în tehnică

Fenomenele periodice sunt frecvente în viața în natură, ca de exemplu: circulația electronilor în atom; mișcarea de rotație a Pământului; rotația Pământului în jurul propriei axe; respirația, o dată la 75 ani, a cometei Halley.

În cazul mișcării de rotație a Lunii în jurul Pământului este greu să ne imaginăm, indiferent cum arădăna traiectoria acesteia, că, la un moment dat, poziția acesteia nu se va suprapune pe o poziție anterioară. Deoarece energia sa potențială, în acea situație, va fi aceeași cu cea pe care o avea la trecerea anterioară prin punctul respectiv, din legea conservării energiei rezultă că și energia sa cinetică va fi aceeași. Nici direcția de mișcare a Lunii nu poate fi altă decât în direcția de rotație momentului cinetic al acesteia, deoarece, la rândul său, și se conservă. Din aplicarea celor două legi de conservare rezultă că mișcarea Lunii pe orbita ei orbită este o mișcare periodică.

Legea de conservare menționată furnizează argumente privind existența fenomenelor periodice din univers.



Laborator

Marcaje laterale

Rezumat

Exerciții

Var fizicivob cunoștințala

1. Ce formă are graficul în ordinea cazurilor? Cum este orientată și puncta graficilor?

2. Care sunt sursele de eroare?

3. Ce relații există între amplitudinea și perioada?

4. Care sunt sursele de eroare?

5. Care sunt sursele de eroare?

6. Care sunt sursele de eroare?

7. Care sunt sursele de eroare?

8. Care sunt sursele de eroare?

9. Care sunt sursele de eroare?

10. Care sunt sursele de eroare?

11. Care sunt sursele de eroare?

12. Care sunt sursele de eroare?

13. Care sunt sursele de eroare?

14. Care sunt sursele de eroare?

15. Care sunt sursele de eroare?

16. Care sunt sursele de eroare?

17. Care sunt sursele de eroare?

18. Care sunt sursele de eroare?

19. Care sunt sursele de eroare?

20. Care sunt sursele de eroare?

21. Care sunt sursele de eroare?

22. Care sunt sursele de eroare?

23. Care sunt sursele de eroare?

24. Care sunt sursele de eroare?

25. Care sunt sursele de eroare?

26. Care sunt sursele de eroare?

27. Care sunt sursele de eroare?

28. Care sunt sursele de eroare?

29. Care sunt sursele de eroare?

30. Care sunt sursele de eroare?

31. Care sunt sursele de eroare?

32. Care sunt sursele de eroare?

33. Care sunt sursele de eroare?

34. Care sunt sursele de eroare?

35. Care sunt sursele de eroare?

36. Care sunt sursele de eroare?

37. Care sunt sursele de eroare?

38. Care sunt sursele de eroare?

39. Care sunt sursele de eroare?

40. Care sunt sursele de eroare?

41. Care sunt sursele de eroare?

42. Care sunt sursele de eroare?

43. Care sunt sursele de eroare?

44. Care sunt sursele de eroare?

45. Care sunt sursele de eroare?

46. Care sunt sursele de eroare?

47. Care sunt sursele de eroare?

48. Care sunt sursele de eroare?

49. Care sunt sursele de eroare?

50. Care sunt sursele de eroare?

51. Care sunt sursele de eroare?

52. Care sunt sursele de eroare?

53. Care sunt sursele de eroare?

54. Care sunt sursele de eroare?

55. Care sunt sursele de eroare?

56. Care sunt sursele de eroare?

57. Care sunt sursele de eroare?

58. Care sunt sursele de eroare?

59. Care sunt sursele de eroare?

60. Care sunt sursele de eroare?

61. Care sunt sursele de eroare?

62. Care sunt sursele de eroare?

63. Care sunt sursele de eroare?

64. Care sunt sursele de eroare?

65. Care sunt sursele de eroare?

66. Care sunt sursele de eroare?

67. Care sunt sursele de eroare?

68. Care sunt sursele de eroare?

69. Care sunt sursele de eroare?

70. Care sunt sursele de eroare?

71. Care sunt sursele de eroare?

72. Care sunt sursele de eroare?

73. Care sunt sursele de eroare?

74. Care sunt sursele de eroare?

75. Care sunt sursele de eroare?

76. Care sunt sursele de eroare?

77. Care sunt sursele de eroare?

78. Care sunt sursele de eroare?

79. Care sunt sursele de eroare?

80. Care sunt sursele de eroare?

81. Care sunt sursele de eroare?

82. Care sunt sursele de eroare?

83. Care sunt sursele de eroare?

84. Care sunt sursele de eroare?

85. Care sunt sursele de eroare?

86. Care sunt sursele de eroare?

87. Care sunt sursele de eroare?

88. Care sunt sursele de eroare?

89. Care sunt sursele de eroare?

90. Care sunt sursele de eroare?

91. Care sunt sursele de eroare?

92. Care sunt sursele de eroare?

93. Care sunt sursele de eroare?

94. Care sunt sursele de eroare?

95. Care sunt sursele de eroare?

96. Care sunt sursele de eroare?

97. Care sunt sursele de eroare?

98. Care sunt sursele de eroare?

99. Care sunt sursele de eroare?

100. Care sunt sursele de eroare?

- 1.1. Oscilatorul mecanic
- 1.2. Oscilatori mecanici cuplați
- 1.3. Unde mecanice



Capitolul 1

OSCILAȚII ȘI UNDE MECANICE

1.1.

Oscilatorul mecanic

1.1.1.

Fenomene periodice. Procese oscilatorii în natură și în tehnică

Fenomenele periodice sunt frecvent întâlnite în natură, ca de exemplu: orbitele electronilor în atom; mișcarea de revoluție a Pământului; rotația Pământului în jurul propriei axe; reapariția, o dată la 75 ani, a cometei Halley.

În cazul mișcării de rotație a Lunii în jurul Pământului este greu să ne imaginăm, indiferent cum am desena traiectoria acesteia, că, la un moment dat, poziția acesteia nu se va suprapune pe o poziție anterioară. Deoarece energia sa potențială, în acea situație, va fi aceeași cu cea pe care o avea la trecerea anterioară prin punctul respectiv, din legea conservării energiei rezultă că și energia sa cinetică va fi aceeași. Nici direcția de mișcare a Lunii nu poate fi aleasă la întâmplare deoarece momentul cinetic al acesteia trebuie, la rândul său, să se conserve. Din aplicarea celor două legi de conservare rezultă că mișcarea Lunii pe propria-i orbită este o mișcare periodică.

Legile de conservare menționate furnizează argumente privind existența fenomenelor periodice din univers.

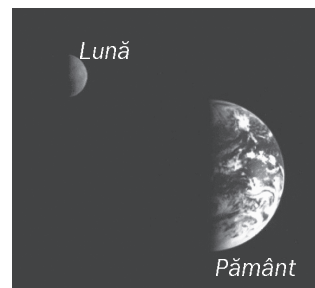


Fig. 1. Mișcarea Lunii în jurul Pământului.

Nu toate fenomenele periodice care se referă la mișcarea unor corpuri conduc la traiectorii circulare sau eliptice ale acestora. Cine nu a urmărit mișcarea unei pendule, vibrațiile corzii unei chitare sau ale unui resort elastic? Cine nu a urmărit, pe scheme virtuale, deplasarea pistoanelor unui motor de automobil (fig. 2)?

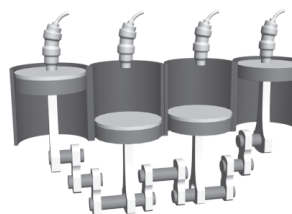


Fig. 2. Pistoanele cilindrilor motorului unui automobil au mișcări oscilatorii.

Vibrațiile unui cristal de cuarț într-un ceasornic, vibrațiile produse de un flaut sau alt instrument de suflat, vibrațiile corzilor vocale când vorbim, toate sunt mișcări ce reflectă o anumită periodicitate. Aceste mișcări periodice poartă numele de **oscilații**.

Dicționar

Oscilație: Mișcare periodică, alternativă a unui corp în raport cu o poziție particulară numită poziție de echilibru.

În fizică, oscilația are și accepțiunea de variație periodică a unei mărimi care caracterizează un sistem fizic.

Oscilator: Obiect sau sistem care are o mișcare oscilatorie.

Oscilațiile au, potrivit definiției anterioare, două aspecte comune:

- mișcarea oscilatorie se desfășoară de o parte și alta a unei poziții de echilibru;
- mișcarea este periodică, se repetă după un anumit interval de timp.

Să urmărim mișcarea oscilatorie a câtorva sisteme simple.

A. Oscilatorul elastic. Un corp de masă m legat la un punct fix prin intermediul unui resort elastic se deplasează pe un sistem de ghidare orizontal (fig. 3). Frecările sunt micșorate cu ajutorul suflantelor sistemului de ghidare prin care aerul pompat menține corpul într-o stare de imponderabilitate.

Prin comprimarea resortului (fig. 3a) în acesta apare o forță elastică (\vec{F}). Dacă neglijăm frecările cu aerul, forța elastică este singura forță care acționează asupra sistemului pe direcție orizontală. În plan vertical, forța de atracție gravitațională ce acționează asupra corpului de masă m este echilibrată de forța datorată curenților de aer ascendenți eliberați prin suflante (\vec{N}). Să urmărim pe diagrama forțelor (fig. 3b) ce se întâmplă prin eliberarea sistemului din fig. 3a.

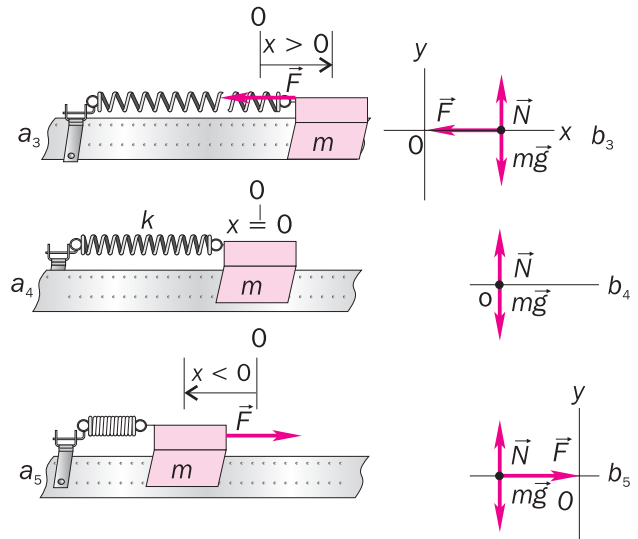
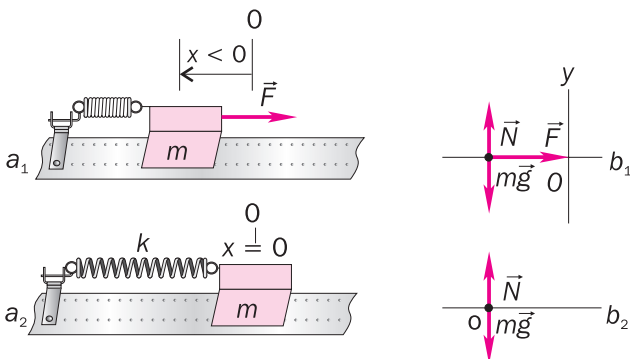


Fig. 3. Mișcarea oscilatorie a unui corp legat de un resort elastic (a); diagrama forțelor (b).

Odată eliberată legătura care menține sistemul în repaus, sub acțiunea forței elastice (\vec{F}) resortul se destinde imprimând mișcare corpului de masă m . Forța elastică este o forță variabilă al cărei modul, pentru deplasări mici față de poziția de echilibru este proporțional cu deplasarea (comprimarea/alungirea) resortului (fig. 4).

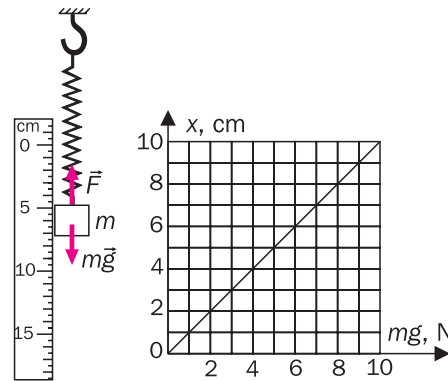


Fig. 4. Dependența forței elastice de alungirea/comprimarea resortului, în apropierea poziției de echilibru.

Destinderea resortului determină o scădere a forței elastice, deci implicit, potrivit principiului fundamental al dinamicii ($\vec{F} = m\vec{a}$) și a accelerației imprimate corpului. La trecerea prin poziția de echilibru, atât forța elastică cât și accelerația sistemului este nulă. Ca urmare a acțiunii forței elastice, viteza sistemului crește de la zero (fig. 3a₁) la o viteză maximă, atinsă la trecerea prin poziția de echilibru (fig. 3a₂). Potrivit principiului I al dinamicii, în virtutea inerției, corpul își va continua mișcarea pe direcția vitezei determinând alungirea resortului. Ca urmare, în resort apare din nou o forță elastică variabilă al cărei modul crește cu alungirea. Această forță este orientată de astă dată în sens invers

mișcării. Accelerația imprimată corpului este de sens contrar mișcării și crește o dată cu forța, ceea ce determină ca mișcarea corpului să fie încetinită până la oprire atunci când corpul se află la o distanță maximă față de poziția de echilibru (fig. 3a₃). Sub acțiunea forței elastice mișcarea se reia în sens invers trecând prin poziția de echilibru (fig. 3a₄) și ajungând apoi în poziția inițială (fig. 3a₅). Dacă frecările cu mediul extern ar fi nule, mișcarea s-ar repeta la infinit. În realitate, cu toate precauțiile experimentale, frecarea nu poate fi înlăturată ceea ce va determina în timp oprirea oscilatorului.

Să urmărim mișcarea anterioară din punct de vedere energetic pe diagramele corpului liber. Atunci când sistemul se află la depărtare maximă (A) față de poziția de echilibru, întreaga energie (E_t) a acestuia este în formă potențială (E_p) (fig. 5).

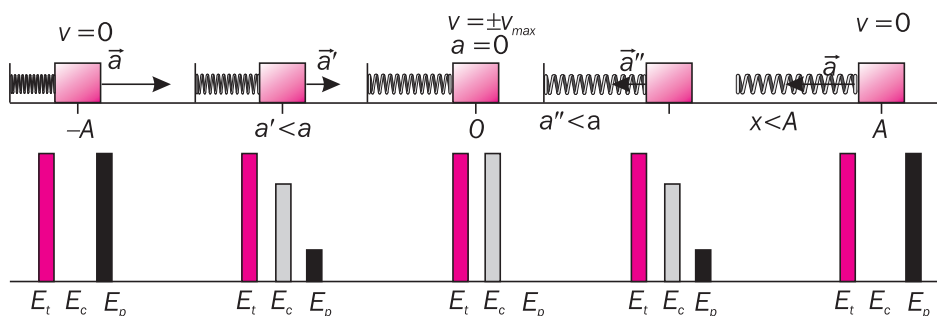


Fig. 5. Variația energiei cinetice și potențiale în decursul unei oscilații.

Pe măsură ce acesta se destinde energia potențială trece în formă cinetică pentru ca, în poziția de echilibru, întreaga energie să fie cinetică (E_c). Continuarea mișcării, ca urmare a inerției, duce la o nouă transformare a energiei cinetice, de data aceasta, în energie potențială. După care procesul se repetă. Dacă mișcarea este fără frecare energia totală a sistemului, în cursul mișcării, se conservă modificându-se doar valorile componentelor sale. Are loc o oscilație a componentelor cinetică și potențială a energiei.

B. Pendulul gravitațional. Un corp de masă m atârnat într-un punct fix prin intermediul unui fir lung, inextensibil, de masă neglijabilă și lungime L , scos din poziția de echilibru (direcția verticalei terestre locale) formează un pendul gravitațional (fig. 6a).

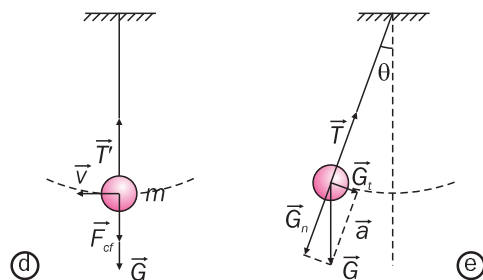
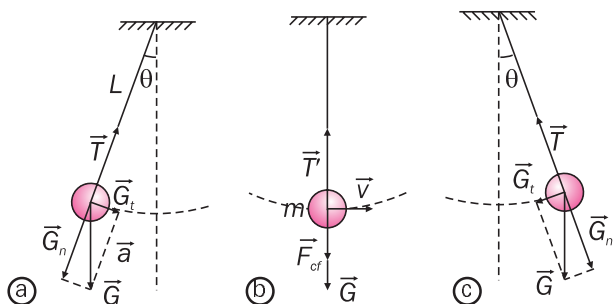


Fig. 6. Oscilația unui pendul gravitațional.

În ipoteza simplificatoare că singura forță care acționează asupra corpului este forța gravitațională, componenta tangențială la traiectoria a acestei forțe este responsabilă de mișcarea oscilatorie imprimată pendulului. Această componentă este maximă când depărtarea față de poziția de echilibru este maximă (fig. 6a). Ea scade

devenind zero în momentul trecerii prin poziția de echilibru. Această scădere determină scăderea proporțională a componentei tangențiale a accelerației sistemului. Viteza în decursul mișcării din starea a în starea b crește de la zero la o valoare maximă, atinsă în momentul trecerii prin

poziția de echilibru. Mișcarea continuă apoi în virtutea inerției, determinând îndepărtarea pendulului față de poziția de echilibru, de partea cealaltă a poziției de echilibru. Aceasta determină o creștere proporțională a componentei tangențiale a greutateii, deci și a accelerației sistemului, de data aceasta orientate în sens contrar, până la atingerea unei deviații maxime (fig. 6c). În acest moment, viteza pendulului este zero. Mișcarea se reproduce apoi identic, în sens contrar de această dată trecând din nou prin poziția de echilibru (fig. 6d) și cea de deviație maximă (fig. 6e). Dacă frecările dintre pendul și mediu ar fi nule, mișcarea s-ar continua un interval de timp nedeterminat.

Pe tot parcursul mișcării componenta normală a forței gravitaționale, este echilibrată de tensiunea din fir.

O observație importantă în acest caz este că, în cazul unghiurilor de oscilație (θ) mici, componenta tangențială a forței gravitaționale poate fi asimilată unei forțe elastice.

În realitate, în afara forței gravitaționale, ca urmare a mișcării corpului pe o porțiune de traiectorie circulară apare și o forță centrifugă, forță proporțională cu pătratul vitezei ($F_{cf} = mv^2/L$). Mișcarea unui pendul real, ca și cea

a oscilatorului elastic, este supusă forțelor de interacțiune cu mediul (de exemplu forța de frecare). Această interacțiune determină în timp oprirea oscilatorului.

Și în acest caz mișcarea sistemului poate fi pusă pe seama oscilației componentelor cinetică și potențială a energiei mecanice a sistemului. În cazul absenței interacțiunilor cu mediul extern, energia mecanică totală se conservă. Pendulul trece în cursul mișcării de la energie potențială maximă (fig. 6a, c, e), în pozițiile de maximă depărtare față de echilibru la energie cinetică maximă (fig. 8b, d), în poziția de echilibru, prin stadii intermediare în care suma celor două energii (cinetică și potențială), este constantă ($E_t = E_c + E_p = \text{const}$).

Concluzie:

Pentru a se produce oscilații mecanice într-un sistem, acesta trebuie să prezinte două tipuri de proprietăți: **elasticitate** și **inerție**. Când sistemul este scos din poziția de echilibru, *elasticitatea* determină o forță care readuce sistemul la echilibru. *Inerția* determină scoaterea sistemului din poziția de echilibru. Acest joc constant între proprietățile elastice și cele inerțiale stau la baza mișcării oscilatorii. Proprietatea elastică a oscilatorului răspunde de energia potențială, iar proprietatea inerțială (masa) de energia cinetică. Când sistemul oscilează are loc un transfer de energie între cele două forme ale acesteia în oscilator. Dacă oscilatorul este izolat, energia totală se conservă.

Rezumat

- Fenomenele periodice sunt fenomenele care se repetă după un anumit interval de timp.
- Mișcarea oscilatorie este o mișcare periodică, de o parte și alta a unei poziții de echilibru. Ea este datorată unei forțe orientate permanent spre poziția de echilibru.

- Exemple simple de mișcări oscilatorii sunt: oscilatorul elastic (fig. A) și pendulul gravitațional (fig. B).
- Mișcarea oscilatorie implică o transformare a energiei mecanice din formă cinetică în formă potențială și invers.

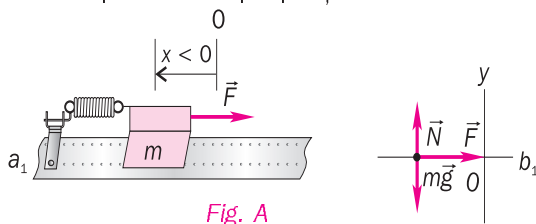


Fig. A

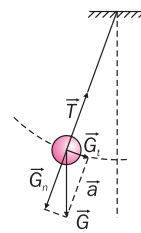


Fig. B



Verificați-vă cunoștințele

- Referitor la un oscilator elastic orizontal, care dintre afirmațiile următoare sunt adevărate? Motivați.
 - Mișcarea oscilatorului depinde de masa m a acestuia.
 - Mișcarea oscilatorului depinde de modul în care acesta este pus în mișcare.
 - Mișcarea oscilatorului depinde de proprietățile elastice ale sistemului.
 - Într-un satelit sistemul nu ar putea funcționa.
- Referitor la un pendul gravitațional, care dintre afirmațiile de la exercițiul 1 sunt adevărate?

- Într-un tub de sticlă în formă de U, care are unul dintre capete astupat cu un dop, este turnat un lichid colorat. Ce se întâmplă cu lichidul din tub când se scoate dopul? Se presupune frecarea cu pereții vasului neglijabilă.
- Descrieți comportarea unui oscilator elastic vertical. Care ar fi diferențele față de un oscilator identic care oscilează în plan orizontal?
- În cazurile oscilatorilor reali se constată atenuarea în timp a mișcării acestora. Descrieți pe câteva cazuri concrete cauzele acestei atenuări.

În paragraful anterior s-a definit mișcarea oscilatorie ca o mișcare periodică produsă de o parte și de alta a unei poziții de echilibru, mișcare în care are loc un transfer de energie mecanică, din formă cinetică în formă potențială și invers, la un bilanț energetic constant în cazul oscilatorului izolat de mediu.

Caracteristica principală a unui fenomen de tip periodic este reproducerea lui identică, după un anumit interval de timp. Acest interval poartă numele de **perioadă**.

Dicționar

Perioadă (T): Intervalul de timp în care oscilatorul efectuează o oscilație completă (atinge același punct, succesiv, deplasându-se în același sens).
 $[T]_{SI} = s$ (secundă).

O mărime fizică înrudită perioadei este **frecvența**.

Dicționar

Frecvența unui oscilator (ν): Numărul de oscilații efectuate în unitatea de timp.

Dacă perioada unui oscilator este de 0,1 secunde, atunci oscilatorul va realiza 10 oscilații complete în timp de o secundă. Se poate trage concluzia că între frecvență și perioadă există relația:

$$T\nu = 1 \Leftrightarrow T = \frac{1}{\nu} \Leftrightarrow \nu = \frac{1}{T}$$

Unitatea de măsură a frecvenței (în SI) este:

$$[\nu]_{SI} = \frac{1}{T} = \frac{1}{s} = s^{-1},$$

unitate de măsură care, în onoarea fizicianului german Heinrich Hertz, cel care a produs pentru prima dată pe cale artificială unde radio, poartă numele Hertz, notat Hz.
 $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$.

Adesea, frecvențele oscilatorilor ating valori foarte mari, caz în care este necesară utilizarea unor multipli (tabelul 1).

Tabelul 1

Frecvența	Perioada
$10^3 \text{ Hz} = 1 \text{ kilohertz} = 1 \text{ kHz}$	1 ms
$10^6 \text{ Hz} = 1 \text{ megahertz} = 1 \text{ MHz}$	1 μ s
$10^9 \text{ Hz} = 1 \text{ gigahertz} = 1 \text{ GHz}$	1 ns

Exemplu

O stație radio emite pe frecvența de 102,8 MHz. Care este perioada oscilațiilor emise?

Rezolvare

Frecvența oscilațiilor emise este 102,8 MHz = $1,028 \cdot 10^8 \text{ Hz}$.

Cum perioada este dată de inversul frecvenței, se obține:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{1,028 \cdot 10^8} \text{ Hz} = 9,73 \text{ ns}.$$

Dacă multiplicăm frecvența de 2π ori se obține o altă mărime caracteristică a mișcării oscilatorii – **pulsăția**. Utilitatea și semnificația acestei mărimi va fi discutată ulterior. Pulsăția reprezintă o viteză de variație a unei mărimi unghiulare (nu neapărat legată de o mișcare de rotație). Dacă mărimea unghiulară, a cărei viteză de variație o reprezintă pulsăția, este măsurată în radiani (rad), atunci unitatea de măsură a pulsăției este:

$$[\omega]_{SI} = \frac{\text{rad}}{s} \text{ (radiani/ secundă)}.$$

Din definiția pulsăției și din relațiile dintre frecvență și perioadă se poate scrie că:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

În exemplele de oscilatori discutate în lecția anterioară, poziția oscilatorului se modifica în timpul oscilației. Vectorul de poziție în acest caz poartă numele de **elongație** și este un vector cu originea în poziția de echilibru a masei m a oscilatorului. Fiind vorba de o distanță, elongația în Sistemul Internațional de Unități se măsoară în metri (m). Ca notații se utilizează x sau y , după cum oscilația are loc în plan orizontal sau vertical.

Valoarea maximă a elongației (x_{\max}) poartă numele de **amplitudine (A)**. În funcție de sensul pozitiv ales pe direcția pe care se face mișcarea, atât elongația cât și amplitudinea pot avea valori pozitive sau negative după cum mișcarea este în sensul axei sau în sensul invers acesteia (fig. 1).

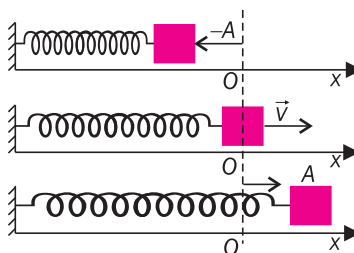


Fig. 1. Amplitudinea ca și elongația pot fi pozitive sau negative în raport cu sensul axei de coordonate.

Laborator

A. Studiul unui oscilator elastic în câmp gravitațional

Figura 2 ilustrează un aranjament experimental care pune în evidență mișcarea oscilatorie a unui oscilator elastic în câmp gravitațional. O masă m conectată de un resort elastic de constantă elastică k , oscilează. De masa m este legat un marker care va trasa pe un tambur de hârtie ce se rotește cu viteză constantă, traiectoria mișcării.

Se obține o oscilogramă a mișcării oscilatorii (fig. 3a).

Pe oscilogramă sunt marcate două dintre mărimile caracteristice ale oscilatorului, amplitudinea (A) și perioada (T) a acestuia.

Fig. 3. Oscilogramă (a) și graficul de variație al vitezei (b) calculat ca pantă a tangentei graficului de la punctul a, în câteva puncte ale oscilogramei.

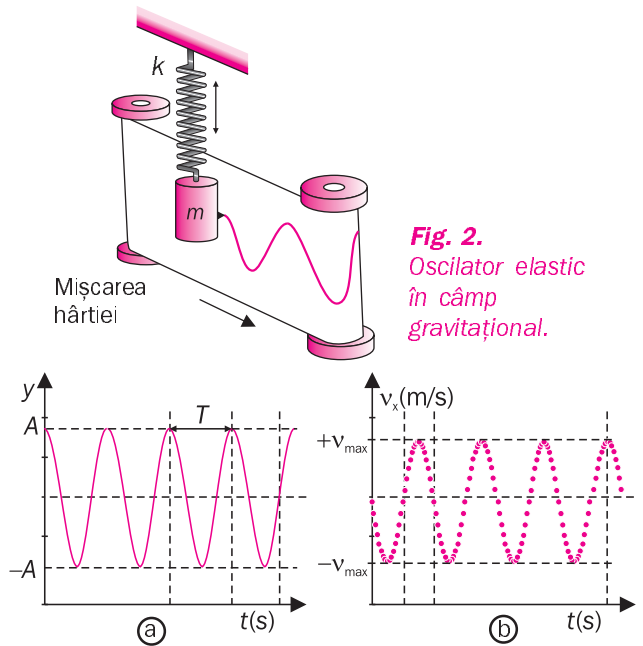


Fig. 2. Oscilator elastic în câmp gravitațional.

Urmărind graficul $y = y(t)$ (fig. 3a) se pot face câteva observații privind legea de mișcare a oscilatorului și mărimile care caracterizează această mișcare.

Din forma graficului recunoaștem o funcție sinus de amplitudine A și perioadă T . Legea de mișcare căutată $y = y(t)$ va fi de forma:

$$y(t) = A \sin \frac{2\pi t}{T} \quad (1)$$

Ținând cont de relațiile dintre perioadă (T), frecvență (ν) și pulsație (ω), relația (1) poate fi scrisă și în variantele:

$$y(t) = A \sin 2\pi \nu t \quad (1') \text{ sau}$$

$$y(t) = A \sin \omega t \quad (1'')$$

În cazul în care mișcarea nu pomește din origine, astfel încât la $t_0 = 0$, $y(0) \neq 0$, se introduce o mărime

constantă numită **fază inițială** (φ_0). În acest caz $y(0) = A \sin \varphi_0$, iar relația generală în forma 1" devine:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Pe computer, se poate obține viteza oscilatorului în orice moment din calculul pantei tangentei la graficul curbei $y = y(t)$ în diferite puncte ale oscilogramei. În acest fel se obține graficul reprezentativ al vitezei (fig. 3b). Și acesta, ca funcție de timp, este de tip sinusoidal, dar defazat cu $\pi/2$ față de legea de mișcare. Aceasta înseamnă că, dacă legea de mișcare este dată de funcția sinus, cea a vitezei va fi dată de funcția cosinus sub forma:

$$v(t) = v_{\max} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

unde v_{\max} este viteza maximă atinsă de oscilator în timpul mișcării.

Laborator

Investigarea experimentală a unor procese oscilatorii simple

A. Verificarea legii de mișcare a oscilatorului elastic

Oscilatorul elastic orizontal este constituit dintr-un resort de constantă elastică k și un solid de masă m care poate fi asociat unui punct material. Masa resortului este neglijabilă față de masa m . Oscilatorul este prevăzut cu un marker care, în timpul mișcării, va desena pe tamburul cu hârtie, aflat în mișcare cu o viteză constantă, oscilograma mișcării. Oscilatorul este pus în

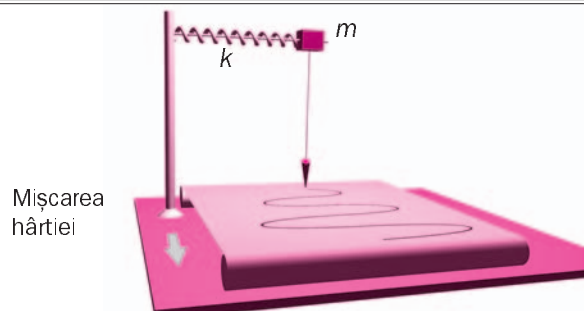


Fig. 4. Oscilatorul elastic în mișcare.

mișcare printr-un impuls aplicat acestuia în poziția de echilibru.

Se trasează oscilograma mișcării.

Temă în clasă:

1. Numiți forțele care se exercită asupra corpului când acesta trece prin poziția de echilibru. Desenați diagrama corpului liber în această poziție.

2. Numiți forțele care se exercită asupra corpului la un moment t în care acesta se află în mișcare, elongația lui fiind $x(t)$. Desenați diagrama corpului liber pentru $x(t) > 0$.

3. Arătați că legea de mișcare a oscilatorului este de forma:

$$x(t) = x_{\max} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right).$$

4. Numiți semnificațiile și unitățile de măsură (în SI) ale mărimilor care intervin în ecuație: x_{\max} , T , t și φ_0 .

Laborator

B. 1. Studiul factorilor care pot influența perioada oscilatorului elastic

Experiment 1: $m = 250 \text{ g}$; $k = 10 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$

Se deplasează oscilatorul din fig. 4 pe o distanță de 5 cm la dreapta poziției de echilibru. La momentul $t = 0$, se lasă resortul liber fără viteză inițială. Se înregistrează oscilograma $x = x(t)$ (fig. 5).

Experiment 2: $m = 250 \text{ g}$; $k = 10 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$.

Se deplasează oscilatorul pe o distanță de 5 cm la dreapta poziției de echilibru. La momentul $t = 0$ se lansează punctul material de masă m spre stânga cu o viteză inițială nenulă. Se înregistrează oscilograma $x = x(t)$ (fig. 6).

Experiment 3: $m = 250 \text{ g}$; $k = 10 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$.

Se deplasează oscilatorul pe o distanță de 7 cm la dreapta poziției de echilibru. La momentul $t = 0$ se lasă resortul liber fără viteză inițială. Se înregistrează oscilograma $x = x(t)$ (fig. 7).

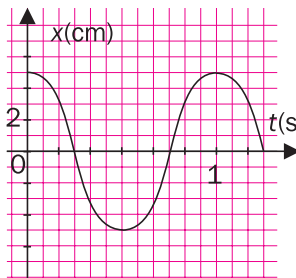


Fig. 5.

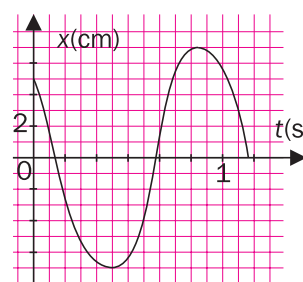


Fig. 6.

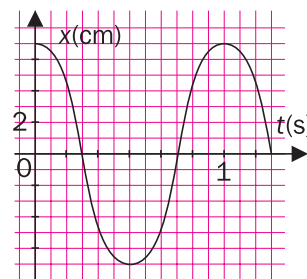


Fig. 7.

Temă în clasă: Pentru experimentele 1, 2 și 3:

1. Determinați pe oscilograma corespunzătoare perioadele de oscilație ale oscilatorilor. Verificați prin măsurare directă perioada proprie T a oscilatorilor.

2. Determinați din grafic condițiile inițiale (x_0 și v_0) ale oscilatorilor.

3. Depinde perioada oscilatorului elastic de condițiile inițiale? Justificați pe grafic răspunsul.

4. Determinați din grafic, amplitudinea oscilațiilor.
a) Depinde amplitudinea oscilațiilor de viteza inițială?
b) Depinde amplitudinea oscilațiilor de elongația inițială?

Laborator

B.2

Experiment 4: Pentru un același resort elastic de constantă $k = 10 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ se urmărește dependența perioadei oscilatorului de masa acestuia. Se trasează oscilogramele pentru mase ale oscilatorului cuprinse între 50 g și 300 g, cu o rată de creștere de 50 g.

• Din oscilogram se măsoară perioada oscilatorului și se completează tabelul 2.

Tabelul 2

Perioada (T)
Masa (g)	50	100	150	200	250	300
\sqrt{m}	7	10	12,2	14,1	15,8	17,3

• Trasați graficul $T = T(\sqrt{m})$.

Experiment 5: Pentru resorturi cu constante elastice cuprinse între $k = 5 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ și $k = 30 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, cu o rată de creștere de $5 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, se urmărește dependența perioadei oscilatorului de constanta elastică a acestuia. Masa oscilatorului se menține constantă.

• Se trasează oscilogramele pentru fiecare oscilator.

Din oscilogram se măsoară perioada oscilatorului și se completează tabelul 3.

Tabelul 3

Perioada (T)
Constanta elastică) k în $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$	5	10	15	20	25	30
\sqrt{k}	2,2	3,2	3,9	14,1	5,5	5,5

• Trasați graficul $T = T(\sqrt{k})$.

Temă în clasă: Pentru experimentele 4 și 5:

1. Ce formă au graficele trasate $T = T\sqrt{m}$ și $T = T\sqrt{k}$ pe baza tabelor 2 și 3? Cum este orientată panta graficelor?

2. Reuniți într-o unică expresie concluziile experimentelor.

3. Indicați sursele de eroare.

4. Calculați erorile relative și erorile absolute.

Laborator

C. Studiul factorilor care pot influența amplitudinea oscilatorului elastic liniar

Experiment 6: $m = 250$ g; $k = 10$ N·m⁻¹.

Se deplasează oscilatorul pe o distanță de 7 cm la dreapta poziției de echilibru. La momentul $t = 0$ se lasă resortul liber fără viteză inițială. Se înregistrează oscilograma $x = x(t)$ (fig. 8).

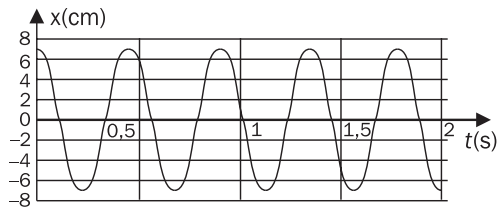


Fig. 8

Experiment 7: $m = 250$ g; se înlocuiește resortul cu un altul cu constanta de elasticitate $k' = 7$ N·m⁻¹.

Se deplasează oscilatorul pe o distanță de 7 cm la dreapta poziției de echilibru. La momentul $t = 0$, se lasă resortul liber fără viteză inițială. Se înregistrează oscilograma $x = x(t)$ (fig. 9).

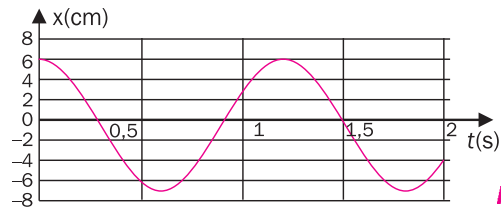


Fig. 9

Temă în clasă: Pentru experimentele 6 și 7 amplitudinea oscilațiilor este de 7 cm.

1. Determinați grafic perioada oscilatorului în fiecare caz în parte.

2. Depinde perioada oscilatorului de amplitudine?

Concluzii:

1. Din experimentele realizate rezultă că perioada (T) a oscilatorului:

- depinde direct proporțional de rădăcina pătrată a

masei m a oscilatorului;

- depinde invers proporțional de rădăcina pătrată a constantei elastice k a acestuia;

- nu depinde de amplitudinea oscilației.

2. Din experimentele realizate rezultă că amplitudinea (A) a oscilatorului:

- depinde de condițiile inițiale (viteză, elongație, constantă elastică);

- depinde de perioada (T) a oscilatorului.

Rezumat

- Mărimile caracteristice mișcării oscilatorii sunt perioada (T), frecvența (ν), pulsația (ω), elongația (x) sau (y) și amplitudinea oscilației (A).

- Între perioadă, frecvență și pulsație există relațiile:

$$T\nu = 1 \quad \text{și} \quad \omega = 2\pi\nu = 2\pi/T.$$

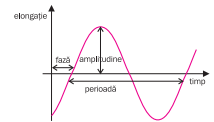
- Legea de mișcare a unui oscilator elastic este de tipul:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0),$$

iar legea vitezei: $v(t) = v_{\max} \cos(\omega t + \varphi_0)$.

- Perioada T a oscilatorului elastic depinde de masa acestuia și de constanta elastică și nu depinde de amplitudinea oscilației.

- Amplitudinea oscilației depinde de condițiile inițiale și de perioada oscilatorului.



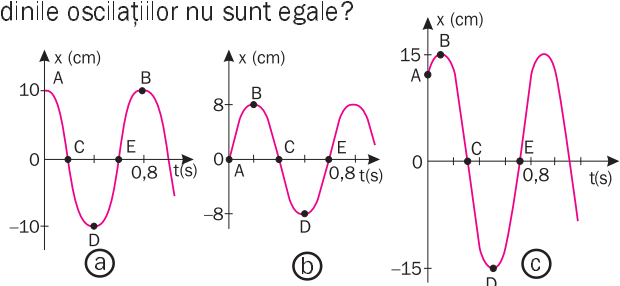
Verificați-vă cunoștințele

1. Proiectați și realizați un experiment după modelul celui de la oscilatorul elastic din care să stabiliți mărimile de care depind perioada și amplitudinea mișcării oscilatorii a unui pendul gravitațional.

2. Un oscilator cu amplitudinea de 2,4 cm își începe mișcarea din poziția de echilibru. După 25 ms elongația lui este 1,2 cm. Determinați pulsația, perioada și frecvența oscilatorului. Care este legea de mișcare a oscilatorului?

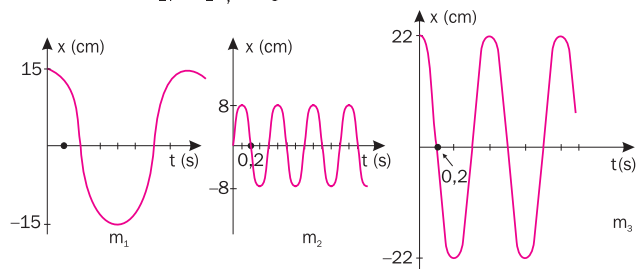
3. Oscilogramele unor oscilatori elastici sunt date în figurile de mai jos.

- Au fost identice condițiile inițiale?
- Precizați sensul vitezei oscilatorului în punctele A, B, C, D și E.
- Dacă este vorba de același oscilator, de ce amplitudinile oscilațiilor nu sunt egale?



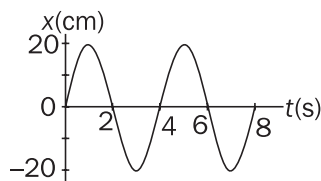
4. Se consideră oscilația unui resort elastic orizontal ideal, de constantă elastică k . Dacă masele prinse de resort au fost m_1 , m_2 și m_3 , iar înregistrările oscilațiilor arată ca în figurile de mai jos, indicați:

- cea mai mare amplitudine a mișcării;
 - cea mai mare frecvență a mișcării.
- Ordoneți amplitudinea și frecvența mișcărilor în funcție de masele m_1 , m_2 și m_3 ale oscilatorilor.

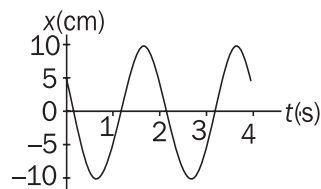


5. Un obiect aflat la capătul unui resort oscilează determinând oscilograma alăturată. Reprezentați graficul spațiu-timp dacă se produc următoarele modificări:

- amplitudinea și frecvența se reduc la jumătate;
- masa crește de patru ori;
- amplitudinea se dublează, iar frecvența scade la jumătate;
- masa scade de patru ori.

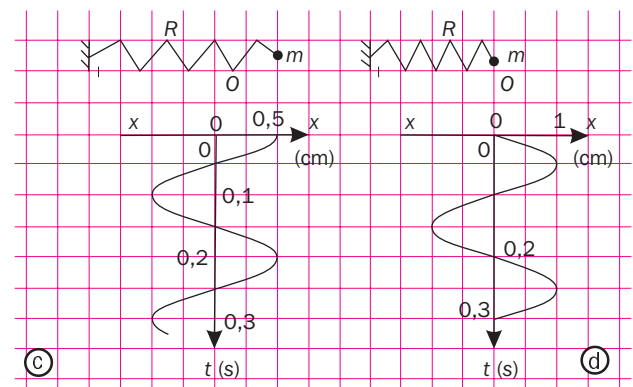
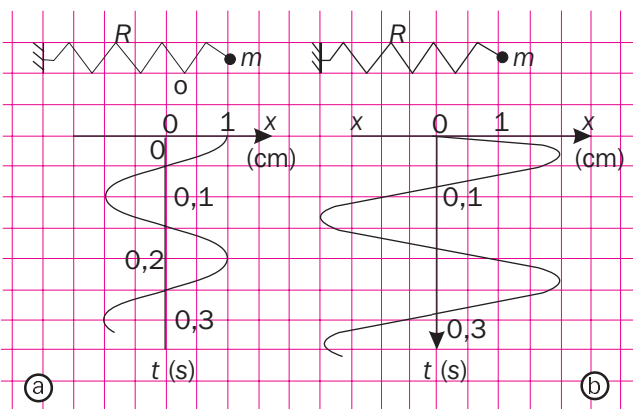


6. Determinați amplitudinea (A), frecvența (ν) și faza inițială (φ_0) a oscilației reprezentate în oscilograma alăturată.



7. Un oscilator are legea de mișcare: $y = 0,06 \sin 50\pi t$ (cm). Să se stabilească amplitudinea, perioada și frecvența oscilatorului.

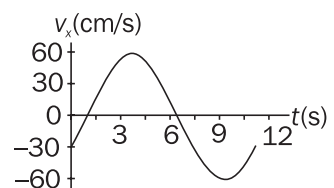
8. Pentru resorturile figurate în diagramele a-d, ale căror oscilogramme sunt reprezentate mai jos, stabiliți:



- perioada și amplitudinea oscilațiilor;
- condițiile inițiale ale mișcărilor;
- valorile forței exercitate asupra fiecărui resort la momentul $t = 0$, dacă $k = 20$ N/m;
- legile de mișcare ale oscilatorului.

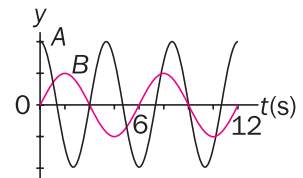
9. Oscilograma unui oscilator elastic este dată în figura alăturată.

- Care este amplitudinea oscilației?
- Care este faza inițială a oscilației?
- Care este poziția oscilatorului la momentul $t_0 = 0$?



10. Fie doi oscilatori elastici ce oscilează în plan vertical și ale căror oscilogramme sunt date alăturat.

- Care sunt frecvențele celor doi oscilatori?
- Care este primul moment în care oscilatorul A atinge viteza maximă?
- Care este primul moment în care energia potențială a oscilatorului B este maximă?
- Dacă ambii oscilatori au aceeași masă, care este raportul constantelor elastice ale acestora?



Din experimentele cu oscilatori mecanici se constată că mișcarea acestora nu durează un timp nedefinit. O parte din energia mecanică a acestora este disipată în mediu. Dacă responsabile de acest transfer sunt forțele de frecare, căldura produsă se distribuie între sistem și mediu. În alte cazuri, de exemplu în oscilația corzii unei chitare, transferul de energie de la oscilator la mediu are loc și sub formă de energie sonoră. În cazul în care forțele de frecare sunt responsabile de transferul de energie prin efectuarea unui lucru mecanic, rezultatul acestui transfer este diminuarea amplitudinii oscilației până la repaus. Procesul poartă numele de **amortizare**.

Dacă frecarea se realizează între două corpuri solide ne așteptăm ca aceasta să fie independentă de viteza relativă de deplasare dintre cele două corpuri. În acest caz, forța de frecare este constantă, ceea ce determină un transfer de energie în unitatea de timp constant pe tot parcursul oscilației.

Amortizarea prin intermediul unei forțe constante nu este nici singura și nici cea mai frecvent întâlnită situație de amortizare a mișcării unui oscilator. Amortizarea oscilațiilor unui oscilator elastic prin frecarea cu un mediu fluid poate fi proporțională cu pătratul vitezei acestuia în timp ce pentru alte situații frecarea poate fi proporțională, de exemplu, cu puterea întâi a vitezei. Să considerăm acest ultim caz de amortizare.

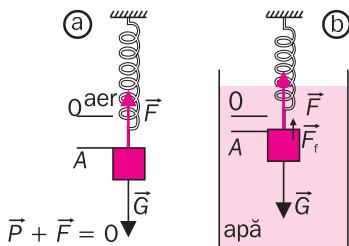


Fig. 1. Oscilator elastic în câmp gravitațional oscilând în medii de densități diferite

Comparativ cu cazul discutat în lecția anterioară, în care neglijăm forța de frecare (fig. 1a), să adăugăm de această dată forța de frecare în diagrama forțelor care acționează asupra oscilatorului elastic (fig. 1b). Să punem oscilatorul să se deplaseze într-un lichid mai puțin dens, de exemplu în apă, sau într-unul mai dens, de exemplu în melasă. Dacă în cazul apei amortizarea oscilației este mai rapidă decât în aer (fig. 2c), în melasă resortul elastic nici măcar nu va mai oscila (fig. 2d).

Dacă forța de frecare este proporțională cu viteza oscilatorului, ea poate fi scrisă sub forma: $\vec{F}_f = -b\vec{v}$.

Constanta b depinde de proprietățile mediului, de forma și dimensiunile corpului care oscilează. Semnul minus arată că forța de frecare este orientată în sens contrar celui de deplasare al corpului. Aplicând principiul fundamental al dinamicii ($\vec{F} = m\vec{a}$) corpului de masă

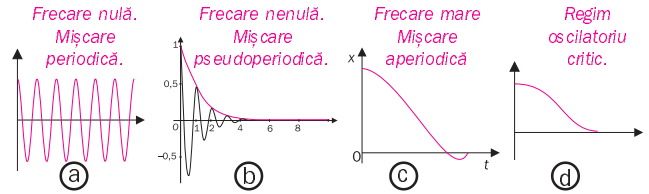


Fig. 2. Oscilații neamortizată (a), Oscilații amortizate în diferite medii: în aer (b), în apă (c), în melasă (d).

m aflat în oscilație și ținând cont că forța care determină oscilația, în cazul oscilatorului elastic, este forța elastică ($\vec{F} = -k\vec{y}$) rezultă că pe direcția de mișcare, echilibrul forțelor se scrie:

$$-ky - bv = ma. \quad (1)$$

În ecuația (1), atât accelerația, cât și viteza, depind de poziția y a oscilatorului astfel încât forma soluției acestei ecuații nu rezultă imediat. Pe baza formei grafice a legii de mișcare reprezentată în oscilograma din fig. 2b, se pot face o serie de observații asupra formei soluției acestei ecuații.

După cum apare din grafic (fig. 2b) dacă frecvența oscilatorului este, de exemplu, de o oscilație/minut, iar la $t_0 = 0$ amplitudinea era 1 cm, după un minut ($t = 1$ minut) amplitudinea ajunge la jumătate din valoarea inițială (0,5 cm). Ce se va întâmpla după încă un minut? Dar după încă unul? După cum ne așteptăm, amplitudinea se va înjumătăți de fiecare dată. Această amortizare este descrisă de o scădere exponențială a amplitudinii de forma:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \quad (1)$$

unde β este un parametru numit *coeficient de amortizare*. Dimensiunea acestuia, din condiția adimensionalității exponentului, este în SI, s^{-1} . După cum s-a discutat în lecția precedentă, mișcarea oscilatorie este periodică, iar forma generală a acesteia este:

$$y(t) = A \sin \omega_0 t \quad (2)$$

unde cu ω_0 s-a notat pulsația oscilatorului neamortizat.

De data aceasta amplitudinea ne mai fiind constantă, ci dată de relația (1), forma generală a legii de mișcare va fi:

$$y(t) = A(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin \omega' t \quad (3)$$

unde cu ω' s-a notat pulsația oscilatorului amortizat.

Exponențiala este înfășurătoarea graficului mișcării oscilatorii. Funcția (3) descrie oscilațiile slab amortizate. În acest caz oscilațiile amortizate se numesc *pseudo-periodice*. Pseudo-perioada (T), este puțin mai mică decât perioada proprie (T_0) a oscilatorului.

Deci se poate spune că oscilația amortizată diferă de cea neamortizată prin două elemente:

- amplitudinea nu mai este constantă, ci scade exponențial în timp;
- pulsația oscilatorului (ω') este ceva mai mică decât pulsația proprie (ω_0) a acestuia (cazul neamortizat).

Dacă forța de frecare este proporțională cu viteza, pe măsură ce oscilația se amortizează, forța de frecare scade în intensitate ceea ce determină și scăderea energiei disipate. În aceste condiții, cel puțin teoretic, din forma exponențială a curbei de amortizare se poate spune că oscilatorul pierde un anumit procent fix de energie în fiecare perioadă.

Din proporționalitatea forței de frecare cu viteza și din proporționalitatea vitezei cu distanța parcursă de oscilator în fiecare perioadă rezultă proporționalitatea amplitudinii oscilației cu forța de frecare.

Lucrul mecanic efectuat de forța de frecare este proporțional cu această forță și cu distanța parcursă (amplitudinea), deci este proporțional cu pătratul amplitudinii (A^2). Deoarece atât lucrul mecanic al forței de frecare cât și energia mecanică a oscilatorului (după cum vom vedea în lecția următoare) sunt proporționale cu A^2 , energia pierdută de oscilator prin frecare în fiecare ciclu va fi un procent fix din întreaga energie a oscilatorului.

În cazul amortizării produse în melasă (fig. 2d) sistemul nu mai oscilează. În acest caz legea de mișcare va fi o scădere exponențială de tipul:

$$y(t) = A e^{-\lambda t},$$

unde λ este o constantă. Mișcarea poartă numele de *mișcare aperiodică*. Amortizarea limită corespunzătoare separației dintre regimul pseudo-periodic și cel aperiodic se numește **amortizare critică** (fig. 2c).

Exemplu

Un oscilator elastic orizontal realizează ultimele trei oscilații înainte de oprire astfel încât pe o riglă gradată paralelă cu acesta se înregistrează următoarele poziții ale masei m legate de oscilator: 20 cm, 5,6 cm și 12,8 cm. Considerând coeficientul de amortizare constant, determinați lungimea nedeformată a resortului elastic.

Rezolvare

Oscilatorul are o mișcare amortizată. Notăm cu L_0 lungimea în stare netensionată a resortului, iar cu $L_1 = 20$ cm, $L_2 = 5,6$ cm, $L_3 = 12,8$ cm lungimile înregistrate în problemă. Considerăm originea timpului ($t_0 = 0$), momentul în care se face prima înregistrare a amplitudinii oscilatorului. Atunci amplitudinea oscilației este $A_0 = L_1 - L_0$. Peste o jumătate de perioadă ($t = T/2$) se ajunge la a doua poziție extremă când amplitudinea este $A_1 = L_0 - L_2$. După încă o jumătate de perioadă se înregistrează lungimea L_3 , iar amplitudinea este $A_3 = L_3 - L_0$. Dacă legea de variație a amplitudinii oscilației este de tipul $A = A e^{-\beta t}$, atunci:

$$L_0 - L_2 = (L_1 - L_0) e^{-\beta T/2} \quad (1)$$

$$\text{iar} \quad L_3 - L_0 = (L_1 - L_0) e^{-\beta T} \quad (2)$$

Ridicând la pătrat prima expresie și împărțind rezultatul la cea de-a doua se obține:

$$(L_0 - L_2)^2 / (L_3 - L_0) = L_1 - L_0, \text{ de unde rezultă:}$$

$$L_0 = (L_1 L_3 - L_2^2) / (L_1 + L_3 - 2L_2) = 10,4 \text{ cm.}$$

Rezumat

- Când o forță de frecare proporțională cu viteza ($F_f = -bv$) acționează asupra oscilatorului, mișcarea acestuia va fi amortizată (a). Legea de mișcare pentru amortizările slabe, este: $y = A e^{-\text{const} \cdot t} \sin \omega' t$, unde, față de cazul oscilatorului neamortizat, amplitudinea oscilației scade exponențial în timp, iar pulsația este ceva

mai mică decât pulsația proprie.

- Dacă amortizarea crește, ea poate ajunge în regim critic (b) sau aperiodic (c), când nu se mai produce oscilația. Cele trei situații apar prezentate în diagramele următoare.



Verificați-vă cunoștințele

1. Amplitudinea oscilațiilor amortizate ale unui punct material este egală cu 5 dm, iar după 5 minute scade la doar 5 cm. Care este valoarea coeficientului de amortizare?
2. Amplitudinea inițială a oscilațiilor amortizate este egală cu 3 cm, iar peste 10 s devine egală cu 1 cm. Peste cât timp amplitudinea va deveni egală cu doar 0,3 cm?
3. Amplitudinea oscilațiilor amortizate ale unui pendul gravitațional se micșorează de două ori în timp de 1 minut. De câte ori se va micșora amplitudinea în timp de 3 minute?
4. Un pendul gravitațional cu lungimea de 10 cm oscilează într-un mediu cu coeficientul de amortizare de $0,5/\pi \text{ s}^{-1}$.

Câte oscilații complete efectuează până la momentul în care amplitudinea lui s-a micșorat de 100 ori. Se consideră $g = 10 \text{ m/s}^2$, iar perioada de oscilație a

pendulului (T_0) se calculează cu relația $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

5. La închiderea circuitului electric acul indicator al unui ampermetru oscilează. Dacă pozițiile sale extreme în decurs de o perioadă sunt: 23,5; 7,9 și 14,2, măsurate pe scala de 10^{-3} A , iar coeficientul de atenuare este constant, care este valoarea intensității curentului stabilit prin circuit?

1.1.4. Modelul „oscilatorului armonic”

Din studiul oscilațiilor mecanice a rezultat că amortizarea este cu atât mai mare cu cât interacțiunea dintre oscilator și mediu este mai mare. Energia oscilatorului este disipată în mediu, iar amplitudinea oscilației scade (fig. 1a).

Dacă s-ar putea izola oscilatorul de mediul extern astfel încât să nu existe schimb de energie între acestea, din conservarea energiei mecanice rezultă o oscilație a cărei amplitudine este constantă un timp nedefinit (fig. 1b).

Dacă, din punct de vedere mecanic un oscilator perfect neamortizat nu se poate realiza din cauza imposibilității eliminării oricărei interacțiuni dintre oscilator și mediu, un astfel de oscilator elastic, numit și **oscilator armonic**, poate fi modelat ca proiecție a unei mișcări

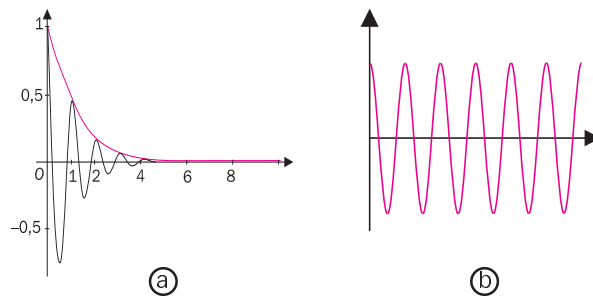


Fig. 1. Oscilogramme: oscilator real amortizat (a); oscilator neamortizat (b).

circulare uniforme pe un ecran aflat perpendicular pe planul în care are loc rotația. Proiecția acestei mișcări pe ecran va fi o mișcare oscilatorie armonică.

Laborator

Obținerea pe cale experimentală a unei mișcări oscilatorii liniar armonice

Materiale necesare:

- disc vertical cu mecanism de rotire uniformă;
- ecran;
- sursă de lumină (lampă).

Se fixează pe disc un corp P . În planul discului, se iluminează sistemul astfel încât pe ecranul situat diametral opus sursei de lumină apare proiectată umbra corpului din P . Imprimând o mișcare de rotație uniformă discului, pe ecran, umbra corpului din P va efectua o mișcare oscilatorie armonică (fig. 2).

Dacă notăm cu R raza mișcării circulare, atunci amplitudinea proiecției acestei mișcări (A) este egală cu R ($A = R$). Pentru descrierea mișcării circulare alegem un sistem de referință cu originea în centrul

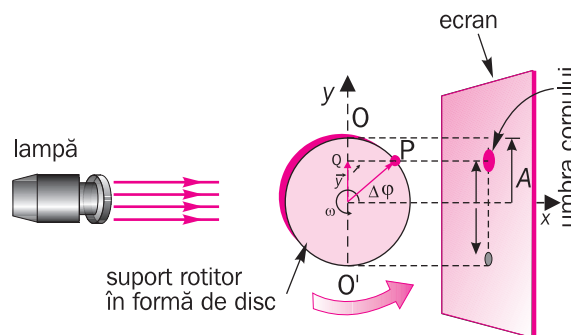


Fig. 2. Modelarea oscilatorului liniar armonic.

trajectoriei circulare și axele de coordonate situate în planul mișcării ca în figura 2.

Observație: Dacă mișcarea circulară începe din originea sistemului (unghi la centru $\theta_0 = 0$) mișcarea umbrei pe ecran este echivalentă unui oscilator elastic neamortizat a cărui mișcare începe din poziția de echilibru.

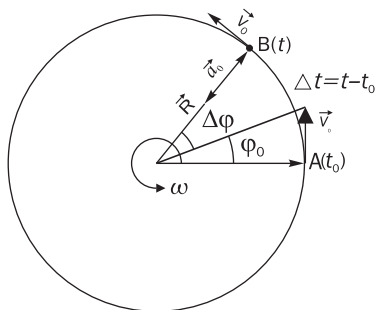


Fig. 3. Mărimi caracteristice în mișcarea circulară uniformă.

Tabelul 1. Tablou recapitulativ al mișcării circulare uniforme

Mărimi fizice caracteristice	Relații între mărimile caracteristice
$R =$ raza vectoare	
$\nu =$ frecvența de rotație	$T \cdot \nu = 1$ (a)
$T =$ perioada de rotație	
$\omega =$ viteza unghiulară	$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ (b, c)
$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 =$ unghi la centru parcurs de raza vectoare	$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ (d)
$v_0 =$ viteza liniară (tangenta la traiectorie)	$v = \omega R$ (e)
$a_0 =$ accelerația centripetă	$a = \omega^2 R$ ($\vec{a} = -\omega^2 \vec{R}$) (f)

Experimentul realizat evidențiază existența unei analogii între mișcarea circulară uniformă și cea oscilatorie. Pentru studiul sistematic al celei din urmă reamintim-vă din tabelul 1 și fig. 3, mărimile caracteristice ale mișcării circulare uniforme și relațiile dintre acestea.

Cinematica oscilatorului armonic

A. Determinarea legii de mișcare a oscilatorului armonic

Proiecția Q pe axul OO' a corpului din P , ce se deplasează odată cu discul de rază R (fig. 4) este data în orice moment de expresia:

$$y = R \sin \Delta \varphi, \quad (1)$$

unde $\Delta \varphi$ este unghiul la centru parcurs de corpul din P în intervalul de timp $\Delta t = t - t_0$.

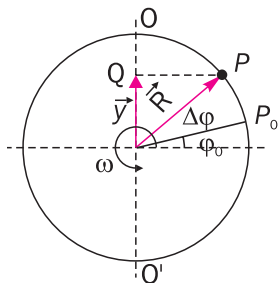


Fig. 4. Când corpul din P efectuează o mișcare de rotație cu viteza unghiulară ω , proiecția lui, Q , se deplasează de-a lungul axei OO' , descriind o mișcare oscilatorie liniar armonică.

Introducând în relația (1) $R=A$ și $\Delta \varphi$ din definiția vitezei unghiulare a mișcării circulare (tabel 1, d):

$$\Delta \varphi = \omega \Delta t = \omega(t - t_0) \quad (2)$$

pentru $t_0 = 0$ rezultă:

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (3)$$

Relația (3) reprezintă **legea de mișcare a unui oscilator liniar armonic**.

Termenul notat cu ω reprezintă **pulsăția oscilatorului**.

Argumentul funcției sinus reprezintă faza oscilației, iar φ_0 poartă numele de fază inițială.

Semnificația acesteia se obține din forma generală a legii de mișcare (3):

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{Pentru } t = 0: y_0(0) = A \sin \varphi_0 \quad (3')$$

și indică faptul că la momentul inițial oscilatorul nu se găsește în punctul său de echilibru, ci la o distanță $y_0(0)$ față de acesta. Faza oscilatorului se măsoară în radiani.

În cazul particular în care $\varphi_0 = 0$ relația (3) devine:

$$y = A \sin \omega t. \quad (3'')$$

Observație: Relația obținută pentru legea de mișcare (3) este similară celei obținute din analiza oscilogramelor la studiul oscilatorului elastic în câmp gravitațional (pag. 10).

B. Viteza oscilatorului armonic

În fig. 5, proiectând viteza \vec{v}_0 a corpului P aflat în mișcare de rotație, pe axa OO' , se obține viteza \vec{v} a oscilatorului al cărei modul este:

$$v = v_0 \cos \Delta \varphi \quad (4)$$

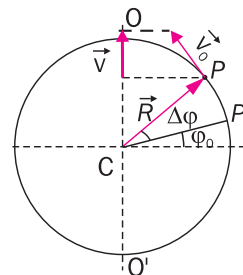


Fig. 5. Proiecția pe axa OO' , a vitezei de rotație a corpului, este viteza instantanee a oscilatorului armonic.

Ținând seama că $v_0 = \omega R$ și aplicând considerentele de la punctul anterior ($R = A$ și $\Delta \varphi = \omega \Delta t$) prin înlocuire în relația (4) rezultă:

$$v = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (5)$$

Relația (5) reprezintă expresia generală a vitezei unui oscilator liniar armonic.

În cazul în care $\varphi_0 = 0$ se obține:

$$v = \omega A \cos \omega t. \quad (5\zeta)$$

Utilizând relația trigonometrică:

$$\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \quad (6)$$

expresia vitezei devine:

$$v = \omega A \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right). \quad (7)$$

Din compararea relațiilor (3) și (7) se observă că între viteza și elongația oscilatorului liniar armonic, considerate în această ordine, există un defazaj $\Delta \varphi$ egal cu:

$$\Delta \varphi = \omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2} - \omega t - \varphi_0 = \frac{\pi}{2}. \quad (8)$$

C. Accelerația oscilatorului armonic

Pentru a determina accelerația \vec{a}_0 a oscilatorului liniar armonic se observă că proiecția accelerației \vec{a} a corpului din P , pe axa OO' este:

$$a = a_0 \sin \omega \Delta t. \quad (9)$$

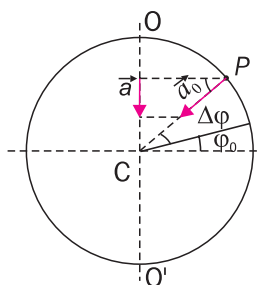


Fig. 6. Proiecția accelerației \vec{a}_0 pe axa OO' dă accelerația instantanee \vec{a} a oscilatorului.

Ținând cont de expresia accelerației în mișcarea circulară uniformă (tabelul 1, f):

$$a_0 = -\omega^2 R \quad (10)$$

și de considerentele de la punctele anterioare ($R = A$ și $\Delta\varphi = \omega\Delta t$), înlocuind în (9) rezultă:

$$a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (11)$$

Relația (11) reprezintă expresia accelerației oscilatorului liniar armonic. Relația se simplifică, pentru $\varphi_0 = 0$, devenind:

$$a = -\omega^2 A \sin \omega t. \quad (11')$$

Din relațiile (3) și (11) se observă că între accelerația (a) și elongația (y) este valabilă relația:

$$a = -\omega^2 y. \quad (12)$$

Accelerația și elongația oscilatorului sunt în opoziție de fază.

Exemple

1. O particulă are o mișcare oscilatorie liniar armonică, cu amplitudinea $A = 0,5$ m și frecvența $\nu = 2$ Hz. Faza inițială fiind nulă, determinați:

- perioada T a mișcării și pulsația (ω);
- poziția particulei la momentele: $t = 0,5$ s, $t = 0,75$ s și $t = 1,25$ s;
- expresia vitezei ca funcție de timp;
- accelerația pe care o are particula la $t = 0,75$ s.

Rezolvare

a) Potrivit relațiilor între mărimile caracteristice:

$$T = \frac{1}{\nu} \quad \text{și} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu,$$

se obține:

$$T = 0,5 \text{ s} \quad \text{și} \quad \omega = 4\pi \text{ rad/s}.$$

b) Aplicarea legii de mișcare implică în primul rând calcularea fazei ($\varphi = \omega t$) pentru fiecare moment și înlocuirea în funcția corespunzătoare.

Astfel, pentru $t = 0,5$ s se obține $\varphi = 2\pi$ rad și, înlocuind în $y(t) = A \sin \omega t$, se obține:

$$y(0,5) = 0,5 \cdot \sin(4\pi \cdot 0,5) = 0 \text{ m}.$$

Corespunzător:

$$y(0,75) = -0,5 \text{ m} \quad \text{și} \quad y(1,25) = 0,5 \text{ m}.$$

c) Expresia vitezei este:

$$v(t) = \omega A \cos \omega t.$$

Înlocuind A se obține:

$$v(t) = 2\pi \cdot \cos(4\pi t).$$

d) Relația între accelerație și elongație este:

$$a = -\omega^2 y = -(4\pi)^2 y$$

atunci: $a(0,75) = -16\pi^2 y(0,75) = 8\pi^2 \text{ m/s}^2$.

2. Considerând că la momentul t_1 poziția unui oscilator liniar armonic este $y_1 = 2$ cm și viteza este $v_1 = 4$ cm/s, iar la momentul t_2 poziția este $y_2 = 3$ cm și viteza este $v_2 = 1$ cm/s, determinați ecuația de mișcare a oscilatorului, ecuația vitezei și accelerației acestuia. Faza inițială a celor două oscilatoare este φ_0 .

Rezolvare

Aplicând ecuațiile de mișcare și relația vitezei oscilatorului liniar armonic la momentele t_1 și t_2 , rezultă:

$$y_1 = A \sin(\omega t_1 + \varphi_0)$$

$$v_1 = \omega A \cos(\omega t_1 + \varphi_0)$$

$$y_2 = A \sin(\omega t_2 + \varphi_0)$$

$$v_2 = \omega A \cos(\omega t_2 + \varphi_0)$$

Pentru rezolvarea sistemului trebuie să eliminăm funcțiile trigonometrice care conțin în argument valorile necunoscute ale timpului. Pentru aceasta, vom aplica formula fundamentală a trigonometriei:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

pentru cele două momente t_1 și t_2 considerate.

Se obține:

$$\sin^2(\omega t_1 + \varphi_0) = \frac{y_1^2}{A^2}$$

$$\cos^2(\omega t_1 + \varphi_0) = \frac{v_1^2}{\omega^2 A^2}$$

și respectiv:

$$\sin^2(\omega t_2 + \varphi_0) = \frac{y_2^2}{A^2}$$

$$\cos^2(\omega t_2 + \varphi_0) = \frac{v_2^2}{\omega^2 A^2}.$$

Adunând membru cu membru rezultă sistemul cu necunoscutele A și ω :

$$\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{v_1^2}{\omega^2 A^2} = 1$$

$$\text{și:} \quad \frac{x_2^2}{A^2} + \frac{v_2^2}{\omega^2 A^2} = 1.$$

Din rezolvarea sistemului rezultă:

$$\omega = \sqrt{\frac{v_2^2 - v_1^2}{y_1^2 - y_2^2}} \approx 1,7 \text{ rad/s}$$

$$A = \frac{y_1^2 v_2^2 - v_1^2 y_2^2}{v_2^2 - v_1^2} \approx 3 \text{ cm}.$$

Ecuațiile oscilatorului vor fi:

$$y = 3 \sin(1,7t + \varphi_0) \text{ [cm]}$$

$$v = 5,1 \cos(1,7t + \varphi_0) \text{ [cm/s]}$$

$$a = -8,7 \sin(1,7t + \varphi_0) \text{ [cm/s}^2\text{]}$$

Reprezentări grafice ale elongației, vitezei și accelerației oscilatorului armonic

După cum indică relația (3), variația în timp a elongației oscilatorului linear armonic are o formă sinusoidală (fig. 7). În mod analog, tot reprezentări sinusoidale au și viteza, defazată față de elongație cu $\pi/2$ (relația 7) și accelerația, defazată față de elongație cu π .

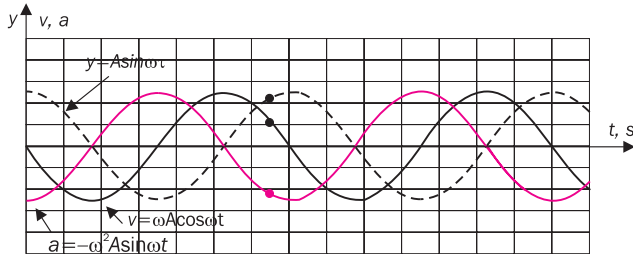


Fig. 7. Reprezentări grafice ale unor mărimi oscilatorii ale oscilatorului linear armonic: elongație (y), viteză (v), accelerație (a), în același sistem de coordonate.

Observații:

- Dacă oscilatorul este pus în oscilație prin scoaterea din poziția de echilibru la o distanță egală cu amplitudinea oscilației și nu prin aplicarea unui impuls în poziția de echilibru, ecuațiile mărimilor caracteristice suferă o defazare cu $\pi/2$ devenind:

$$y = A \sin(\omega t + \pi/2) = A \cos \omega t \quad (3')$$

$$v = \omega A \cos(\omega t + \pi/2) = -\omega A \sin \omega t \quad (7')$$

$$a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \pi/2) = -\omega^2 A \cos \omega t \quad (11')$$

- Aplicarea relațiilor (3), (7), (11) sau (3'), (7'), (11') în probleme, se alege în funcție de condițiile inițiale.

Dinamica oscilatorului armonic – calculul perioadei și frecvenței oscilatorului armonic

Pentru studiul dinamic al oscilatorului armonic vom considera un resort elastic cu constanta elastică (k) și masa neglijabilă de care este suspendat un corp punctiform de masa m . Răspunsul oscilatorului la acțiuni externe este presupus linear datorită unei forțe elastice de tipul $F = -ky$, unde y este elongația resortului. Pentru ca oscilația să nu fie amortizată se consideră interacțiunile dintre oscilator și mediu nule.

Din diagrama forțelor (fig. 8b) aplicând principiul fundamental al dinamicii rezultă:

a) la echilibru:

$$\vec{G} + \vec{F}_0 = \vec{0} \Leftrightarrow G - ky_0 = 0. \quad (13)$$

b) Imprimând un impuls oscilatorului, la un moment oarecare din timpul oscilației, principiul fundamental al dinamicii se scrie:

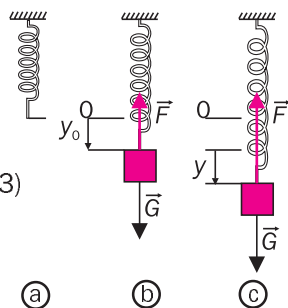


Fig. 8.

$$\vec{G} + \vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow G - k(y_0 + y) = ma \quad (14)$$

unde y este elongația oscilatorului scos din poziția de echilibru de la punctul b .

Din (13) și (14) rezultă:

$$-ky = ma \quad (15)$$

de unde
$$a + \left(\frac{k}{m}\right)y = 0. \quad (16)$$

Relația (16) reprezintă ecuația oscilatorului linear armonic. Având în vedere că accelerația oscilatorului depinde în fiecare moment de elongația sa (ecuația 12)

$$a = -\omega^2 y$$

se obține, din compararea relațiilor (12) și (16) pulsația oscilatorului:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (17)$$

Din $T = \frac{2\pi}{\omega}$, înlocuind ω din relația (17), rezultă

perioada T a oscilatorului:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (18)$$

Observație: Relația obținută concordă cu rezultatele experimentale (vezi 1.1.2.).

Din $T = \frac{1}{\nu}$ se obține frecvența oscilatorului:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (19)$$

Concluzie: Perioada oscilatorului depinde de proprietățile sale inerțiale (masă) și de proprietățile sale elastice (constantă elastică).

Exemplu

Un automobil are suspensiile formate din 4 resorturi, câte unul pentru fiecare roată. În cazul în care constanta elastică a unui resort este $k = 20 \cdot 10^3$ N/m, iar masa automobilului cu ocupanți cu tot este 1500 kg, determinați frecvența oscilațiilor datorată denivelărilor drumului. În cât timp va realiza automobilul cinci oscilații complete?

Rezolvare

Considerând greutatea uniform distribuită pe cele 4 resorturi, rezultă că fiecare resort va suporta o greutate de 375 kg. Frecvența de vibrație va fi:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 1,16 \text{ Hz}.$$

$$t = nT = \frac{n}{\nu} = 4,3 \text{ s}.$$

Energia cinetică și potențială a oscilatorului armonic

Într-un sistem mecanic aflat în oscilație, energia mecanică se transformă continuu din formă cinetică în formă potențială – și invers. Dacă oscilatorul nu interacționează cu mediul, energia mecanică se conservă, iar transformarea între cele două forme (cinetică și potențială) a energiei mecanice se realizează fără pierderi. Să considerăm că, la un moment dat, pentru un astfel de oscilator (fig. 9), elongația este x , iar viteza v . Energia potențială a oscilatorului linear armonic este dată de expresia:

$$E_p = \frac{kx^2}{2}, \quad (20)$$

unde k este constanta elastică. În același moment, energia sa cinetică este:

$$E_c = \frac{mv^2}{2}, \quad (21)$$

unde m este masa oscilatorului.

Energia totală a sistemului este:

$$E_t = E_p + E_c = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2}. \quad (22)$$

Înlocuind în expresia (22) relațiile de calcul ale elongației:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (23)$$

și vitezei:

$$v = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (24)$$

și ținând seama că $\omega^2 = \frac{k}{m}$, se obține:

$$\begin{aligned} E_t &= \frac{kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2} + \frac{kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2} = \\ &= \frac{kA^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Relația (25) indică faptul că energia mecanică a oscilatorului armonic este constantă în timp (fig. 9).

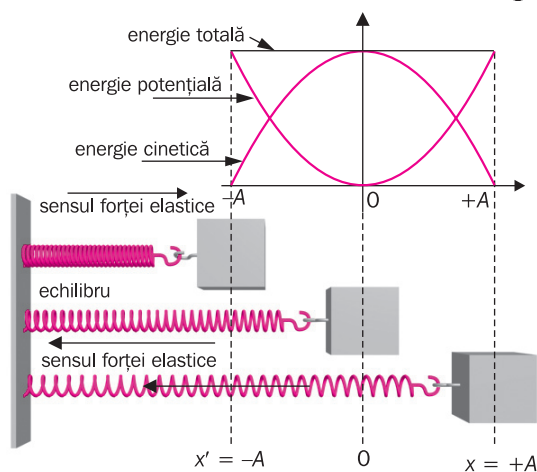


Fig. 9. Curbele de energie cinetică, potențială și totală ale unui oscilator linear armonic.

Urmărind reprezentările grafice ale celor trei energii în funcție de poziția oscilatorului se observă că:

a) energia oscilatorului este:

- pur potențială $\left(E_{p\max} = \frac{kA^2}{2}\right)$, în punctele

$x = \pm A$ și

- pur cinetică $\left(E_{c\max} = \frac{kA^2}{2}\right)$ în $x = 0$.

b) în orice alt punct energia totală este suma celor două energii și este dată de relația (25).

Din relația (25) rezultă că amplitudinea oscilatorului

este:
$$A = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2E_{\text{tot}}}{m}}. \quad (26)$$

Concluzie: După cum s-a evidențiat și experimental, amplitudinea oscilatorului depinde de condițiile inițiale, adică de energia inițială și de perioada oscilatorului.

Dintre curbele reprezentate în figura 9, poate cea mai utilizată este curba de energie potențială. Forma curbei reprezentative a variației în timp a energiei potențiale a oscilatorului armonic este o parabolă. Datorită formei, această curbă este numită adesea de către fizicienii „groapa de potențial“.

Un rol important în interpretarea grafică a mișcării oscilatorului îl joacă tangenta la curba reprezentativă a energiei potențiale într-un punct $E_p(x)$. Ea exprimă valoarea forței la care este supus oscilatorul în poziția respectivă. Proprietatea rezultă din relația:

$$L = -\Delta E_p,$$

unde L este lucrul mecanic efectuat pentru variația ΔE_p a energiei potențiale a oscilatorului.

Din $L = F\Delta x$, se obține:
$$F = -\frac{\Delta E_p}{\Delta x}.$$

Cu cât este mai înclinată tangenta la curba reprezentativă a energiei potențiale a unui oscilator, cu atât mai intensă va fi forța care îl solicită. Punctul în care tangenta la „groapa de potențial“ este orizontală semnifică echilibrul forțelor care acționează asupra acestuia.

Observație: Utilizarea relațiilor (3') și (7') în cazurile în care mișcarea oscilatorului începe din poziția de echilibru prin aplicarea unui scurt impuls are ca efect modificarea expresiilor de calcul ale energiei cinetice

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2} \quad \text{și potențiale}$$

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2}, \quad \text{dar nu și a energiei}$$

$$\text{totale } E = \frac{m\omega^2 A^2}{2}.$$

Exemplu

Un oscilator de masă $m = 0,2$ g oscilează după o lege de mișcare de forma:

$$y = 0,5 \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2}\right).$$

a) Stabiliți momentele în care energiile cinetică și potențială ale oscilatorului sunt egale.

b) Determinați raportul $\frac{E_c}{E_p}$ când elongația este jumătate din amplitudine.

Rezolvare

a) Energia potențială a oscilatorului este:

$$E_p = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi_0),$$

iar energia cinetică:

$$E_c = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi_0).$$

Din condiția impusă de problemă: $E_c = E_p$, se obține:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2}\right),$$

unde s-au înlocuit ω și φ_0 cu valorile lor din legea de mișcare.

Aplicând transformarea trigonometrică:

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$, în ultima relație, se obține:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \pi\right) = 0, \text{ de unde rezultă: } t = \frac{3(2k-1)}{2},$$

unde $k \in \mathbf{Z}^*$.

b) Din condiția $y = \frac{A}{2}$, se obține:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6},$$

de unde rezultă primul moment în care se realizează condiția:

$$t = -2.$$

Atunci raportul E_c/E_p devine:

$$\frac{E_c}{E_p} = \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{6}(-2) + \frac{\pi}{2}\right) = 3.$$

Pendulul gravitațional – studiu în limita oscilațiilor armonice

Mișcarea oscilatorie a pendulului gravitațional a fost studiată în secolul al X-lea de Ibn Yunus al-Masri, dar abia în secolul al XV-lea pendulul avea să fie utilizat în construirea ceasornicelor.

Pentru studiul dinamic al pendulului gravitațional, în limita aproximării oscilatorului liniar armonic vom lucra în următoarele ipoteze:

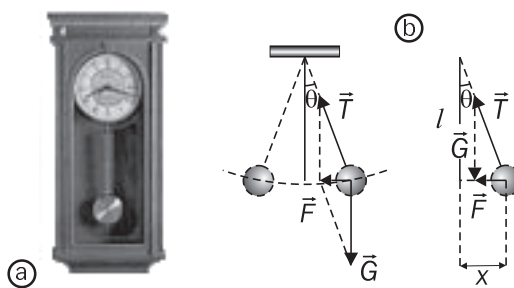


Fig. 10. a) Când un pendul simplu este deplasat din poziția de echilibru cu un unghi mic (sub 6 grade de arc) și este apoi eliberat, el va efectua o mișcare oscilatorie ce poate fi aproximată cu una liniar armonică. b) Diagrama forțelor prin considerarea aproximării.

- Firul de care este legat corpul de masă m este lung, inextensibil și de masă neglijabilă.
- Corpul de masă m este considerat punctiform.
- Oscilațiile pendulului au loc într-un plan.
- Interacțiunea cu mediu este neglijabilă.

Aplicăm principiul fundamental al dinamicii: $\vec{F} = m\vec{a}$, unde \vec{F} este rezultanta forțelor care acționează asupra pendulului de masă m , cauzându-i o mișcare accelerată cu accelerația \vec{a} (în m/s^2). Forța responsabilă de deplasarea pendulului este componenta tangențială a greutății.

$$F = mg \sin \theta$$

$$a = g \sin \theta.$$

Dacă amplitudinea unghiulară θ sub care se realizează oscilația este mică (sub 6 grade de arc) se poate face aproximarea

$$\sin \theta \approx \theta.$$

De exemplu, când θ este 0,1 rad (circa 6 grade), $\sin \theta = 0,0998$, traiectoria pendulului diferă cu doar 2% de distanța pe care s-ar deplasa un oscilator liniar.

În această aproximare: $F = -\frac{mgx}{l}$. Considerând forța F , o forță de tip elastic ($F = -kx$) rezultă constanta elastică a oscilatorului $k = -\frac{mg}{l}$, de unde $\frac{k}{m} = \frac{g}{l}$. Înlocuind în expresia perioadei (T) a oscilatorului armonic rezultă perioada de oscilație a pendulului gravitațional:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Situația anterior descrisă, în care perioada proprie a oscilatorului (T_0) este independentă de amplitudinea unghiulară θ , poartă numele de *izocronismul micilor oscilații*.

Prezența lui g în ecuație se poate traduce din punct de vedere fizic prin variația perioadei cu latitudinea. Asta înseamnă că la diferite latitudini de pe glob frecvența oscilatorului va fi diferită. De exemplu, între Glasgow ($g = 9,815\ 63\ \text{m/s}^2$) și Cairo ($g = 9,793\ 17\ \text{m/s}^2$), pentru a avea aceeași frecvență, un pendul trebuie scurtat cu 0,23% din lungimea acestuia. O variație similară se produce și cu altitudinea.

Exemplu

Un pendul la suprafața Pământului o ia înainte cu 1,5 minute în decurs de 24 de ore. La ce înălțime trebuie ridicat pendulul pentru a nu mai rămâne în urmă? Se dă raza Pământului $R = 6,4 \cdot 10^6\ \text{m}$ și $g_0 = 9,81\ \text{m/s}^2$.

Rezolvare

Notăm cu T_0 perioada pendulului la suprafața Pământului, iar cu T perioada la înălțimea h necunoscută. Pe Pământ pendulul face un număr N de oscilații în timpul $\tau - \Delta t$, iar la înălțimea h în timpul τ . Se poate scrie că $N = \frac{\tau - \Delta t}{T_0}$, dar tot $N = \frac{\tau}{T}$. Egalând expresiile

rezultă:

$$T_0 = T \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau} \right).$$

Fiind vorba de același pendul, lungimea acestuia este constantă. Rezultă că perioada sa variază cu înălțimea ca urmare a modificării suferite de accelerația gravitațională. Perioadele pendulului la suprafața Pământului și la înălțimea h sunt date de expresiile:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_0}} \text{ și respectiv } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

unde g este dat de expresia.

$$g = g_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2.$$

R este raza Pământului.

Din ultimele trei relații rezultă că

$$T = T_0 \left(1 - \frac{h}{R} \right), \text{ de unde, substituind, se obține:}$$

$$h = \frac{R \Delta t}{\tau - \Delta t} = 66\ 74\ \text{m}.$$

Rezumat

- Un oscilator armonic reprezintă un model fizic al unui oscilator elastic care nu face schimb de energie cu mediul. Amplitudinea lui rămâne constantă un timp indefinit.

- Legea de mișcare a oscilatorului este:

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

unde A este amplitudinea oscilației, ω este pulsația, iar φ_0 este faza inițială.

- Legea de variație a vitezei este:

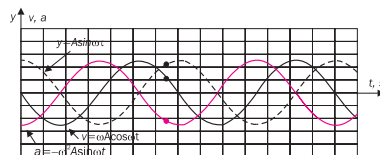
$v = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0)$, iar cea a accelerației:

$$a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

- Între accelerația oscilatorului și elongație există relația:

$$a = \omega^2 y, \text{ unde } \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

- Reprezentarea grafică a variației în timp a mărimilor elongație, viteză și accelerație este dată în figura de mai sus.



- Perioada și frecvența oscilatorului sunt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \text{ și respectiv } \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

- Energia totală a oscilatorului liniar armonic este

constantă în timp $E_t = \frac{m\omega^2 A^2}{2}$. Ea se transferă între forma cinetică și cea potențială.

- În cazul unui pendul gravitațional, care oscilează cu amplitudine unghiulară mică ($\theta < 6$ grade de arc) perioada de oscilație a unui oscilator armonic poate fi aproximată și este egală cu:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$



Verificați-vă cunoștințele

1. O particulă aflată în mișcare oscilatorie liniar armonică se deplasează conform ecuației:

$$y = 2 \sin\left(\frac{t}{2} + \pi\right) \text{ [m]}.$$

Stabiliți:

- amplitudinea, perioada și frecvența oscilațiilor;
- poziția, viteza și accelerația după 5 s de la începerea mișcării.

2. La capătul liber al unui resort orizontal ideal, de constantă elastică $k = 20 \text{ N/m}$, este fixat un corp de masă $m = 20 \text{ g}$ (presupus punctual) care poate culisa fără frecare pe o tijă. Se depărtează corpul de poziția sa de echilibru și i se dă drumul astfel încât, la distanța $x_1 = 4 \text{ cm}$ de poziția de echilibru, viteza sa este $v_1 = 2 \text{ m/s}$.

a) Care este viteza corpului la trecerea prin poziția de echilibru?

b) Care este amplitudinea mișcării?

3. O insectă cu masa de $0,5 \text{ g}$, așezându-se pe o frunză, o face să vibreze cu o frecvență de 1 Hz .

a) Care ar fi constanta elastică a unui resort care s-ar comporta similar frunzei?

b) Care ar fi frecvența de vibrație a frunzei dacă insecta ar avea masa de $1,5 \text{ g}$?

4. Un mobil de masă $m = 0,5 \text{ kg}$ se deplasează, sub acțiunea unei forțe de tip elastic, față de un centru fix, într-o mișcare oscilatorie. La distanța $y = 2 \text{ cm}$, viteza corpului este $v = 0,4 \text{ m/s}$, iar forța ce acționează asupra corpului $F = 0,8 \text{ N}$. Scrieți ecuația de mișcare a mobilului dacă faza inițială a mișcării este nulă.

5. Un oscilator liniar ce oscilează cu amplitudinea $A = 2 \text{ cm}$ se află, la momentul $t_1 = 0,01 \text{ s}$ de la începutul mișcării, în punctul $y = 0,4 \text{ cm}$ de poziția de echilibru. Considerând faza inițială nulă, determinați:

a) pulsația; b) perioada; c) viteza oscilatorului în poziția y ; d) accelerația mișcării oscilatorului când elongația este maximă.

6. Lăsat liber în apă, un corp cilindric vertical, de lungime $l_0 = 0,3 \text{ m}$ și densitate $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$, oscilează. Amplitudinea acestei oscilații este $A = 1,3 \text{ cm}$.

a) Arătați că forța ce acționează asupra cilindrului este de tip elastic.

b) Determinați perioada oscilației.

c) Determinați ecuația mișcării.

7. Legea de mișcare a unui oscilator de masă $m = 2 \text{ kg}$ este $y = 4(\sin 20t + \sqrt{3} \cos 20t) \text{ [cm]}$. Determinați:

a) amplitudinea și faza inițială; b) viteza maximă a oscilatorului în timpul mișcării; c) forța maximă ce acționează asupra oscilatorului.

8. Un obiect atârnat de un resort execută o mișcare oscilatorie armonică. Dacă inițial obiectul se află la 20 cm deasupra poziției sale de echilibru, iar frecvența oscilației acestuia este 2 s^{-1} , să se determine:

a) ecuația de mișcare;

b) ecuațiile vitezei și ale accelerației;

c) valorile maxime ale vitezei și accelerației.

9. Într-un ascensor se plasează un oscilator armonic format dintr-un resort ideal, de constantă elastică k , la capătul căruia se găsește un corp punctiform de masă m . Dacă greutatea proprie a resortului se poate neglija, stabiliți care este perioada oscilatorului când ascensorul

se deplasează: a) accelerat cu accelerația a ; b) uniform; c) încetinit cu accelerația a . Ce modificări apar în situațiile (a) și (c), față de (b)?

10. Un oscilator efectuează o mișcare descrisă de ecuația:

$$y = 4 \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ [cm]}. \text{ Determinați:}$$

a) valorile maxime ale vitezei și accelerației oscilatorului;

b) momentele când viteza și accelerația sunt maxime;

c) reprezentați grafic legea de mișcare, variația vitezei și accelerației oscilatorului.

11. Coarda unei chitare vibrează cu o frecvență de 440 Hz . Un punct situat în centrul ei se deplasează cu o amplitudine $A = 3 \text{ mm}$ și o diferență de fază $\varphi_0 = 0$.

Stabiliți: a) ecuația de mișcare;

b) valorile maxime ale vitezei și accelerației.

12. Un oscilator orizontal are masa $m = 150 \text{ g}$ și constanta elastică $k = 300 \text{ N/m}$. Când elongația este $x_1 = 0,012 \text{ m}$, viteza este $v_1 = 0,3 \text{ m/s}$. Aflați:

a) energia totală a oscilatorului; b) amplitudinea mișcării;

c) viteza maximă atinsă în timpul mișcării?

13. Un pendul are perioada de oscilație pe Pământ $T = 1,6 \text{ s}$. Care este perioada de oscilație pe Marte dacă accelerația este $g_M = 3,71 \text{ m/s}^2$? Se dă accelerația pe pământ $g_p = 9,81 \text{ m/s}^2$.

14. După ce aterizează pe o planetă, un explorator construiește un pendul cu care vrea să determine accelerația gravitațională. Dacă lungimea pendulului este $l = 50 \text{ cm}$, iar pendulul face 100 oscilații complete în 136 s , care este valoarea accelerației gravitaționale calculate de explorator?

15. Mișcarea pistoanelor motorului unui automobil poate fi aproximată cu o mișcare oscilatorie armonică. Deplasarea pistoanelor (dublul amplitudinii oscilației) este $0,1 \text{ m}$, iar motorul are o turație de 3500 oscilații/minut.

a) Calculați accelerația pistonului în punctele extreme ale mișcării. b) Dacă masa pistonului este $0,45 \text{ kg}$, ce forță netă se exercită în aceste puncte? c) Care sunt viteza și energia cinetică a pistonului la mijlocul deplasării?

d) Ce putere medie este necesară pentru ca pistonul să accelereze din repaus la valoarea sa maximă?

e) Dacă turația motorului este 7000 oscilații/minut, care sunt răspunsurile la întrebările b și c?

16. Mișcarea unei particule este dată de ecuația: $y(t) = 25 \sin 10t$, unde elongația este dată în centimetri, iar timpul în secunde.

a) În ce momente energia cinetică este dublul celei potențiale? b) În ce momente cele două energii sunt egale?

c) În ce momente forța elastică este maximă și care este valoarea ei? Se dă masa oscilatorului $m = 0,1 \text{ kg}$. d) În ce momente viteza este jumătate din valoarea maximă?

Care sunt valorile energiei cinetice și potențiale ale oscilatorului în aceste momente?

Reprezentări fazoriale

Sunetul arareori este pur, rezultat al unei singure oscilații. Cel mai adesea, la realizarea lui concură suprapunerea mai multor oscilații. Diferite dispozitive de amortizare, de mare întindere, se bazează pe efectul cumulat al amortizărilor produse de diferiți oscilatori. Oscilațiile atomilor unui solid, ca urmare a agitației termice a acestuia la o anumită temperatură sunt în realitate mișcări complexe rezultate în urma interacțiunilor, cu un număr mare de atomi vecini. Acestea sunt doar câteva exemple în care oscilația reală a unor corpuri se obține ca sumă a unor oscilații simple produse simultan.

Pentru înțelegerea compunerii oscilațiilor este utilă reprezentarea acestora cu ajutorul fazorilor.

Dicționar

Fazor (vector rotitor): Formă de reprezentare a unei mărimi oscilatorii. Fazorul este un vector orientat după o direcție care face cu abscisa un unghi egal cu faza oscilației la momentul respectiv și are modulul egal cu amplitudinea mișcării (fig. 1).

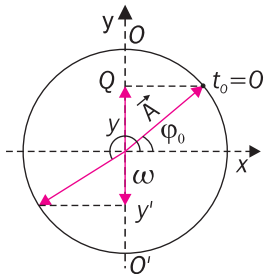


Fig. 1. Reprezentare fazorială a unei oscilații. Proiecția vectorului \vec{A} pe axa Oy dă $y = A \sin \varphi_0$ la momentul $t_0 = 0$. La un moment ulterior, rotația vectorului în sens antiorar, cu viteza unghiulară ω egală cu pulsația mișcării

oscilatorii, determină modificarea elongației.
 $y' = A \sin(\omega t + \varphi_0)$.

Utilitatea acestui tip de reprezentare este dată de posibilitățile pe care le oferă în determinarea rezultantei a două sau mai multor oscilații imprimare aceluiși oscilator.

Compunerea oscilațiilor paralele – descriere cantitativă

Pentru simplitate, să considerăm două oscilații de același sens și pulsație (ω), produse cu o diferență de fază $\Delta\varphi$ și ale căror amplitudini sunt A_1 și A_2 .

Elongațiile la momentul t vor fi date de expresiile:

$$y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \quad (1)$$

și:

$$y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2), \quad (2)$$

unde cu φ_1 și φ_2 s-au notat fazele inițiale ale celor două oscilații.

Reprezentarea fazorială a celor două oscilații este dată în figura 2.

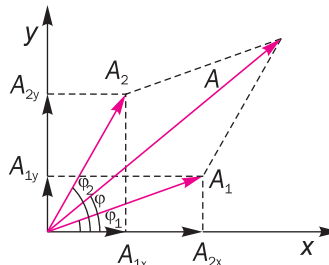


Fig. 2. Diagramă fazorială pentru suprapunerea a două oscilații de frecvențe egale.

Utilizând metoda analitică de compunere a vectorilor, se obține amplitudinea:

$$A^2 = (A_{1x} + A_{2x})^2 + (A_{1y} + A_{2y})^2, \quad (3)$$

unde: $A_{1x} = A_1 \cos \varphi_1$, $A_{1y} = A_1 \sin \varphi_1$

$$A_{2x} = A_2 \cos \varphi_2, \quad A_{2y} = A_2 \sin \varphi_2$$

Înlocuind în (3) și făcând calculele, rezultă:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (4)$$

unde pentru calcul s-au utilizat relațiile trigonometrice:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

și: $\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta)$.

Faza inițială a oscilației compuse este dată de:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_{1y} + A_{2y}}{A_{1x} + A_{2x}} = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (5)$$

Oscilația rezultantă se exprimă prin proiecția fazorului \vec{A} pe axa Oy , sub forma:

$$y = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (6)$$

unde A este dat de relația (4), iar φ rezultă din relația (5).

În mod similar, se pot compune mai multe oscilații armonice paralele.

Cazuri particulare:

1) Dacă $\Delta\varphi = 2k\pi$, ($k \in \mathbb{N}$).

Din $\cos 2k\pi = 1$, se obține:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2} = A_1 + A_2. \quad (4')$$

Se spune că oscilațiile sunt în fază. În acest caz amplitudinea este maximă.

2) Dacă $\Delta\varphi = (2k + 1)\pi$ ($k \in \mathbb{N}$).

Din: $\cos(2k + 1)\pi = -1$, se obține:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1 - A_2)^2} = A_1 - A_2. \quad (4'')$$

Se spune că oscilațiile sunt în opoziție de fază. Amplitudinea rezultantă este minimă.

3) Dacă $\Delta\varphi = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{N}$).

Din $\cos(2k + 1)\frac{\pi}{2} = 0$ se obține:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2. \quad (4'')$$

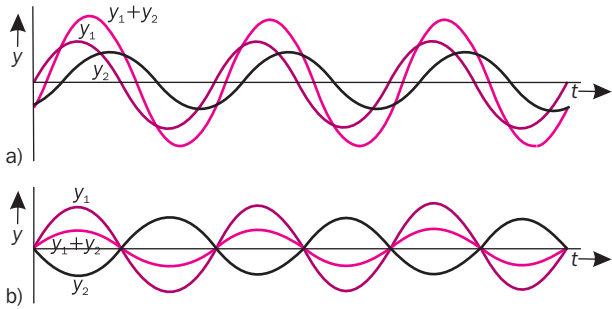
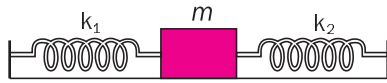


Fig. 3. Reprezentări posibile ale compunerii unor oscilații armonice. Se observă că rezultatul este tot o oscilație armonică.

Exemplu

Calculați frecvența oscilației configurației din figură. Se consideră suprafețele fără frecare. Constantele elastice ale celor două resorturi sunt k_1 și k_2 , iar masa oscilatorului este m .



Rezolvare

Când masa m oscilează, unul dintre resorturi este alungit, iar celălalt comprimat cu aceeași alungire.

$$\Delta x_1 = -\Delta x_2 = \Delta x$$

unde Δx_1 este alungirea resortului de constantă elastică k_1 , iar Δx_2 cea a resortului k_2 .

Forța elastică în orice moment este:

$$F = -k_1\Delta x_1 - (-k_2\Delta x_2) = -k_1\Delta x + k_2(-\Delta x) = -(k_1 + k_2)\Delta x = K'\Delta x,$$

unde $K' = k_1 + k_2$.

Cum frecvența unui oscilator de constantă elastică

$$K' \text{ este } \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K'}{m}}, \text{ rezultă } \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}.$$

Fenomenul bățăilor. Când pulsațiile sunt diferite, rezultă forme de oscilație care nu mai sunt armonice. Un caz particular îl reprezintă fenomenul bățăilor. Pentru a se produce, pulsațiile celor doi oscilatori trebuie să difere foarte puțin. Pentru simplitate să presupunem că oscilațiile au amplitudini egale. Atunci:

$$y = y_1 + y_2 = A \sin \omega_1 t + A \sin \omega_2 t = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right). \quad (7)$$

Dacă notăm: $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \Delta\omega$ și $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega$ se obține ecuația bățăilor:

$$y = 2A \cos \Delta\omega t \sin \omega t. \quad (8)$$

Factorul în cosinus variază foarte încet, din cauza diferenței $\Delta\omega$ mici a pulsațiilor. El descrie variația amplitudinii. Cel de-al doilea termen reprezintă termenul oscilator propriu-zis. Reprezentând variația în timp a elongației se observă că amplitudinea variază (fig. 4).

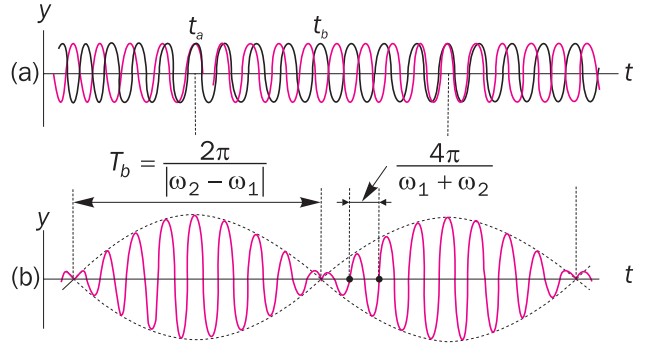


Fig. 4. Fenomenul bățăilor.

Se obține astfel o modulare în amplitudine, cu o „purtoare“ de pulsație $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ și o amplitudine „modulată“, de pulsație $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$. Frecvența oscilațiilor

rămâne constantă. Amplitudinea atinge valoarea maximă pentru $\cos \Delta\omega t = \pm 1$; când frecvența bățăilor este dată de expresia:

$$\nu_{\text{bătaii}} = |\nu_1 - \nu_2|, \quad (9)$$

iar perioada acestora (T_b) este:

$$T_b = \frac{1}{\nu_0} = \frac{T_1 T_2}{|T_1 - T_2|} = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}.$$

*Compunerea oscilațiilor perpendiculare

Pentru simplitate, să considerăm oscilatorul solicitat simultan după două direcții perpendiculare, după care va oscila potrivit ecuațiilor:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_1) \quad (1)$$

$$y = B \sin(\omega t + \varphi_2). \quad (2)$$

Stabilirea ecuației traiectoriei se obține eliminând timpul din cele două relații. Înmulțim cele două ecuații cu $\cos \varphi_2$, respectiv $\cos \varphi_1$.

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{A} &= \sin \omega t \cos \varphi_1 + \cos \omega t \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \\ \frac{y}{B} &= \sin \omega t \cos \varphi_2 + \cos \omega t \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1 \end{aligned} \right\}$$

Scăzând cele două ecuații rezultate, membru cu membru rezultă:

$$\frac{x}{A} \cos \varphi_2 - \frac{y}{B} \cos \varphi_1 = \cos \omega t \sin(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (3)$$

Înmulțim cele două ecuații inițiale cu $\sin \varphi_2$, respectiv cu $-\sin \varphi_1$ și adunăm ecuațiile rezultate.

Se obține:

$$\frac{x}{A} \sin \varphi_2 - \frac{y}{B} \sin \varphi_1 = -\sin \omega t \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (4)$$

Ridicăm la pătrat ecuațiile (3) și (4) și apoi le adunăm. Se obține:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{xy}{AB} \cos \Delta \varphi = \sin^2 \Delta \varphi, \quad (5)$$

unde $\Delta \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

Relația (5) reprezintă ecuația unei elipse înscrise într-un dreptunghi de laturi $2A$ și respectiv $2B$. Excentricitatea, direcția axelor elipsei și sensul de mișcare pe elipsă a punctului material supus mișcărilor oscilatorii depind de valoarea defazajului $\Delta \varphi$.

a) Dacă: $\Delta \varphi = 2k \frac{\pi}{2}$, unde $k = 0, 1, 2, \dots$, oscilația rezultantă are ca traiectorie o dreaptă (fig. 5a și e).

b) Dacă: $\Delta \varphi = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$, unde $k = 0, 1, 2 \dots$ traiectoria oscilației este o elipsă centrată (fig. 5c).

c) Dacă: $\Delta \varphi \in \left\{ \pm k \frac{\pi}{2} \pm (k \pm 1) \frac{\pi}{2} \right\}$, unde $k = 1, 2, 3, \dots$,

traiectoria oscilației este o elipsă oblică (fig. 5b, b', d, d').

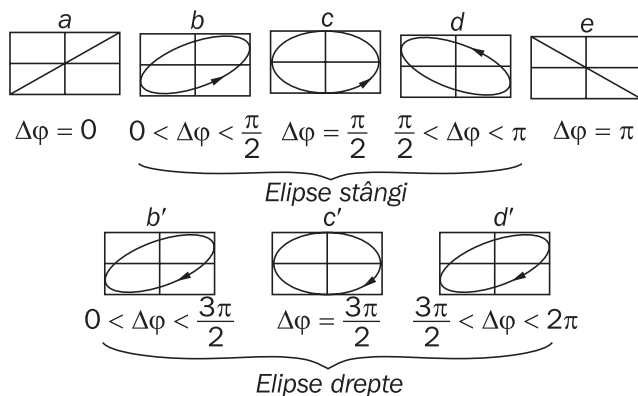


Fig. 5.

Observații:

- Când $0 < \Delta \varphi < \pi$, traiectoria este parcursă în sens antiorar (elipsă stângă).
- Când $\pi < \Delta \varphi < 2\pi$ traiectoria este parcursă în sens orar (elipsă dreaptă).
- Când $A = B = 2l$ elipsa devine un cerc, înscris într-un pătrat de latură $2l$.

Când frecvențele oscilațiilor perpendiculare nu sunt egale, atunci traiectoria punctului este mai complicată.

Se obțin așa numitele „figuri Lissajous”.

Aceste curbe pot fi închise sau deschise (fig. 6) după cum este sau nu îndeplinită condiția ca oscilatorul să treacă printr-un același punct P după un același interval de timp.

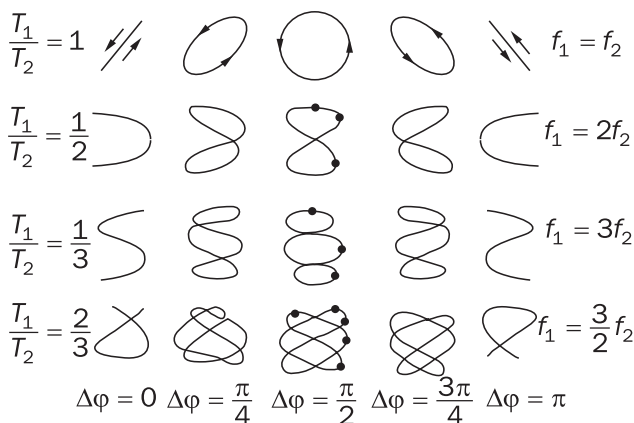


Fig. 6. Figuri Lissajous pentru suprapuneri de diferite frecvențe.

Figurile Lissajous sunt utilizate în măsurarea directă a frecvențelor oscilațiilor cu ajutorul oscilografului catodic (fig. 7).

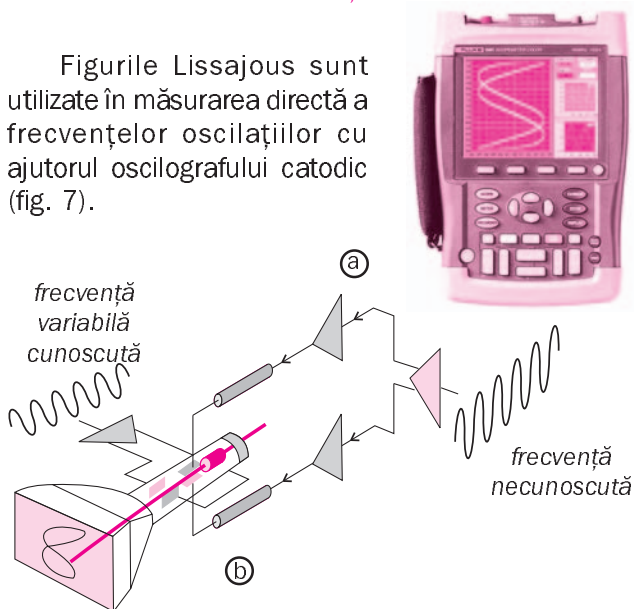
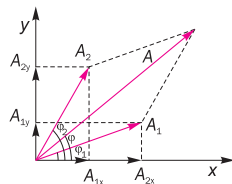


Fig. 7. Oscilograf catodic (a); schema de intrare a semnalelor (b).

Pentru aceasta se aplică pe o pereche de plăci de deflexie ale oscilografului o tensiune cu frecvența cunoscută, dar variabilă, iar pe cea de-a doua pereche de plăci tensiunea cu frecvență necunoscută. Se variază frecvența cunoscută până se obține una dintre figurile Lissajous închise (fig. 6). Din figura Lissajous astfel obținută se stabilește raportul frecvențelor celor două tensiuni. Acest raport este egal cu raportul numărului punctelor de contact ale figurii Lissajous cu o direcție orizontală, respectiv una verticală (fig. 6).

Rezumat

• Oscilațiile pot fi reprezentate prin fazori – vector rotitor de modul egal cu amplitudinea oscilației și orientare față de abscisă egală cu faza acestuia.



• Compunerea a două oscilații armonice paralele:

$y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ și $y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ este tot o oscilație $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ a cărei amplitudine este:

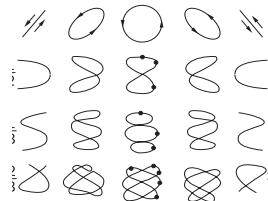
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \text{ iar faza:}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_2 \cos \varphi_1 + A_1 \cos \varphi_2}.$$

• În cazul a două oscilații perpendiculare de aceeași pulsație ω : $x = A \sin(\omega t + \varphi_1)$ și $y = B \sin(\omega t + \varphi_2)$ traiectoria mișcării este:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{xy}{AB} \cos \Delta \varphi = \sin^2 \Delta \varphi \text{ cu } \Delta \varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

• Când pulsațiile nu sunt egale se obțin traiectorii mai complicate (figurile Lissajous). Pe baza lor se stabilește una dintre frecvențe când cealaltă este cunoscută.

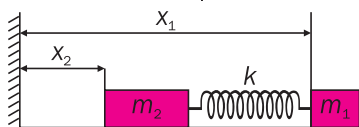


Verificați-vă cunoștințele

1. Un resort a cărui lungime nedeformată este l are constanta elastică k . Resortul este tăiat în două bucăți de lungimi nedeformate l_1 și l_2 , unde $l_1 = n l_2$ și n întreg. Care sunt constantele elastice k_1 și k_2 ale celor două resorturi exprimate în funcție de n și R ?

2. Două resorturi articulate între ele sunt legate de un corp de masă m . Dacă resorturile au constantele elastice k_1 și k_2 , arătați că frecvența oscilațiilor corpului de masă m este $v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}}$. Mișcarea corpului de masă m pe suprafața de sprijin este fără frecare.

3. Fie sistemul din figură format din corpurile de mase $m_1 = 1 \text{ kg}$ și $m_2 = 3 \text{ kg}$ și resortul de constantă elastică $k = 250 \text{ N/m}$. Mișcarea corpurilor este fără frecare.



- Care este frecvența de oscilație a sistemului?
- Care este raportul energiilor cinetice ale celor două corpuri?
- Arătați că energia cinetică a oscilatorului este dată de

$$E_c = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

4. Electronii unui osciloscop sunt deviați de două câmpuri electrice perpendiculare între ele astfel încât în fiecare moment t deplasarea este dată de:

$$x = A \cos \omega t \text{ și } y = A \cos(\omega t + \alpha).$$

Descrieți traiectoria electronilor și găsiți ecuația ei:

- dacă $\alpha = 0^\circ$;
- dacă $\alpha = 30^\circ$;
- dacă $\alpha = 90^\circ$.

5. Găsiți ecuația mișcării rezultate prin suprapunerea a două oscilații cu elongații paralele descrise de ecuațiile:

a) $y_1 = 6 \sin \omega t$ și $y_2 = 8 \cos \omega t$;

b) $y_1 = 5 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ și $y_2 = 7 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$.

6. Într-un punct P se suprapun trei oscilații armonice cu elongații paralele. Știind că în urma acestor suprapuneri punctul P rămâne în repaus și că două din oscilații sunt: $y_1 = 7,4 \sin(\omega t + 45^\circ)$ și $y_2 = 6 \sin(\omega t + 150^\circ)$. Găsiți expresia instantanee a celei de-a treia elongații.

7. Găsiți traiectoria mișcării unui corp care efectuează simultan oscilațiile:
 $x = 2 \sin(2\pi t + 30^\circ)$ (cm) și $y = 2 \sin(2\pi t + 90^\circ)$ (cm).

8. Considerăm două oscilații perpendiculare:
 $x = A_x \cos(\omega_x t + \varphi_1)$ și $y = A_y \cos(\omega_y t + \varphi_2)$, care se compun.

a) Dacă ω_x / ω_y este un număr rațional curba este închisă și mișcarea se repetă la intervale regulate de timp. Pentru $A_x = A_y$ și $\varphi_1 = \varphi_2$ desenați curba Lissajous obținută pentru $\omega_x / \omega_y = 1/2$; $1/3$ și $2/3$.

b) Arătați că forma curbei Lissajous depinde de diferența de fază $\varphi_1 - \varphi_2$.

c) Trasați curbele pentru $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$; $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ (rad).

9. Două oscilații, cu frecvențe de 70 Hz și respectiv 65 Hz, având amplitudinile de 0,04 m, produc fenomenul de bătăi.

Să se determine:

- legea de mișcare a oscilației compuse;
- frecvența bătăilor;
- momentele în care amplitudinea devine maximă.

În lecțiile anterioare s-a arătat că un sistem mecanic (resort elastic, pendul gravitațional etc.) scos din poziția de echilibru poate, în anumite condiții, oscila. Dacă după momentul inițial, oscilatorul nu mai este influențat de cauza care a provocat oscilația spunem că aceasta este liberă. Oscilatorii reali sunt influențați în decursul mișcării de forțe de interacțiune cu mediul extern (forțe de frecare), care determină în timp amortizarea acestora.

În cazul în care forțele de frecare din sistemul oscilant și dintre acesta și mediu, pot fi neglijate pe un interval scurt de timp, oscilațiile pot fi privite ca neamortizate, oscilatorul putând fi aproximat cu unul ideal.

Din punct de vedere energetic s-a constatat, în studiul oscilațiilor amortizate, că în fiecare perioadă, oscilatorul, ca urmare a interacțiunilor cu mediul, cedează o parte din energia sa mecanică. Pentru ca oscilația să fie *întreținută*, oscilatorul trebuie să primească, în același interval de timp, o energie echivalentă celei disipate. Dacă energia primită este mai mare, fiecare nouă oscilație va crește energia oscilatorului producând **oscilații forțate**.

Forțele externe care acționează asupra unui oscilator pot determina:

a) reducerea amplitudinii mișcării - este cazul forțelor de frecare (fig. 1a);

b) creșterea amplitudinii oscilatorului (fig. 1b) sau menținerea constantă a amplitudinii oscilației (fig. 1c).

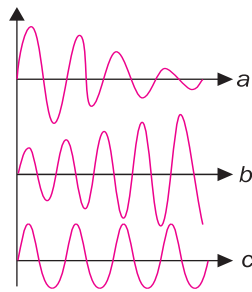


Fig. 1. Oscilații amortizate (a); forțate (b) și întreținute (c).

Creșterea energiei mecanice a unui oscilator se poate realiza prin aplicarea din exterior a unei forțe.

Dacă forța externă care acționează asupra oscilatorului este una constantă aceasta determină deplasarea oscilatorului cu o anumită amplitudine în afara poziției de echilibru, dar nu va fi în măsură să permită reproducerea constantă a oscilației. Pentru ca oscilația să aibă loc trebuie ca acțiunea forței externe aplicate să fie de scurtă durată și ritmică, aplicată în momentele în care aceasta determină creșterea amplitudinii și nicidecum în momentele în care ar duce la o scădere și mai rapidă a acestora.

Deci, pentru întreținerea oscilațiilor sau producerea oscilațiilor forțate este importantă nu numai aplicarea ritmică a forței externe, ci și momentul acestei acțiuni.

Un grafic al variației acestei forțe în timp ar putea arăta ca în fig 2b. S-a arătat însă că pentru obținerea acestor efecte este mult mai simplu de aplicat oscilatorului o forță externă de formă sinusoidală.

$$F = F_0 \sin \omega t$$

Pentru a determina care sunt proprietățile acestei forțe, amplitudinea și pulsația oscilațiilor forțate, realizați următorul experiment.

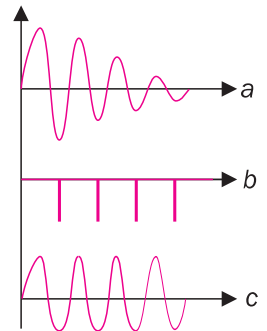


Fig. 2. Aplicarea ritmică a unei forțe (b) care să cedeze sistemului oscilator o energie echivalentă celei pierdute prin frecare (a), determină producerea oscilațiilor întreținute (c).

Laborator

Studiul oscilațiilor armonice forțate

Materiale necesare:

- doi oscilatori identici cu frecvența naturală ν_0
- sistem de producere a oscilațiilor forțate (fig. 3)
- sistem de înregistrare a oscilogramelor oscilatorului.

• Doi oscilatori identici, identic amortizați având frecvența de oscilație $\nu_0 = 1$ Hz, sunt inițial în repaus. O forță externă oscilantă de tipul:

$$F = F_0 \sin(2\pi \nu_1 t)$$

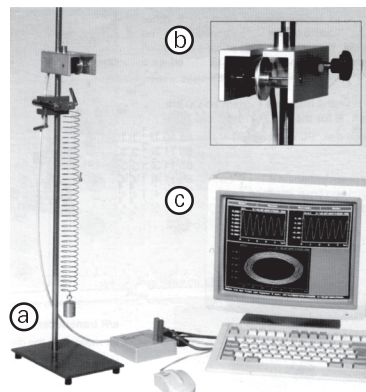


Fig. 3. Dispozitiv de studiu al oscilațiilor întreținute; oscilator elastic (a), sistem de întreținere a oscilațiilor (b), sistem de afișare computerizată a oscilogramelor (c).

este aplicată fiecăruia dintre oscilatori în același moment $t = 0$. F_0 este amplitudinea forței incidente, iar ν_1 frecvența forței externe aplicate.

- Variem frecvența ν_1 a forței aplicate.
- Se înregistrează oscilogramele oscilatorilor. Peste acestea se suprapun diagramele forțelor care acționează asupra celor doi oscilatori (fig. 4 a, b).

Observații:

- Oscilatorul „1” (fig. 4a). După depășirea fazei tranzitorii a mișcării și stabilirea stării staționare, deplasarea este în fază cu forța exterioară aplicată.
- Oscilatorul „2” (fig. 4b). Amplitudinea oscilatorului crește rapid la o valoare maximă. După depășirea fazei tranzitorii oscilația atinge un regim staționar. Oscilația este defazată cu 90° față de forța aplicată.

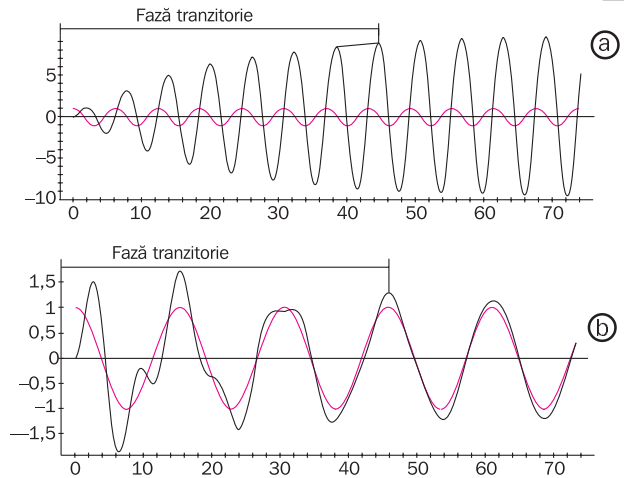


Fig. 4. Oscilogramele mișcărilor oscilatorii forțate determinate asupra unor oscilatori cu frecvența proprie $\nu_0 = 1$ Hz, de către forțe oscilatorii de tipul $F = F_0 \sin(2\pi\nu t)$ având frecvențele $\nu_{01} = 0,4$ Hz (a), și respectiv $\nu_{02} = 1,01$ Hz (b). În fiecare caz în parte s-a suprapus diagrama forței excitatoare. Curba neagră indică forța aplicată, iar cea color, răspunsul oscilatorului.

Concluzii:

Aplicarea unei forțe exterioare de tip periodic determină producerea oscilațiilor forțate. Frecvența oscilatorului este determinată nu de frecvența proprie a acestuia, ci de cea a forței externe aplicate.

Faza staționară se realizează după o scurtă perioadă de tranziție în care se produce „acordarea” celor două frecvențe.

Rezumat

- Oscilația oscilatorilor reali, ca urmare a interacțiunilor cu mediul, sunt amortizate.
- Pentru a întreține oscilația sau a-i mări amplitudinea trebuie suplimentată periodic energia pierdută de oscilator. Aceasta va permite realizarea oscilațiilor întreținute dacă amplitudinea rămâne constantă sau

forțate dacă amplitudinea crește.

- Dacă se aplică o forță externă excitatoare de tip sinusoidal ($F = F_0 \sin(2\pi\nu t)$), după o scurtă perioadă tranzitorie se ajunge la o fază staționară. În această fază frecvența stării staționare a oscilației este dată de frecvența forței și nu de frecvența naturală a oscilatorului.



Verificați-vă cunoștințele

1. Completați textul lacunar.

Dacă forțele de frecare dintre oscilator și mediu pot fi neglijate oscilațiile sunt Dacă energia primită de oscilator este mai mare decât cea pierdută, oscilațiile vor fi, iar dacă energia totală a oscilatorului va rămâne constantă, oscilațiile sunt Forța exterioară în acest caz trebuie să fie aplicată astfel încât să nu determine mai rapidă a oscilației.

2. Referitor la forța externă aplicată unui oscilator, precizați care dintre afirmațiile enunțate mai jos sunt corecte:

- Au totdeauna rolul de întreținere a mișcării oscilatorii.
- Poate fi aplicată oricând în timpul mișcării.
- Este constantă în modul.

d) Imprimă frecvența oscilatorului.

3. Știind că timp de 8 min amplitudinea oscilațiilor amortizate s-a micșorat de 3 ori, determinați coeficientul de amortizare.

4. Dacă amplitudinea unei oscilații este de 32% față de valoarea sa inițială în t_0 care este constanta de timp a amortizării.

5. Trasați graficul poziție-timp a unui oscilator ce efectuează oscilații amortizate de la 0 la 10 s, dacă frecvența oscilatorului este de 1,5 Hz, iar constanta de timp este de 3 s.

În lecția anterioară s-a arătat că răspunsul unui oscilator aflat într-o oscilație staționară, ține seamă de frecvența forței externe aplicate și nu de propria sa frecvență. Să urmărim ce se întâmplă cu amplitudinea oscilatorului într-un proces de transfer de energie, sau altfel spus, de cine depinde amplitudinea oscilatorului. Dacă forța externă (forța excitatoare) aplicată oscilatorului

este o forță sinusoidală de tipul $F = F_0 \sin 2\pi vt$ are sens să urmărim dependența amplitudinii oscilatorului de amplitudinea forței excitatoare (F_0) și de frecvența acesteia (v), dar și de proprietățile mediului în care are loc oscilația. Ne aducem aminte din studiul oscilatorului amortizat de impactul mediului asupra amortizării oscilației.

Laborator

Materiale necesare:

- oscilator elastic (pendul gravitațional în condiții de izolare);
- sistem de producere a oscilațiilor forțate;
- sistem de înregistrare.

În experiment se poate utiliza fie un oscilator elastic (fig. 3 pag. 28), fie un pendul gravitațional aflat în condiții de izocronism (fig. 1). În ambele cazuri excitatorul utilizat trebuie să permită modificarea frecvenței forței externe cu care acționează asupra oscilatorului.

În experiment se urmărește dependența amplitudinii oscilatorului de:

- a. amplitudinea forței excitatoare (F_0);
- b. frecvența forței excitatoare (v_{ex});
- c. proprietățile mediului în care are loc oscilația.

De fiecare dată doi dintre parametrii sunt menținuți constanți și se variază cel de-al treilea. Se înregistrează amplitudinea oscilației.

1. Dependența amplitudinii oscilatorului de amplitudinea forței excitatoare (F_0)

- Pentru aceeași frecvență a forței de excitație se mărește progresiv amplitudinea acesteia.

Observații:

Experimentul 1. Amplitudinea oscilațiilor forțate crește odată cu creșterea amplitudinii (F_0) a forței excitatoare. Înțelegerea acestui rezultat este facilă dacă ne aducem aminte că, atunci când vrem să dăm pe cineva în balansoar, pentru a mări amplitudinea acestuia trebuie să acționăm cu o forță mai mare.

Experimentul 2. Experimentul poate fi urmărit și în succesiunea de imagini din fig. 2, în care s-a realizat un cuplaj între trei pendule gravitaționale. Două dintre acestea (1 și 2) sunt de lungimi apropiate, iar cel de-al treilea diferit (3).

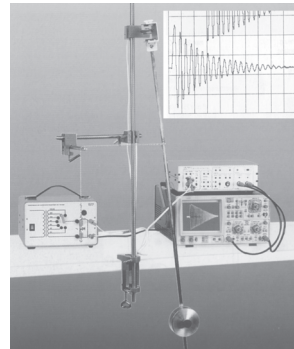


Fig. 1.
Dispozitiv de studiu al oscilațiilor întreținute: oscilator elastic.

2. Dependența amplitudinii oscilatorului de frecvența forței excitatoare (v_{ex})

- Pentru aceeași amplitudine a forței de excitație se mărește progresiv frecvența acesteia înregistrându-se amplitudinea oscilatorului.
- Se ridică curba amplitudine-frecvență.

3. Dependența amplitudinii oscilatorului de mediul în care se produce oscilația

- Comportarea oscilatorului în medii diferite poate fi urmărită în aer și prin scufundarea oscilatorului în lichide de diferite densități (apă, petrol, etc).
- În fiecare caz în parte se variază frecvența forței excitatoare și se măsoară amplitudinea oscilațiilor oscilatorului.
- Se ridică curbele amplitudine-frecvență în fiecare caz în parte.

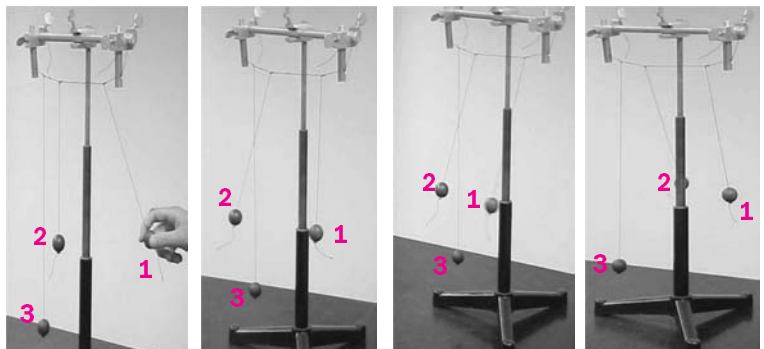


Fig. 2.

Se observă că, punând în oscilație unul dintre pendulele scurte (1) cel care începe să oscileze este pendulul cu aceeași lungime (2). Vibrațiile celuilalt pendul (3) sunt abia perceptibile. Dacă ținem cont că lungimea pendulului influențează frecvența acestuia potrivit

relației: $v_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$, se poate trage concluzia că amplitudinea oscilațiilor forțate este cu atât mai mare cu cât frecvența forței excitatoare este mai apropiată de frecvența naturală a oscilatorului. Transferul de energie către oscilator este în acest caz, mai eficient.

Fenomenul observat poartă numele de **rezonanță**. Când frecvența forței aplicate și a oscilatorului sunt egale, rezultatul este o rezonanță perfectă. Mărirea amplitudinii oscilatorului înseamnă o creștere a energiei acestuia. Se poate spune că la rezonanță transferul de energie de la excitator (pendulul 1) la rezonator (pendulul 2) este maxim. Deci: *transferul maxim de energie are loc la o anumită frecvență, numită frecvență de rezonanță și este un proces selectiv.*

Dacă se realizează o variație continuă a frecvenței forței excitatoare și se înregistrează amplitudinea oscilatorului (cerința experimentului 2) se obține o dependență de tipul celei din figura 3, care poartă numele de **curbă de rezonanță**. Maximul acestei curbe indică frecvența la care se produce fenomenul de rezonanță.

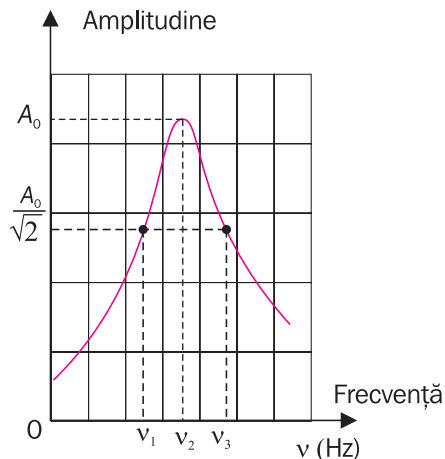


Fig. 3. Curbă de rezonanță

Experimentul 3. Rezultatele experimentale sunt reprezentate grafic în fig. 4 unde pe abscisă este dată frecvența oscilatorului, iar pe ordonată amplitudinea (în cazul pendulului gravitațional poate fi dată amplitudinea unghiulară a acestuia). Cele trei curbe corespund unor medii de densități diferite (cu coeficienți de amortizare din ce în ce mai mari).

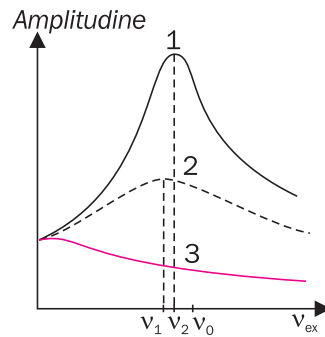


Fig. 4. Frecvența de rezonanță scade cu creșterea amortizării.

Din curbele de rezonanță din figura 4 rezultă că la rezonanță:

- În cazul în care amortizarea este slabă, frecvența excitatorului ν_{ex} este aproape egală cu frecvența naturală (ν_0) a oscilatorului (curba 1).
- Dacă amortizarea crește (deci cresc schimburile energetice cu mediul), amplitudinea oscilațiilor se diminuează, frecvența de rezonanță scade, iar rezonanța are loc pe un palier mai larg (curba 2).
- Dacă amortizarea este foarte mare nu se mai produce rezonanță (curba 3). Acest rezultat experimental poate fi confirmat teoretic. Să considerăm cazul simplu al unui oscilator elastic orizontal aflat într-un mediu de rezistență neglijabilă ($\beta = 0$). În acest caz asupra oscilatorului de masă m acționează două forțe, forța elastică și forța periodică de excitație. Din legea a II-a a dinamicii

$$m\vec{a} = \vec{F}_{ex} + \vec{F}_{el},$$

ținând cont că accelerația oscilatorului este $a = -\omega^2 x$, iar constanta de elasticitate este $k = -m\omega_0^2$ se obține:

$$F_0 \sin \omega t - kx = -m\omega^2 x.$$

Rezultă că elongația oscilațiilor forțate este dată de:

$$x = \frac{F_0}{k - m\omega^2} \sin \omega t = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega t.$$

Amplitudinea oscilațiilor forțate este:

$$A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Deci amplitudinea oscilațiilor forțate este dependentă de amplitudinea forței excitatoare (F_0), de pulsația acesteia (ω), de masa m și de frecvența proprie (ω_0) a oscilatorului. Potrivit ultimei relații rezultă că, dacă $\omega = \omega_0$, amplitudinea crește la infinit. Acest lucru nu se întâmplă în realitate datorită amortizării care determină o valoare finită a amplitudinii.

Un răspuns puternic la rezonanță, potrivit fig. 3, nu se produce doar la atingerea valorii maxime a acesteia. După cum apare și în grafic, rezonanța nu scade imediat la zero de o parte sau alta a frecvenței de

rezonanță. Din această cauză este descrisă de obicei o „bandă de rezonanță” în care fenomenul este semnificativ. Această bandă reprezintă domeniul de frecvență Δv , în jurul frecvenței de rezonanță în care amplitudinea

oscilației este mai mare ca $\frac{A_0}{\sqrt{2}}$ (fig. 3). Pentru caracterizarea formei curbei de rezonanță se introduce o mărime numită factor de calitate (Q).

Grosimea benzii de rezonanță (Δv) este dată de raportul dintre frecvența de rezonanță (v_{rez}) a oscilatorului și factorul de calitate (Q).

$$\Delta v = v_{rez}/Q.$$

Dicționar

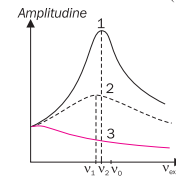
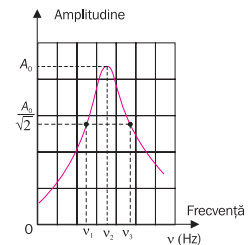
Factor de calitate (Q): Mărime caracteristică rezonanței unui sistem oscilant. Poate fi definită ca raportul dintre frecvența de rezonanță v_{rez} și lățimea benzii de rezonanță la o amplitudine a oscilației egală cu $\frac{A}{\sqrt{2}}$, unde A este amplitudinea la rezonanță.

$$Q = \frac{v_{rez}}{\Delta v}$$

Relația anterioară este doar o bună aproximare în situația unei valori mari a lui Q .

Rezumat

- Fiecare corp are o frecvență proprie de vibrație numită frecvență naturală. Aceasta depinde de caracteristicile sale fizice și de materialul din care este confecționat.
- Amplitudinea oscilațiilor forțate depinde de amplitudinea forței excitatoare și de frecvența acesteia.
- Rezonanța reprezintă o creștere a amplitudinii de oscilație a unui sistem fizic și are loc atunci când frecvența forței excitatoare aplicate oscilatorului este apropiată de frecvența naturală a acestuia.
- Rezonanța depinde de proprietățile mediului. Dacă amortizarea este slabă, frecvența excitatorului v_{ex} este aproape egală cu frecvența naturală v_0 a oscilatorului. Dacă amortizarea crește, amplitudinea oscilațiilor se diminuează, frecvența de rezonanță scade, iar rezonanța are loc pe un palier mai larg. Dacă amortizarea este foarte mare nu se mai produce rezonanță.



Verificați-vă cunoștințele

1. Cum depinde amplitudinea oscilatorului de:

- amplitudinea forței exterioare?
- frecvența forței exterioare?
- proprietățile mediului?

2. Completați textul lacunar.

Amplitudinea forței excitatoare este cu atât mai mare cu cât frecvența acestuia este mai de ... naturală a oscilatorului. Transferul de energie către oscilator este maxim la Dacă amortizarea crește frecvența de rezonanță Amplitudinea oscilațiilor forțate depinde de forței de pulsația acesteia, de masa și a oscilatorului. Factorul reprezintă intervalul de frecvență la benzii de rezonanță.

3. Asupra unui corp cu masa $m = 2\text{g}$ aflat în oscilație, cu o frecvență proprie de 20 Hz, acționează o forță de excitație $F_{ex} = 20\sin 5\pi t$ (N). Care va fi amplitudinea oscilațiilor forțate?

4. Determinați amplitudinea forței de oscilație care, acționând asupra unui oscilator de masă $m = 200\text{g}$, determină o amplitudine de 10 cm. Diferența dintre pătratele frecvențelor proprii a oscilatorului și a pătratului frecvenței forței este de 500Hz^2 .

5. Determinați factorul de calitate în cazul unui oscilator mecanic forțat a cărui frecvență de rezonanță este de 700 Hz dacă lățimea benzii de frecvență este de 50 Hz.

Poate că adesea ați auzit pe cineva spunând, referindu-se la propriile sale idei că acestea sunt „în rezonanță” cu ale altcuiva. Alteori poate ați folosit expresia „a fi pe fază” sau „sunt defazați” ultima cu referire directă la relațiile dintre două persoane. Sunt expresii provenite din fizica oscilațiilor și intrate în limbajul uzual. Nu acestea sunt însă principalele beneficii ale cunoașterii fenomenelor oscilatorii, a amortizării, a oscilațiilor forțate sau a rezonanței.

Pentru compensarea amortizării oscilațiilor produse de forțele de frecare, se poate furniza oscilatorului energie. Balansierul unui ceasornic este un oscilator întreținut de căderea progresivă a unei greutatei (fig. 1). Oscilația acestuia pune în mișcare roata de clichet care, la rândul ei, printr-un sistem de roți dințate pune în mișcare acele ceasornicului.

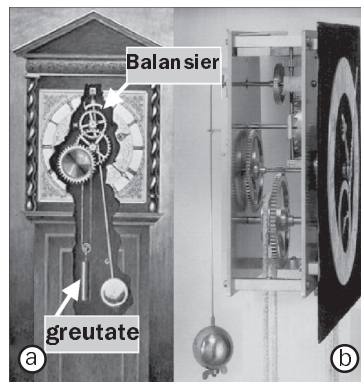


Fig. 1. Energia potențială gravitațională dată de căderea unei greutăți este utilizată încă din secolul al XVII-lea ca sursă de energie pentru funcționarea ceasornicilor. Mecanismul unui ceas cu pendul: față (a) și profil (b).

O serie importantă de beneficii ale oscilațiilor sunt utilizate în proiectarea și utilizarea instrumentelor muzicale. O notă muzicală suficient de tare, produsă în apropierea unui pian face să vibreze coardele notei respective (trei coarde pe fiecare clapă). De ce nu se produce fenomenul și la vioară? Dacă ați auzit o vioară cântând un „pizzicato” ați observat probabil că sunetul notelor sale se stinge rapid. Se spune că factorul de calitate (Q) al vioarei este mult mai mic decât cel al pianului. Rezonanțele sale vor avea din această cauză amplitudini mult mai mici.

Atenuarea unui sunet muzical este una dintre caracteristicile acestuia. Un bun instrument va avea un factor de calitate potrivit instrumentului respectiv. La chitară, de exemplu, Q este cuprins între 1000 și 10000. Un sintetizator de proastă calitate va tăia brusc sunetul când clapa respectivă este eliberată. Din contră, boxele stereo nu trebuie să reverbereze după oprirea sunetului. Calitatea acestora este cu atât mai bună cu cât redau mai bine sunetul (nu-l modifică), deci când Q este mic ($Q = 1$).

Procesul de amortizare are loc în majoritatea sistemelor fizice. Sunetul este amortizat în aer, lumina este absorbită la trecerea prin apă, corzile unei chitare nu vibrează la nesfârșit. Dacă într-o coardă de chitară este de dorit ca amortizarea să fie cât mai mică pentru a produce sunetele caracteristice instrumentului, în cazul sistemului de suspensie al unui automobil, este important pentru confortul pasagerilor ca amortizarea să fie cât mai rapidă. În acest fel, când automobilul trece peste o denivelare el nu va oscila la nesfârșit. Sistemul de amortizare, în acest caz, trebuie să fie în regim critic sau în apropierea acestuia. Nici o amortizare aperiodică nu este utilă în acest caz deoarece, dacă automobilul întâlnește două denivelări successive, iar prima denivelare cauzează comprimarea la limită a amortizorului, șocul imediat al celei de-a doua nu ar mai putea fi absorbit.

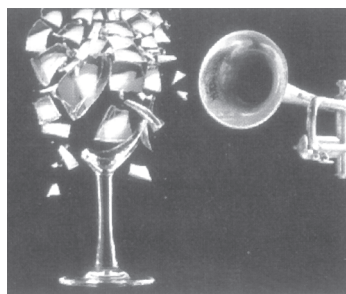


Fig. 2. Un semnal cu frecvența egală cu frecvența de rezonanță a unui pahar poate produce spargerea acestuia.

Exemple ale efectelor rezonanței sunt numeroase. O anumită notă produsă de un instrument de suflat, prelungit suficient, poate sparge un pahar de cristal, dacă atinge frecvențele naturale de vibrație ale acestuia. De acest fenomen trebuie să se țină seama și în construcții.

Iată câteva exemple faimoase de oscilații forțate și de producere a rezonanței. Tacoma Narrows Bridge, un pod dat în folosință în SUA în iulie 1940, s-a prăbușit pe 7 noiembrie al aceluiași an (fig. 3a, b). Un vânt, nu mai puternic de 70 km/h, a cauzat oscilații podului pe frecvența sa naturală. Aceasta a dus la creșterea amplitudinii atât de mult încât podul s-a rupt. Cauza precisă a prăbușirii este controversată, dar fenomenul de rezonanță a jucat un rol principal. Căderea podului a implicat două mecanisme. Inițial, vibrațiile relativ slabe au făcut ca acesta să se comporte ca aripa unui avion. Vântul care bătea peste pod a determinat apariția unor vârtejuri care la rândul lor au produs o variație a presiunii. Aceasta a dus la apariția unei forțe verticale, determinând o oscilație în plan vertical. Cu cât creștea viteza vântului, cu atât creștea frecvența acestei vibrații, pro-

ducând fenomenul de rezonanță. În momentul atingerii vibrațiilor naturale ale podului (0,2 Hz) rezonanța a devenit maximă determinând ruperea (fig. 3b).

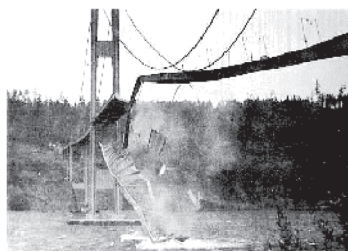


Fig.3.
Prăbușirea podului
Tacoma Narrows
Bridge, SUA, 7
noiembrie 1940.

Ruperea unei secțiuni din autostrada Nimitz – Oakland, SUA, în 1989 în timpul unui cutremur, este un alt exemplu datorat producerii rezonanței. Un cutremur produce multe frecvențe de vibrație scăzute care au loc simultan. Frecvențele care le auzim în timpul cutremurului nu sunt cele mai puternice. Majoritatea energiei este disipată în vibrații cuprinse între 1 și 10 Hz, sub pragul sonor al urechii umane. Construcțiile sunt așezate pe straturi de deșeuri, nămol, nisip sau rocă. Cutremurul va pune în vibrație fundația construcției similar modului în care vibrează un jeleu sau piftia pe o farfurie când o zgâlțâim. Porțiunea ruptă a autostrăzii

era construită pe un strat nămolos cu o frecvență de rezonanță de 2,5 Hz, cu o bandă de rezonanță cuprinsă între 1 și 4 Hz. Cutremurul, cu amestecul său de frecvențe a făcut ca stratul de nămol să răspundă masiv frecvenței de 2,5 Hz. Analiza păturii asfaltice a arătat că frecvența acesteia era tot de 2,5 Hz ceea ce a făcut-o să intre în rezonanță cu nămolul și să se rupă (fig. 4).



Fig. 4.
Porțiune ruptă a
autostrăzii Nimitz
– Oakland, SUA,
după un cutremur
din 1989.

Și în cazul clădirilor înalte se pune problema evitării rezonanței. Una dintre cauzele posibile poate fi vântul (fig. 5).

Fig. 5. Vibrație verticală.
Este modelul de vibrație al
construcțiilor înalte. Dacă
frecvența naturală a materialelor
din care este confecționată
clădirea este atinsă de excitatorul
extern rezultatul poate fi
distrugerea construcției.



Ca urmare a unor astfel de exemple s-a ajuns astăzi ca problema rezonanței să fie una prioritară în proiectarea construcțiilor de poduri, șosele sau zgârie-nori.

Rezumat

- Cunoașterea comportării corpurilor la oscilații, amortizarea sau amplificarea acestora are numeroase aplicații în tehnică, artă muzicală sau construcții.
- Fenomenul de rezonanță are un impact major în

proiectarea construcțiilor în scopul evitării producerii acestora prin inducerea unor vibrații de frecvență egală cu frecvența naturală de vibrație a acestora de către vânturi, cutremure sau alte fenomene.



Verificați-vă cunoștințele

1. Descrieți mecanismul de întreținere al oscilațiilor unui ceasornic mecanic.
2. De cine depinde durata sunetului unui instrument muzical? Cum influențează mărimea respectivă proprietățile instrumentului muzical?
3. Descrieți ce proprietăți trebuie să aibă sistemul de suspensie al unui automobil și de ce?
4. Ce influență are fenomenul de rezonanță asupra construcțiilor?
5. Realizați un referat cu tema „Rezonanța în construcții – măsuri de securitate”.

Undele sunt prezente pretutindeni în jurul nostru. Undele sonore: seismice, electromagnetice (precum lumina, undele radio sau TV, razele X), undele produse la suprafața unui lichid și încă altele, atât de diferite între ele, pot fi înțelese din punctul de vedere al comportării lor făcând apel la un model conceptual numit, „modelul undei”. Similar modelului punctului material cu care ați putut studia deplasarea unui corp indiferent de tipul acestuia, tot așa „modelul undei” permite descrierea generală a unei unde, a comportării sale în mediu, indiferent de tipul său. Modelul este constituit pe ideea propagării cu viteză constantă a unei perturbații.

Pentru a discuta însă principalele caracteristici selectate pentru descrierea „modelului undă” este necesară, încă de la început, o distincție clară între diferitele tipuri de unde:

- *undele mecanice* – necesită existența unui mediu de propagare (apă, aer, sol etc.);
- *undele electromagnetice* – nu necesită un mediu de propagare, putându-se propaga chiar și în vid;
- *undele materiale* – reprezintă fundamentul fizicii cuantice, sunt comportări ondulatorii ale unor particule din atom, precum electronul.

În acest capitol ne vom ocupa doar de undele mecanice.

O picătură de apă cade într-un lac liniștit (fig. 1). Pe suprafața apei apar cercuri concentrice. Dacă pe această apă punem o bărcuță de hârtie, vom constata că ea va sălta pe valurile formate, fără însă a înainta într-o direcție sau alta. De aici rezultă și concluzia că, deși valul (perturbația) se deplasează dintr-un loc în altul, apa (mediul) rămâne pe loc. Când privim un val de apă, ceea ce vedem este de fapt doar o rearanjare a suprafeței acesteia. Impulsul inițial crează perturbația care se propagă, în timp ce forța gravitațională determină rearanjarea suprafeței.



Fig. 1. Producerea undelor la suprafața unui lichid.

Potrivit exemplului anterior, existența unei unde mecanice necesită:

- o sursă de perturbație;
- un mediu ce poate fi perturbat;
- conexiuni fizice prin intermediul cărora porțiuni adiacente ale mediului să se poată influența.

Propagarea undelor se poate produce în orice mediu (fig. 2).

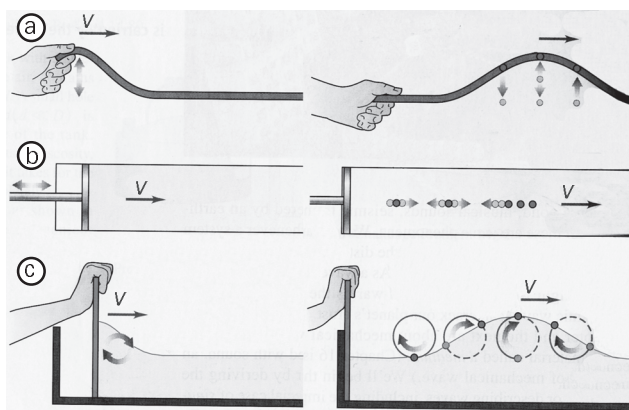


Fig. 2. Propagarea undelor în mediu: solid - dată de deplasarea laterală a corzii elastice (a); gazos - dată de deplasarea pistonului într-un corp de pompă ce conține un gaz (b), lichid - dată de deplasarea laterală a unei plăci (c).

În toate cele trei cazuri producerea perturbației într-un punct al mediului determină propagarea acesteia. În primul caz, secțiuni succesive de coardă se deplasează perpendicular pe poziția de echilibru urmărind mișcarea porțiunii inițiale și revenind la aceasta prin acțiunea forțelor de tensiune din coardă. În cel de-al doilea caz, gazul suferă comprimări și rarefieri succesive determinate de deplasarea pistonului, iar perturbația produsă este propagată de ciocnirile elastice ale particulelor constitutive. În cel de-al treilea caz, la suprafața apei, particulele au o mișcare mai complicată.

După modul în care mișcările particulelor mediului de propagare sunt corelate cu direcția de propagare a perturbației, undele pot fi clasificate în:

- unde transversale* – particulele se deplasează perpendicular pe direcția de propagare a undei (fig. 2a).
- unde longitudinale* – particulele se deplasează paralel cu direcția de mișcare a undei (fig. 2b).

Cazul al treilea prezentat, o undă de la suprafața unui lichid, este de fapt o suprapunere a mișcării longitudinale și a celei transversale. Particulele descriu în

acest caz traiectorii circulare sau eliptice. În partea superioară a traiectoriei, particula se deplasează în sensul de propagare al undei, în partea sa inferioară deplasarea este în sens invers acesteia. Mișcarea este una de suprafață, intensitatea mișcării scăzând rapid cu adâncimea (fig. 3).

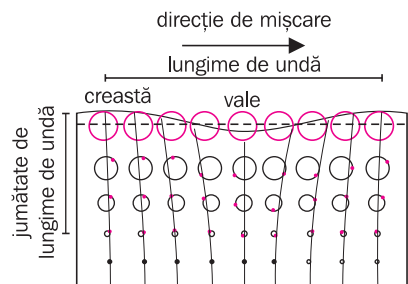


Fig. 3. Undă superficială într-un mediu lichid. Este un exemplu de suprapunere a unei mișcări longitudinale cu una transversală a particulelor mediului.

Atât undele transversale, cât și cele longitudinale pot fi reprezentate grafic prin imaginea, deja familiară, a unei sinusoidale. De exemplu, pentru o undă transversală (fig. 4a), curba (1) ar putea reprezenta unda la un moment t_0 , în timp ce curba (2) ar reprezenta-o la un moment ulterior ($t > t_0$). Punctul A ar fi creștea undei, în timp ce punctul B ar corespunde punctului cel mai de jos al acesteia. În cazul undei longitudinale (b), în curba (1) a aceluiași grafic, maximele ar putea reprezenta o densitate mare de spire pe unitatea lungime, iar minimele – o densitate mică. În altă reprezentare, curba (2), ar putea fi interpretată ca deplasări ale spirelor față de poziția proprie de echilibru. Și aici apar maxime și minime.

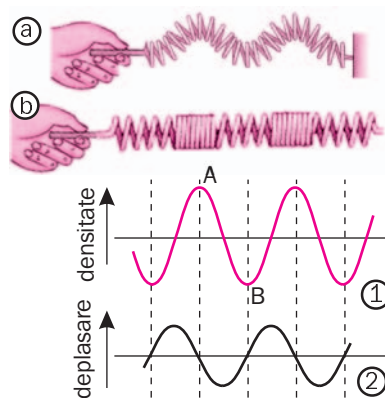


Fig. 4. Undă transversală (a) și longitudinală (b) și reprezentări sinusoidale ale acestora (1, 2). Pe ordonată pot fi reprezentate fie densitatea de particule, fie deplasarea acestora, fie distanța unui element de volum în raport cu poziția de echilibru.

Producerea undelor transversale implică posibilitatea deplasării straturilor de mediu paralel unul față de altul. O dată cu această deplasare apar forțe elastice care tind să readucă stratul deplasat în poziția de echilibru. Lichidele și gazele, de exemplu, sunt medii în care undele transversale nu se propagă – cazul formării valurilor de la suprafața lichidului nu este inclus, modul lor de formare fiind complicat de mișcările particulelor pe traiectorii închise, circulare sau eliptice. Undele transver-

sale apar în medii solide (fig. 5a). Oscilatorul elastic pune în oscilație coarda, determinând o mișcare periodică. Similar, în cazul undei longitudinale produsă într-un fluid prin variații locale ale presiunii, proprietățile elastice ale mediului permit propagarea perturbației, în imediata vecinătate a pistonului tubului (fig. 5b). Săgeata indică, în ambele cazuri, propagarea oscilației.

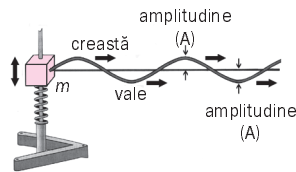
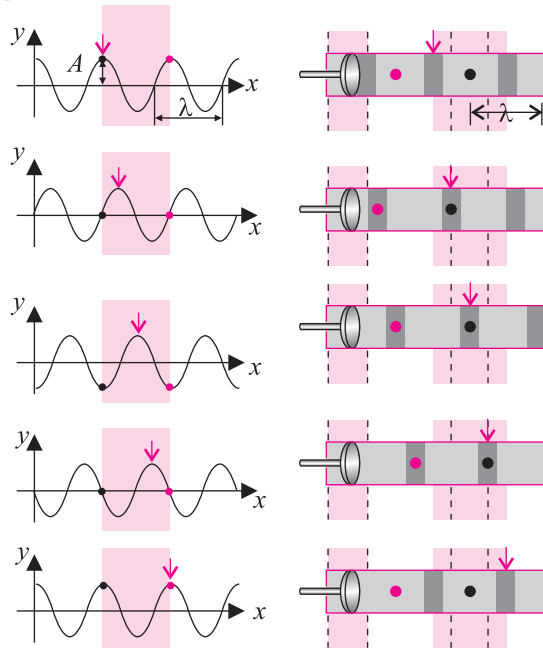


Fig. 5. Propagarea undelor transversale și longitudinale.



În cazul undei transversale produse în coarda vibrantă, forța rezultantă (\vec{F}), care acționează asupra fiecărui element de volum al acesteia este datorată compunerii tensiunilor care apar între elementele de volum învecinate (fig. 6).

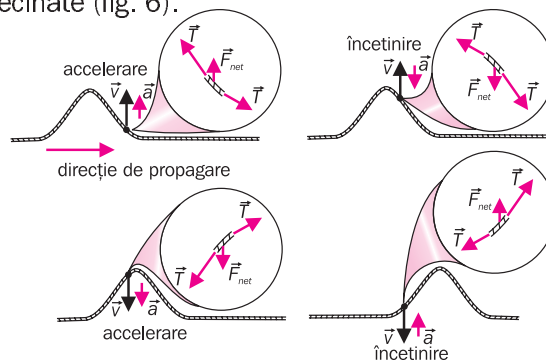


Fig. 6. Forța rezultantă a tensiunilor din coarda vibrantă. Orientarea este datorată curburilor coardei. Rezultatul este accelerarea sau încetinirea mișcării porțiunii de coardă pe direcția transversală direcției de propagare a undei.

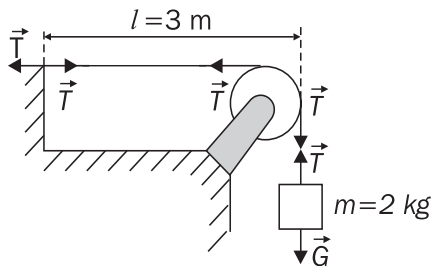
Se observă că, în funcție de curbura corzii, rezultanta tensiunilor în fiecare punct acționează fie în sus (fig. 6a, d), fie în jos (fig. 6b,c) determinând variația corespunzătoare a accelerației pe direcția respectivă.

Unda transversală se propagă cu o viteză constantă (v_t), viteză care depinde de tensiunea T la care este supusă coarda (la deplasarea straturilor acesteia unul față de altul), și de masa unității de lungime a acesteia (μ).

$$v_t = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (1)$$

Exemplu

O coardă de lungime $l = 3$ m este întinsă prin intermediul unui corp cu masa $m = 2$ kg. Dacă masa corzii este 100 g, să se determine viteza de deplasare a unei oscilații în coarda întinsă.



Rezolvare

Forța de tensiune în coardă este:

$$T = mg = 19,6 \text{ N},$$

iar masa unității de lungime, μ , este:

$$\mu = \frac{m}{l} = 0,025 \text{ kg/m}.$$

Viteza de propagare a undei va fi:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 28 \text{ m/s}.$$

Care va fi timpul în care oscilația se va deplasa de la perete la scripete?

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 0,107 \text{ s}.$$

Formarea undelor longitudinale implică posibilitatea apariției în mediu a unor forțe elastice, la deformarea prin comprimare sau întindere. În cazul undelor longitudinale propagate într-un mediu solid, viteza undei este invers proporțională cu rădăcina pătrată a densității mediului (ρ). Constanta de proporționalitate este rădăcina pătrată din modulul Young (E) al mediului respectiv.

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (2)$$

Relația (2) de calcul a vitezei unei unde longitudinale într-un solid poartă numele de **formula lui Newton**.

Într-un solid (cazul corzii vibrante) moleculele sau atomii acestuia, având poziții relativ fixe unii față de alții, pot fi considerați fie aceștia, fie o mică porțiune din coardă drept particula care intră în oscilație.

În cazul fluidelor trebuie ținut seamă de agitația termică la care sunt supuse moleculele. Deplasarea din poziția de echilibru trebuie să ia în calcul un volum mic de fluid și nu molecule individuale. Volumul mic de fluid astfel ales trebuie să fie, comparativ cu drumul liber mediu al moleculelor (distanța medie parcursă între două ciocniri), suficient de mare. În acest fel componenta deplasării datorate mișcării termice este anulată. Variația presiunii unui strat de fluid determină o variație de presiune în stratul următor, ceea ce reprezintă transportul perturbației (unda). Viteza undei (de pildă viteza sunetului) depinde de densitatea fluidului. Deoarece oscilațiile sonore se efectuează foarte repede, iar conductivitatea termică a fluidelor este mică, căldura nu are timp să se propage de la un element de volum la altul al fluidului astfel încât propagarea undei se poate trata în limitele unui proces adiabatic. În acest caz, viteza undei longitudinale produsă se determină cu relația:

$$v = \sqrt{\frac{k_{ad}}{\rho}},$$

unde k_{ad} este o mărime care poartă numele de **modul de compresie adiabatic al fluidului**.

Concluzie:

Potrivit celor discutate anterior, o undă reprezintă o perturbație a unei condiții de echilibru, perturbație care se propagă dintr-o regiune în alta a spațiului, cu o viteză constantă, care depinde de tipul undei și proprietățile mediului.

Transferul de energie

Propagării unei unde trebuie să-i asociem o energie deoarece producerea acesteia implică acțiunea unei forțe. Aceasta este aplicată unei porțiuni de mediu care este deplasat în raport cu poziția sa de echilibru. Se efectuează în acest fel un lucru mecanic. Pe măsură ce perturbația se propagă, asupra fiecărei porțiuni din mediu se exercită o forță care determină deplasarea acesteia, deci exercitarea unui lucru mecanic. Ca urmare se realizează un transfer de energie dintr-un punct în altul al mediului de propagare.

Laborator

Evidențierea transferului de energie de către o undă

- Experimentul utilizează un șir de pendule gravitaționale identice (fig. 7a).
- Deplasăm din poziția de echilibru primul pendul și îl lăsăm să se miște liber.

Observații:

1. Perturbația pendulului 1 se transmite prin intermediul pendulelor 2, 3 și 4, ultimului pendul care va devia (fig. 7b).
2. Deviația unghiulară a ultimului pendul este aproximativ egală cu a primului pendul (egalitatea ar fi

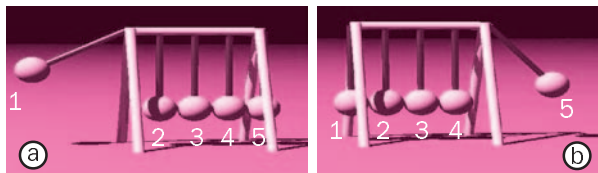


Fig. 7.

perfectă în cazul unui sistem ideal, care n-ar suferi pierderi de energie prin interacțiune cu mediul).

3. Pendulele intermediare rămân imobile.
4. Energia mecanică a primului pendul s-a transmis ultimului pendul prin intermediul celorlalte.
5. Propagarea perturbației nu s-a produs instantaneu.

Concluzii:

- Unda mecanică transportă energie prin mediu, din aproape în aproape cu viteză finită.
- În timpul propagării nu are loc transfer de substanță.

Dacă sursa de perturbații transferă mediului (presupus omogen și izotrop) în unitatea de timp t energia (E), atunci puterea emisă de sursă, sau fluxul de energie emis, este $P = E/t = \Phi$.

Energia emisă de sursă se transferă întregului mediu. (În experiment, în lipsa frecărilor cu aerul pendulul 5 ar avea aceeași amplitudine unghiulară cu pendulul 1). Situația descrisă este un caz particular întrucât, dacă fluxul de energie este transmis unidirec-

țional, din conservarea energiei mecanice rezultă conservarea amplitudinii perturbației – E „proporțional cu” A^2 .

În general însă lucrurile nu stau așa. Să vedem ce se întâmplă în cazul propagării unei perturbații în spațiu, ca în cazul undelor de la suprafața apei (fig. 1) sau a sunetului în aer. Și în acest caz emisia de către sursă a unui flux de energie se transmite mediului, dar în toate direcțiile. Astfel, pe măsura propagării perturbației, un volum din ce în ce mai mare din mediu este expus acesteia ceea ce înseamnă o disipare a energiei inițiale unui mediu din ce în ce mai mare. Aceasta duce la scăderea amplitudinii perturbației.

Rezumat

- Unda este o perturbație a unei condiții de echilibru care se propagă dintr-o regiune în alta a spațiului.
- Undele pot fi: *mecanice* – au un mediu de propagare, *electromagnetice* – se pot propaga și în vid, *de materie* – descrise în fizica cuantică ca procese ondulatorii ale unor particule.
- Mișcarea particulelor mediului în care se propagă o undă mecanică, ca efect al unei perturbații, poate fi pe direcția de propagare a undei - *undă longitudinală*, perpendicular pe aceasta - *undă transversală*, sau complexă rezultată din suprapunerea primelor două.
- Perturbația se propagă cu o viteză constantă (într-un mediu omogen) care depinde de tipul undei și de proprietățile mediului. Într-un solid (o coardă), viteza undei transversale este: $v_t = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, unde T este tensi-

unea, iar μ este masa unității de lungime. Pentru unda

longitudinală:

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

unde E este modulul Young al mediului elastic solid, iar ρ este densitatea.

- În cazul unui fluid procesul de propagare se poate aproxima printr-un proces adiabatic, iar viteza undei longitudinale în mediu depinde de densitatea mediului (ρ) și modulul de compresie adiabatic (k_{ad}) al acestuia.

$$v = \sqrt{\frac{k_{ad}}{\rho}}.$$

- Unda mecanică transportă energia prin mediu, din aproape în aproape cu viteză finită și fără transfer de substanță.



Verificați-vă cunoștințele

- Care din următoarele afirmații, referitoare la existența undelor mecanice, sunt adevărate?
 - Necesită o sursă de perturbație.
 - Necesită un mediu ce poate fi perturbat.
 - Între porțiunile adiacente ale mediului trebuie să existe conexiuni.
 - Mediul trebuie să fie omogen.
- Care din următoarele afirmații, referitoare la undele dintr-o coardă elastică sunt adevărate?
 - Sunt perpendiculare pe direcția de propagare.
 - Viteza de propagare este proporțională cu rădăcina pătrată a tensiunii.
 - Viteza de propagare este proporțională cu masa unității de lungime.
 - Apar și în lichide sau gaze.
- Care din următoarele afirmații, referitoare la undele longitudinale, sunt adevărate?
 - Direcția de oscilație este paralelă cu direcția de propagare.
 - Viteza de propagare depinde invers proporțional de rădăcina pătrată a densității mediului.
 - La gaze, unda se manifestă prin variații locale ale presiunii și densității mediului.
- Descrieți propagarea unei unde transversale într-un mediu elastic.
- Completați textul lacunar:

O undă reprezintă o perturbare a unei care se propagă a spațiului, printr-un material în cazul undelor ..., cu viteză ... care depinde de ... undei și proprietățile Într-un solid, viteza undei ... depinde de și unitatea de Viteza undei longitudinale depinde de ... Young al solid și de ... acestuia. În cazul unui fluid procesul de propagare poate fi aproximat cu un proces ... Viteza undei ... în mediu va depinde de densitatea ... și modulul de
- Explicați, din punct de vedere energetic, ce se întâmplă la căderea unei pietre într-o apă liniștită.
- Ce tipuri de energii pot fi asociate undelor care se propagă printr-o coardă vibrantă?
- Pentru undele mecanice discutate în acest capitol să se analizeze dependența vitezei de propagare de amplitudinea undei.
- Viteza undei, într-o coardă supusă la o anumită tensiune, este 200 m/s. Care va fi viteza dacă tensiunea se dublează? Dar dacă aceasta se reduce la jumătate?
- Viteza undei într-o coardă este 150 m/s la o tensiune a corzii de 75 N. La ce tensiune este supusă coarda dacă viteza este de 180 m/s?
- Care este viteza undei transversale propagată printr-un fir metalic supus unei tensiuni $T = 89$ N, dacă o bobină din acest material, având 305 m, are o masă de 35,5 kg.
- O coardă de 50 m lungime și masa $m_1 = 1,2$ kg se leagă cu o altă coardă, cu lungime dublă și diametrul jumătate din al celei dintâi. Corzile fiind făcute din același material, și tensionate cu o greutate având masa $m = 40$ kg, să se determine timpul în care coarda rezultată poate fi străbătută de un impuls transversal.
- Viteza unei unde longitudinale într-un mediu este de 120 m/s. Care va fi viteza undei într-un mediu în care densitatea este de două ori mai mare, iar modulul lui Young de două ori mai mic?
- Care este valoarea constantei adiabatică a unui proces de propagare a unei perturbații în aer, dacă viteza de propagare este 330 m/s, iar densitatea aerului este 29 g/m^3 ?
- Un pescar observă că pluta undiței efectuează 20 oscilații complete timp de 10 s și ca distanța dintre crestele vecine ale valurilor este de 1,2 m. Care este viteza valurilor față de pescar?
- O barcă balansează pe valurile ce se propagă cu viteza de 1,5 m/s față de țăr. Știind că distanța dintre două adâncituri vecine ale valurilor este de 6 m, calculați perioada de oscilație a bărcii.

Studiul stării varietății undelor întâlnite în natură, atât din punctul de vedere al mediilor în care acestea se propagă, a vitezelor sau direcțiilor de oscilație în raport cu direcția de propagare, impune găsirea unui model de undă. Pe baza unui astfel de model ar trebui identificate caracteristicile generale a undelor și a comportării acestora, ar trebui găsită, în orice moment, deplasarea oricărei particule care participă la fenomenul ondulatoriu descris. Care ar putea fi forma funcției care ar descrie comportarea unui astfel de model?

Pentru simplitate vom considera cazul propagării unei perturbații după o singură direcție x a spațiului. Deplasarea unei particule (considerate în descrierile anterioare ca molecule în cazul unui solid sau volum de mediu, în cazul unui fluid) depinde atât de momentul în care se face observația (t), cât și de poziția acesteia (x). Astfel, funcția care descrie comportarea acesteia trebuie să fie o funcție de cele două variabile $y = y(x, t)$. Această funcție va arăta deplasarea unei particule aflate într-un punct x la un moment t în raport cu propria-i poziție de echilibru. Evaluarea deplasării nu s-ar putea astfel realiza decât după specificarea celor două variabile.

Nu orice funcție de două variabile poate descrie însă o undă care se propagă cu o viteză constantă. Pentru aceasta, funcția care descrie deplasarea în orice moment a oricărei particule față de poziția de echilibru ar trebui să descrie deplasarea cu o viteză constantă pe direcția de propagare (x) fără a modifica forma undei. O astfel de funcție ar trebui, pentru o anumită deplasare δ să repete întocmai forma inițială, adică graficul lui $y(x - \delta)$ să fie identic cu graficul lui $y(x)$ (fig. 1).

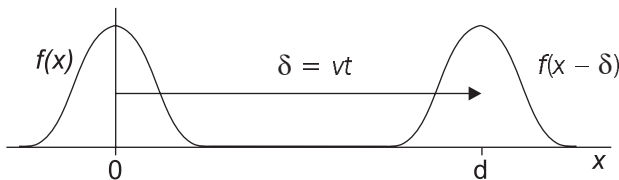


Fig. 1.

Cum distanța δ după care funcția este identică cu ea însăși este parcursă de undă cu viteză constantă \vec{v} , într-un anumit interval de timp t , atunci se poate scrie că:

$$y(x - \delta) = y(x - vt).$$

Toate funcțiile pentru care cele două variabile apar împreună sub forma $(x - vt)$ răspund cerințelor modelului impus.

Exemple de astfel de unde pot fi:

$$y(x, t) = (x - vt)^2,$$

$y(x, t) = e^{(x - vt)}$ sau $y(x, t) = \sin(x - vt)$. Astfel, fiecare

undă poate avea propria ei funcție dependentă de forma și viteza de propagare, dar toate undele care se propagă pe direcția pozitivă a axei x , indiferent de formă, vor fi descrise de o funcție de forma:

$$y(x, t) = y(x - vt).$$

Observație:

O undă cu aceleași proprietăți care s-ar deplasa în sens invers ar fi de forma:

$$y(x, t) = y(x + vt).$$

Cazul undelor sinusoidale

Dacă sursa care produce perturbația este un oscilator armonic, indiferent dacă oscilația este pe direcția de propagare (cazul coardei vibrante) sau perpendicular pe aceasta (cazul unei oscilații de presiune într-un gaz), forma undei generate va fi de tip sinusoidal.

Atât pe modelul corzii vibrante (fig. 5a, pag. 35), cât și pe cel al undei longitudinale de variație a presiunii într-un gaz (fig. 5b pag. 36) pot fi determinate mărimile caracteristice mișcării ondulatorii (fig. 2):

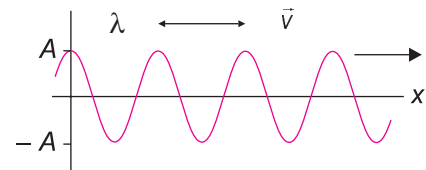


Fig. 2.

- amplitudinea (A) – reprezintă depărtarea maximă pe care o particulă o are față de poziția de echilibru;
- lungime de undă (λ) – distanța dintre două particule succesive cu comportare oscilatorie similară;

$$[\lambda]_{s.l.} = m.$$

- perioada (T) – Considerând v , viteza de propagare a undei, din relația de definiție a acesteia pe direcția de propagare (x):

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (3)$$

dacă perturbația parcurge o distanță egală cu o lungime de undă ($\Delta x = \lambda$), intervalul de timp Δt , în care are loc această deplasare, va fi egal cu o perioadă (T). Atunci:

$$v = \frac{\lambda}{T}. \quad (4)$$

Aplicând relația dintre perioadă și frecvență (ν):

$T \cdot \nu = 1$, relația (4) se poate scrie și:

$$v = \lambda \nu. \quad (5)$$

Exemple

1. Nota mi a unui pian are o frecvență de aproximativ 264 Hz și o lungime de undă, în aer, de 1,31 m. Care va fi viteza sunetului în aer?

Rezolvare

Aplicând relația $v = \nu \lambda$ se obține $v = 346$ m/s.

2. Problemă experimentală

O metodă practică de determinare aproximativă a vitezei luminii (radiația electromagnetică cuprinsă între aproximativ 400 ÷ 700 nm) o oferă cuptorul cu microunde. Între datele care figurează pe plăcuța din spate a acestuia, se poate citi și frecvența microundelor.

Introduceți pe tava cuptorului bomboane fondante, așezate în șiruri paralele, una lângă alta. Îndepărtați dispozitivul de rotire al tăvii (dacă acesta există) și lăsați unul, două minute cuptorul să funcționeze. Scoțând tava din cuptor veți constata că unele dintre bomboane s-au topit mai mult decât altele. Măsurați cu o riglă distanța dintre două din cele mai topite bomboane aflate în șiruri diferite, consecutive. Aceasta vă va da semilungimea de undă a radiațiilor. Utilizând formula (5) se obține viteza luminii.

(Date numerice: $\nu = 2450$ MHz; $\lambda_{\text{măs}} \approx 12$ cm)

$$v = \lambda \cdot \nu \approx 294\,000 \text{ km/s}$$

Observație: Valoarea aproximativă găsită se datorează impreciziei de măsurare a lungimii de undă λ .

Ecuția undei plane

Să urmărim propagarea unei perturbații pe un lanț de oscilatori cuplați (fig. 3).

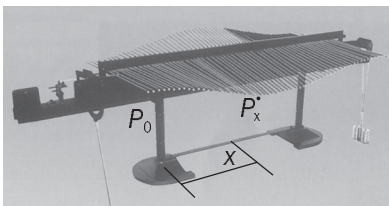


Fig. 3. Lanț de oscilatori cuplați pentru demonstrarea producerii undelor transversale într-un mediu.

Dacă la momentul $t = 0$, primul oscilator montat, P_0 , începe să oscileze armonic la un moment ulterior t_x , oscilația va ajunge la un alt oscilator, P_x , situat la distanța x față de primul. Acesta va reproduce mișcarea oscilatorului din P_0 .

Considerând ecuația oscilatorului din P_0 de forma:

$$y_{P_0} = A \sin \omega t = A \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad (6)$$

ecuația oscilatorului din P va fi:

$$y_p = A \sin \omega(t - t_x) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{t_x}{T} \right) \quad (7)$$

Cum intervalul de timp (t_x), după care oscilația ajunge la oscilatorul P_x poate fi exprimat ca:

$$t_x = \frac{x}{v}, \quad (8)$$

unde v este viteza undei, relația (7) devine:

$$y_p = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT} \right) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right). \quad (9)$$

Ecuția (9) este cunoscută sub numele de *ecuația undei plane* și exprimă elongația, la un moment dat t , a oricărui punct aflat pe direcția de propagare, la o distanță x față de sursă.

O reprezentare convenabilă a relației (9) se poate da definind o mărime k , numită *număr de undă*, de

$$\text{forma: } k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Cum $\omega = \frac{2\pi}{T}$, rezultă: $y(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$.

Observații:

- Propagarea undei depinde de mediu, prin viteza cu care aceasta se deplasează în mediul respectiv.
- Propagarea undei depinde de sursă, prin frecvența de oscilație a acesteia.

Funcția $y(x, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ este o funcție periodică în ambele variabile, având perioadele λ pentru periodicitatea spațială și T pentru cea temporală.

Aceste proprietăți pot fi ușor evidențiate.

I. Periodicitate spațială

$$\begin{aligned} y(x + \lambda, t) &= A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + \lambda}{\lambda} \right) = \\ &= A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) - A \sin 2\pi = \\ &= A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = y(x, t). \end{aligned}$$

Exemplu

Determinați distanța dintre două puncte care oscilează:

- în fază;
- în opoziție de fază.

Rezolvare

a) Din condiția ca la momentul t , două puncte M_1 și M_2 să oscileze în fază rezultă:

$$\begin{aligned} y_{M_1} = y_{M_2} &\Leftrightarrow A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{M_1}}{\lambda} \right) = \\ &= A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{M_2}}{\lambda} \right) + 2k\pi, \end{aligned}$$

unde $k \in \mathbf{Z} - \{0\}$.

Rezultă: $x_{M_2} = x_{M_1} + k\lambda$ sau

$$x_{M_2} - x_{M_1} = k\lambda \Leftrightarrow x_{M_2} - x_{M_1} = 2k \frac{\lambda}{2}.$$

Deci între două puncte aflate în fază diferența de drum ($\delta = x_{M_2} - x_{M_1}$) este egală cu un multiplu întreg al lungimii de undă (un multiplu par de semilungimi de undă).

b) În cazul opoziției de fază se pune condiția:

$$x_{M_1} = x_{M_2} \Leftrightarrow A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{M_1}}{\lambda} \right) =$$

$$= A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_{M_2}}{\lambda} \right) + (2k + 1)\pi,$$

unde $k \in \mathbf{Z} - \{0\}$.

$$\text{Rezultă: } x_{M_2} - x_{M_1} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

Deci între două puncte aflate în opoziție de fază diferența de drum (δ) este egală cu un multiplu impar de semilungimi de undă.

II. Periodicitate temporală

$$y(x, t + T) = A \sin 2\pi \left(\frac{t + T}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) =$$

$$= A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + A \sin 2\pi \left(\frac{T}{T} \right) =$$

$$= A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = y(x, t).$$

Intervalele de timp după care elongația unui punct de pe undă ia aceeași valoare este un număr întreg de perioade (kT ; $k \in \mathbf{Z}^*$).

Exemplu

O sursă aflată într-un mediu elastic emite unde plane de forma:

$$y = 0,25 \sin 100\pi t \quad (\text{în mm}).$$

Știm că lungimea de undă este $\lambda = 10$ m.

a) După cât timp intră în oscilație un punct situat la distanța $x = 8$ m față de sursă?

b) Care este defazajul între sursă și punctul respectiv?

c) La ce distanță se află două puncte ale căror oscilații sunt defazate cu $\frac{\pi}{6}$?

Rezolvare:

a) Din ecuația oscilației:

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

prin identificare, se obține:

$$A = 0,25 \text{ (mm)}; \quad \omega = 100\pi; \quad \varphi_0 = 0.$$

$$\text{Din } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ se obține perioada: } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{50} \text{ s.}$$

Viteza de propagare a undei este:

$$v = \frac{\lambda}{T} = 500 \text{ m/s,}$$

iar timpul după care oscilația ajunge în punctul $x = 8$ m este:

$$t = \frac{x}{v} = 0,016 \text{ s.}$$

b) Ecuația undei în punctul M se scrie:

$$y_M = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right).$$

Defazajul între sursă și punctul M va fi:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi - \varphi_M = 2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right) = \\ &= 2\pi \frac{x_M}{\lambda} = 1,6 \pi \text{ (radiani)}. \end{aligned}$$

c) Considerând două puncte M și N între care există defazajul:

$$\varphi_M - \varphi_N = \frac{\pi}{6}$$

defazajul se poate scrie:

$$\varphi_M - \varphi_N = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda} \right) - 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_N}{\lambda} \right) = \frac{\pi}{6}$$

de unde:

$$x_M - x_N = \frac{\lambda}{12} = 0,83 \text{ m.}$$

Rezumat

- Modelul „undă plană” are rolul de a identifica trăsăturile determinante ale unei unde: amplitudine (A), frecvență (ν), perioadă (T), lungime de undă (λ), fază (φ_0) și viteză a undei (v). El are rolul de a construi modelul propagării cu viteză constantă a unei perturbații pentru a identifica comportarea acesteia.
- În cazul unei propagări unidirecționale o astfel de relație trebuie să fie de forma: $y(x, t) = y(x + vt)$.

- În cazul undelor sinusoidale, ecuația unei plane este:

$$y_p = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT} \right) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

- Funcția care descrie propagarea unei unde este periodică în spațiu, cu perioada λ și în timp, cu perioada T .



Verificați-vă cunoștințele

1. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate în cazul unei funcții care descrie propagarea unei unde?

- Funcția trebuie să depindă doar de poziție.
- Funcția trebuie să depindă doar de timp.
- Funcția trebuie să depindă de poziție și timp.
- Funcția trebuie să fie liniară în variabilele de care depinde.
- Funcția trebuie să fie sinusoidală.

2. Distanța de echilibru dintre particulele unui mediu este de 1 cm, iar graficul alăturat indică elongația acestora la momentul $t = 0$, când mediul este parcurs de o undă longitudinală. Desenați poziția corespunzătoare a particulelor la momentul $t = 0$.



3. Figura alăturată reprezintă, la momentul $t = 0$, imaginea particulelor unui mediu străbătut de o undă longitudinală. Distanța de echilibru dintre particule este de 1 cm. Reprezentați grafic elongația particulelor la momentul $t = 0$.



4. Cum se modifică viteza unei unde care se propagă într-o coardă vibrantă dacă lungimea de undă a acesteia crește de două ori?

5. Este posibilă producerea unei unde longitudinale într-o coardă vibrantă? Argumentați răspunsul. Este posibilă producerea unei unde transversale într-un baston de oțel? Argumentați răspunsul. În cazul în care răspunsul pentru oricare dintre cele două întrebări este afirmativ, explicați cum a-ți produce o astfel de undă.

6. Urechea umană percepe sunete ale căror frecvențe sunt cuprinse între 20 și 20 000 Hz. Care este lungimea de undă a sunetelor extreme? Se dă viteza sunetului în aer de 330 m/s.

7. Undele emise de un emițător radio se propagă în aer cu viteza $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. Lungimile lor de undă fiind cuprinse între valorile 10 m (unde scurte) și 2 000 m (unde lungi), stabiliți valorile frecvențelor undelor radio scurte și lungi.

8. O sursă sonoră situată sub apă are frecvența de 750 Hz și produce unde cu lungimea de undă de 2 m. Cu ce viteză se va propaga sunetul în apă?

9. Perioada unei mișcări ondulatorii, care se propagă pe o direcție orizontală, este de $3 \cdot 10^{-3}$ s. Distanța între două puncte consecutive, a căror diferență de fază este

$\frac{\pi}{2}$, are valoarea de 30 cm. Calculați:

- lungimea de undă;
- viteza de propagare.

10. Ecuația unei unde armonice într-o coardă este: $y(x, t) = 0,001 \sin(314t + 62,8x)$ (în m).

- În ce sens se mișcă unda?
- Care este viteza sa?
- Care sunt lungimea de undă, frecvența și perioada undei?
- Care este deplasarea maximă a unui segment oarecare al coardei?
- Care este ecuația vitezei și a accelerației unei particule, situată pe coardă în punctul $x = -3$ cm?

11. Ecuația unei unde transversale care se propagă într-o coardă este: $y(x, t) = 10 \sin\left(2\pi t - \frac{x}{0,1}\right)$.

Dacă mărimile sunt date în S.I., determinați:

- viteza de propagare a undei;
- viteza și accelerația maximă ale particulelor din coardă.

12. O undă longitudinală se propagă de-a lungul unui resort orizontal, în sensul negativ al axei Ox. Distanța dintre două puncte care oscilează în fază este de 20 cm.

Sursa emițătoare fixă a resortului vibrează cu o frecvență de 25 Hz și o amplitudine de 3 cm (se presupune că nu există amortizare). Stabiliți:

- viteza de propagare a undei;
- ecuația undei, știind că sursa emițătoare se găsește în origine și că la $t = 0$, $\varphi(0, 0) = 0$;
- viteza și accelerația maxime ale unei particule oarecare a resortului.

13. Ecuația unei unde transversale într-o coardă este:

$y = 3 \cos \pi(0,7x - 100t)$, unde x și y sunt date în centimetri, iar t în secunde.

a) Determinați amplitudinea, lungimea de undă, frecvența, perioada și viteza de propagare.

b) Schițați forma coardei la momentele $t_1 = \frac{1}{200}$ s și $t_2 = \frac{1}{1000}$ s.

c) Care este tensiunea în coardă dacă masa pe unitatea de lungime a acesteia este $m = 4$ g/cm?

1.3.3. Reflexia și refracția undelor mecanice

În discuțiile de până acum, am considerat că undele se deplasează indefinit fără să lovească nici un obstacol. În practică nu se pot realiza astfel de condiții, fapt pentru care trebuie luate în discuție fenomenele care se petrec când unda întâlnește suprafața de separație dintre două medii.

La întâlnirea acestor suprafețe au loc, într-o măsură mai mare sau mai mică, două fenomene: reflexia și refracția undei.

A. Reflexia și refracția într-o coardă elastică

Laborator

1. Reflexia într-o coardă elastică

Materiale necesare:

- corzi elastice din diferite materiale
- bară de fixare
- inel de masă neglijabilă, care se poate deplasa liber pe bara de fixare
- dispozitiv de fixare a corzii de bară.

- Se fixează coarda elastică în poziția întinsă orizontal, cu ajutorul dispozitivului de fixare astfel încât, capătul 2 al corzii să fie fix.

- Se imprimă capătului 1 al corzii un impuls transversal pe coardă (fig. 1. I).

Observații: Când impulsul ajunge la capătul 2 al corzii, el este reflectat, dar suferă și un salt de fază de 180° . Explicația acestei comportări este dată de principiul acțiunii și al reacțiunii. Când impulsul întâlnește suportul de care este legat rigid, coarda va exercita asupra acestuia o forță. Potrivit principiului al III-lea și suportul va exercita asupra corzii o forță egală și de sens contrar, ceea ce

Dicționar

Reflexie: Fenomenul de întoarcere a undei în mediul din care provine, când întâlnește suprafața de separație a două medii.

Refracție: Fenomenul de modificare a direcției de propagare a undei la trecerea acesteia dintr-un mediu în altul, când întâlnește suprafața de separație a acestora.

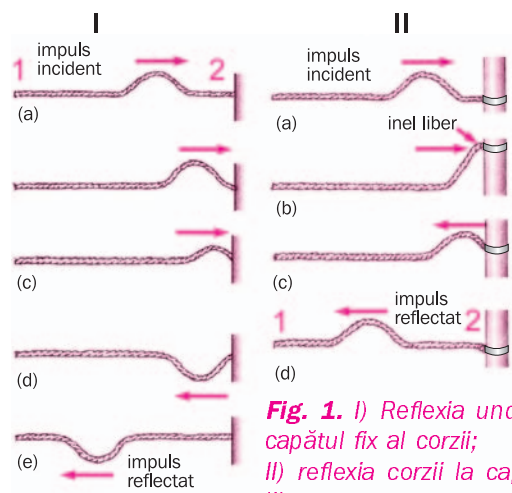


Fig. 1. I) Reflexia undei la capătul fix al corzii; II) reflexia corzii la capătul liber.

determina schimbarea sensului impulsului reflectat.

- Se desface capătul fix (2) al corzii și, cu ajutorul inelului, se permite acesteia deplasarea liberă pe suport. Impulsul transversal imprimat corzii la capătul 1 este reflectat în 2 (fig. 1. II) fără schimbarea sensului de oscilație.

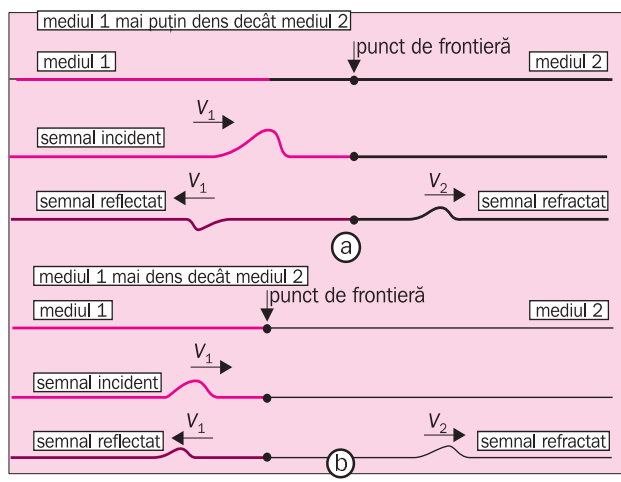
Cazul I studiat poate fi asimilat reflexiei pe un mediu mai dens iar cazul II reflexiei pe un mediu mai puțin dens.

Concluzie: La întâlnirea suprafeței de separație dintre două medii, când unda incidentă întâlnește un mediu mai dens, are loc un salt al undei reflectate de 180° (π radiani). Acestui salt îi corespunde o semilungime de undă.

2. Refracția în coarda elastică

Un studiu similar al refracției, considerând două corzi legate, de densități diferite, evidențiază faptul că, indiferent de densitățile celor două medii (fig. 2), refracția are loc și este întotdeauna însoțită de reflexie.

Fig. 2. Reflexia și refracția unui semnal la frontiera a două medii. v_1 și v_2 reprezintă vitezele de deplasare ale undelor în cele două medii.



B. Reflexia și refracția undelor de suprafață

Pentru înțelegerea celor două fenomene care se produc la suprafața de separație a două medii sunt necesare câteva considerații preliminare asupra propagării undelor în spațiu. Să presupunem în acest caz o sursă punctiformă de oscilații armonice situată într-un mediu elastic. Oscilațiile sursei vor genera o undă ce pune în oscilație, pe rând, toate particulele mediului.

În cazul propagării undei se pot distinge suprafețele de undă și frontul de undă.

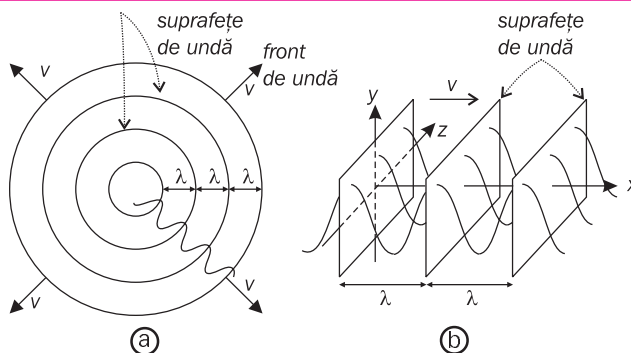


Fig. 3. O sursă sferică de oscilații determină – într-un mediu omogen și izotrop – unde de formă sferică (aici, văzute în secțiune). Se disting câteva suprafețe de undă și frontul de undă. O sursă plană determină formarea unei unde plane.

Dicționar

Suprafață de undă: Mulțimea tuturor punctelor care oscilează în fază.

Front de undă: Suprafața de undă cea mai depărtată de sursă.

Suprafețele de undă pot avea forme diferite, dependente de proprietățile mediului și de forma sursei. În cazul, însă, al unui mediu omogen și izotrop și al unei surse punctiforme sau sferice, suprafețele de undă vor fi sfere concentrice (fig. 3a).

Dacă sursa de oscilație este plană, undele produse vor fi unde plane (fig. 3 b).

Observație:

La depărtare mare, o undă sferică poate fi aproximată, într-un spațiu restrâns, cu o undă plană.

Cristiaan Huygens, în „Tratatul despre lumină”, publicat în 1690, enunța un principiu care, de atunci, i-a purtat numele – „principiul Huygens”.



CRISTIAAN HUYGENS
1629-1695

Fig. 4.

Fizician și astronom olandez. A studiat oscilațiile pendulului și a propus ipoteza ondulatorie a luminii, a adus importante perfecționări lunetei, cu care a descoperit satelitul Titan al planetei Saturn.

Principiul oferă o metodă de construire a suprafețelor de undă. El poate fi ilustrat prin următoarele experimente.

Laborator

Urmărirea propagării fronturilor de undă

Materiale necesare:

- bazin cu apă, cu perete despărțitor;
- oscilator
- sursă punctiformă de oscilații (baghetă);
- sursă plană de oscilații (riglă).

1) Se practică o deschidere îngustă în peretele despărțitor al bazinului, la nivelul suprafeței apei. Cu ajutorul sursei punctiforme de oscilații, în partea din dreapta a bazinului se produc unde circulare (fig. 5a).

Se observă că, o dată ajuns la fanta, frontul de undă va genera, în bazinul din stânga, o undă circulară, ca și cum sursa de oscilații ar fi chiar în fantă.

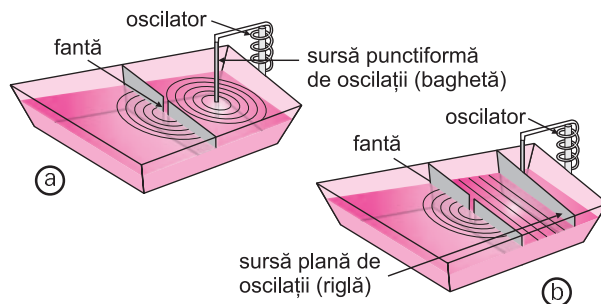


Fig. 5. Exemplificarea principiului lui Huygens pentru: unde circulare (a); unde plane (b).

2) Se înlocuiește sursa de oscilații punctiforme cu una plană, cu ajutorul căreia se produc unde liniare. Se constată că, ajuns la peretele despărțitor, frontul de undă va genera, în partea stângă a bazinului, același tip de unde circulare.

Concluzie: Indiferent de localizarea fantei și de forma undelor din bazinul din dreapta, în bazinul din stânga

se produc unde circulare, ca și cum fanta ar reprezenta o sursă de oscilații punctiforme.

De aici derivă și următoarea formulare a „principiului Huygens”.

Orice punct al frontului de undă poate fi considerat ca un nou centru de perturbații, de la care se propagă unde secundare. Înfașurătoarea tuturor acestor unde secundare, ce oscilează în fază, formează noul front de undă.

În fig. 6 este dată construcția frontului de undă pentru o undă plană și, respectiv, una circulară, prin aplicarea principiului Huygens câtorva dintre punctele mediului aflate pe frontul de undă.

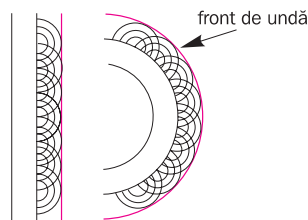


Fig. 6. Generarea frontului de undă, potrivit Principiului Huygens.

Observație: Dacă fundul cuvei din fig. 5 este transparent și deasupra acesteia se plasează o sursă de lumină, pe un ecran se vor putea proiecta imaginile undelor produse la suprafață. Aceste imagini se formează deoarece crestele undei acționează ca niște lentile convergente, tinzând să focalizeze lumina, în timp ce văile acționează ca lentile divergente, tinzând să o împrăștie (fig. 7). În acest fel, crestele apar pe ecran ca dungii luminoase, în timp ce văile – ca dungii întunecate. Așa au fost obținute imaginile din fig. 8b, 9a și 11a.

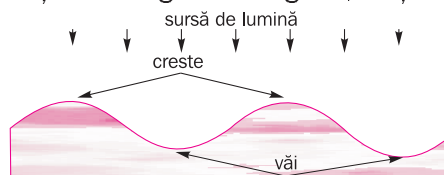


Fig. 7. Obținerea imaginii undelor de pe suprafața apei.

A. Reflexia

Laborator

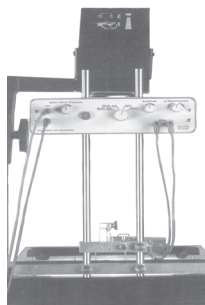
Evidențierea reflexiei

Materiale necesare:

- cuvă cu apă
- riglă de plastic
- sistem oscilator.

Se realizează unde rectilinii pe suprafața apei dintr-o cuvă, prin intermediul unui oscilator, având în capăt o riglă de plastic. Dacă oblic față de direcția de propagare a undelor rectilinii astfel formate, este așezat un perete, se obține imaginea din fig. 8.

Un experiment similar, dar de data aceasta utilizând unde circulare, este prezentat în fig. 9.



(a)

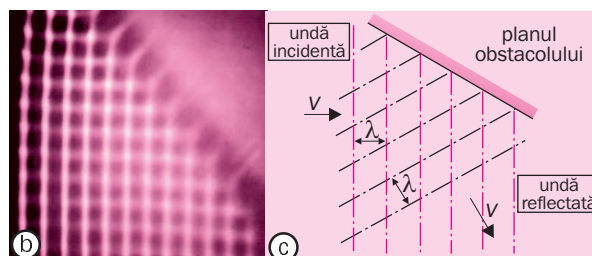


Fig. 8. Dispozitivul experimental (a), imaginea reflexiei a undelor liniare formate la suprafața lichidului (b) și diagrama propagării acestora (c).

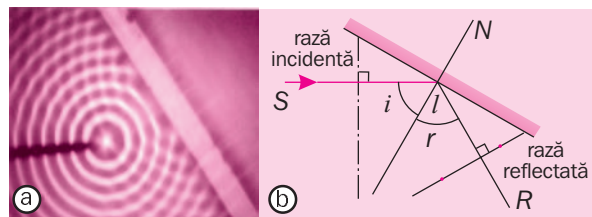


Fig. 9. Reflexia undelor circulare.

Concluzii:

- Unda reflectată se propagă cu aceeași frecvență (v) cu a unei incidente.
- Unda reflectată se propagă cu aceeași viteză (v) cu a unei incidente (ele se deplasează în același mediu).
- Cele două unde au aceeași lungime de undă:

$$\lambda = \frac{v}{\nu}$$
- Unda incidentă, unda reflectată și normala la suprafața de separație se află în același plan (Legea I a reflexiei). Urmărind direcția de propagare a unei reflectate, se constată că unghiul de reflexie \hat{r} (unghiul dintre raza reflectată și normala în punctul de incidență

la plan) este egal cu unghiul de incidență \hat{i} (unghiul dintre raza incidentă și normala în punctul de incidență la plan) ($\hat{i} = \hat{r}$ (1)) (fig. 10).

Relația (1) constituie legea a II-a a reflexiei și poate fi demonstrată pe baza principiului Huygens.

Se consideră un front de undă AB (fig. 10) care se deplasează spre suprafața de separație a celor două medii, cu viteza \bar{v} . Frontul de undă atinge suprafața de separație a celor două medii mai întâi în punctul A' . În acest moment, conform principiului Huygens, acest punct devine sursă de noi oscilații, producând unde secundare circulare ce se propagă în mediu cu viteza

\vec{v} . Pe măsură ce alte puncte ale frontului de undă întâlnesc suprafața de separație a celor două medii, și acestea devin – cu o anumită întârziere în raport cu A' – surse secundare de oscilații, producând la rândul lor unde circulare. Înfășurătoarea acestor unde circulare produse formează noul front de undă. Ultimul punct al frontului de undă care va întâlni suprafața de separație va fi B , în B'' , după un interval de timp t de la incidența frontului în punctul A' . În acest interval de timp undele circulare produse în A' s-au deplasat pe o distanță $v \cdot t$ egală cu distanța $A'A''$. Din egalitatea triunghiurilor dreptunghice formate, $A'B''A''$ și $A'B'B''$, se obține:

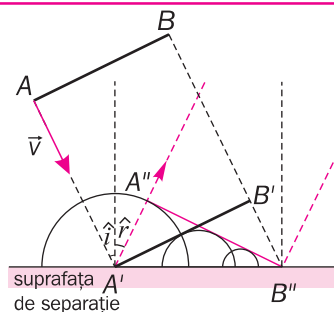


Fig. 10. Diagrama de aplicare a principiului Huygens pentru stabilirea legii a II-a a reflexiei.

$$\sphericalangle A'B''A'' = \sphericalangle B'A'B''$$

adică:

$$\sphericalangle i = \sphericalangle r.$$

2. Refracția

Laborator

Evidențierea refracției

Materiale necesare:

- cuvă cu apă;
- placă groasă de plexiglas;
- riglă cuplată la un sistem oscilator.

- Plasăm pe fundul unei cuve cu apă o placă groasă de plexiglas și vom crea astfel, prin diferența de nivel din cele două părți ale cuvei, medii cu proprietăți de propagare diferite.

- Prin intermediul unei rigle cuplate la un vibrator, producem unde rectilinii incidente pe suprafața apei.

- La suprafața de separare a celor două medii, se constată modificarea direcției de propagare (fig. 11). A avut loc fenomenul de refracție.

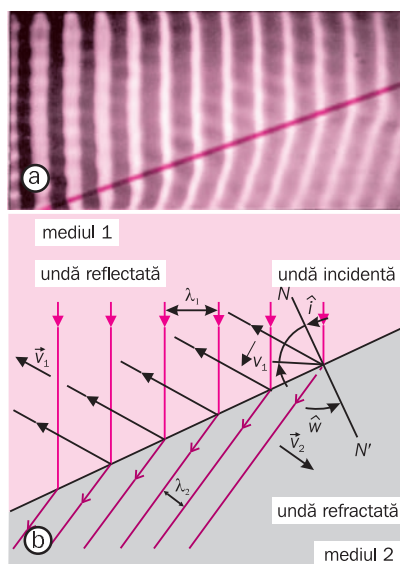


Fig. 11. Producerea fenomenului de refracție (a) și reprezentarea schematică a reflexiei și refracției la suprafața de separare a celor două medii (b).

Concluzii:

- Unda refractată are aceeași frecvență cu unda incidentă.

- Cele două unde au lungimi de undă diferite.

- Cele două unde nu au aceeași viteză de propagare în cele două medii.

- Cele două unde se află în același plan.

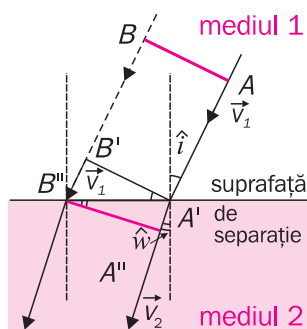
Legea a doua a refracției stabilește o legătură între unghiurile de incidență și respectiv refracție și proprietățile mediilor în care are loc fenomenul (proprietăți descrise de vitezele celor două unde: \vec{v}_1 , \vec{v}_2 , sau de lungimile lor de undă: λ_1 , λ_2):

$$\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{w}} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad (2)$$

unde unghiul de incidență este \hat{i} , cel de refracție este \hat{w} , v_1 și v_2 sunt vitezele în cele două medii, iar λ_1 și λ_2 lungimile de undă ale undelor din cele două medii.

Temă în clasă:

Utilizând figura 12, explicați pe baza principiului lui Huygens fenomenul de refracție și deduceți legea a II-a, a refracției (2), utilizând triunghiurile $A'B'B''$ și $A'A''B''$.



AB = frontul unei incidente
 $A''B''$ = frontul unei refractate

\hat{i} = unghi de incidență

\hat{w} = unghi de refracție

v_1 = viteza unei în mediul 1.

v_2 = viteza unei în mediul 2.

Fig. 12. Demonstrarea legii refracției cu ajutorul principiului lui Huygens.

Rezumat

- La suprafața de separație a două medii, undele suferă fenomene de reflexie și refracție.
- Reflexia este dependentă de condițiile de frontieră, adică de natura mediului pe care se face reflexia. Dacă acesta este mai dens ca mediul de propagare a unei incidente, prin reflexie se pierde o semilungime de undă.
- Prima lege a reflexiei, respectiv refracției, se referă la coplanaritatea razelor incidentă, reflectată și normalei la suprafața de separație a celor două medii

și respectiv a razei incidente, refractate și normalei.

- Legile reflexiei și refracției referitoare la unghiurile făcute de undă cu normala la suprafața de separație a

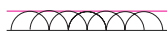
celor două medii sunt: $\hat{i} = \hat{r}$ în cazul reflexiei și $\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{w}} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ în cazul refracției.

- Principiul Huygens: Oricare punct al unui front de undă este sursa unor unde circulare. Înfășurătoarea undelor produse de fiecare punct al frontului de undă determină noul front de undă.

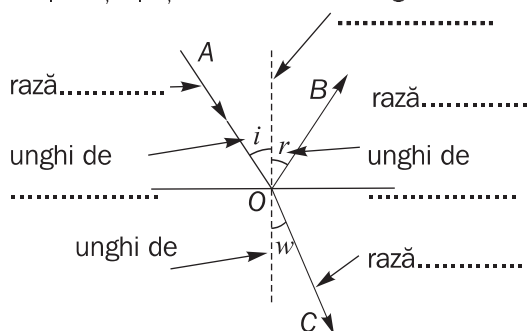


Verificați-vă cunoștințele

1. Definiți termenii: suprafață de undă și front de undă.
2. Ce vă sugerează diagramele din imagine? Explicați!



3. Completați spațiile lacunare din diagramă.



4. Care dintre relațiile următoare reprezintă legea refracției:

a) $\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{w}} = \frac{v_2}{v_1}$; b) $\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{w}} = \frac{v_1}{v_2}$; c) $\frac{\sin \hat{w}}{\sin \hat{i}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

5. Care este unghiul de deviație al unei unde sonore, la trecerea din aer în apă, sub un unghi de incidență de 10° , dacă viteza undei în aer este de 330 m/s, iar în apă de 1500 m/s?

6. Prin capătul liber al unei corzi, legată la celălalt capăt, sunt trimise impulsuri cu amplitudinea A. Impulsurile sunt reflectate fără pierdere de amplitudine. Care este amplitudinea într-un punct al corzii: (a) dacă aceasta este legată rigid și (b) în cazul în care capătul la care se produce reflexia se poate mișca liber.

7. Într-o cuvă, în care se află un lichid, o undă rectilinie de frecvență $\nu = 25$ Hz se deplasează spre un obstacol plan, plasat perpendicular pe suprafața apei. Viteza undei este de 0,4 m/s, iar unghiul de incidență este i .

- a) Reprezentați schematic ceea ce ați vedea dacă $i = 45^\circ$.
- b) Cum se modifică reprezentarea în cazul în care $i = 0^\circ$?

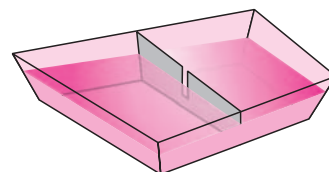
8. Un vibrator, având o suprafață dreaptă, produce unde superficiale, la suprafața apei dintr-un vas. Acestea se deplasează în timp de 1,5 s pe o distanță de 33 cm. Distanța dintre două creste succesive este de 4 cm. Care este frecvența vibratorului? Explicați cum ați folosi dispozitivul pentru a evidenția fenomenul de refracție.

9. Descrieți, construind o diagramă, ce se întâmplă cu o undă plană incidentă pe o deschidere practică într-un obstacol:

- a) dacă deschiderea este largă;
- b) dacă deschiderea este îngustă.

Cum vă așteptați să se modifice reprezentarea schematică, în cazul în care lungimea de undă

a unei plane incidente se micșorează ?



1.3.4. Unde seismice

Interiorul Pământului, așa cum arată cercetările la care s-a ajuns până în prezent, este format din câteva zone diferențiate din punct de vedere structural (fig. 1).

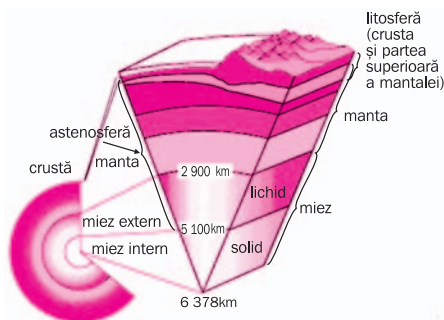


Fig. 1. Diagrama structurii interioare a Pământului.

Crusta are o grosime de circa 12 km pe fundul bazinelor oceanice, și între 25 și 60 km în zonele continentale. Sub crustă se află *mantaua*, care coboară până la o adâncime de 2900 km. Ea este similară, din punct de vedere al materialului care o compune, materialului selenar sau al unor meteoriți, și formează rezervorul de material pentru crustă. *Litosfera* reprezintă zonele rigide, reci, iar *astenosfera* – zonele ductile, calde. *Miezul de fier lichid* înconjoară un miez de fier solid, care se pare că se află într-o rotație relativă față de restul Pământului.

Crusta nu este un înveliș continuu. Ea este formată din plăci continentale și oceanice (fig. 2a) care se deplasează, una în raport cu alta, prin mecanisme datorate curenților de convecție ai magmei din manta (fig. 2b).

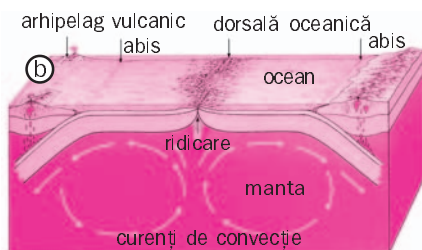


Fig. 2. Plăcile tectonice terestre (a) și mecanismul de migrare al acestora (b).

Datorită tensiunilor cumulate în crusta terestră ca urmare a acestor deplasări, îndeosebi în zonele de graniță ale plăcilor tectonice, apar cutremurele.

Dicționar

Cutremur: Eliberare de energie elastică acumulată într-un punct focal aflat sub suprafața Pământului.

Undele produse de cutremure sunt de mai multe tipuri:

1. **Undele primare (P)**, numite așa deoarece sunt primele care apar pe o seismogramă. Sunt unde longitudinale și au viteze mari de propagare (fig. 3). La întâlnirea suprafeței de separație a două medii cu proprietăți fizice diferite, ele se refractă. Viteza acestor unde este mai mică în zona lichidă a Pământului.

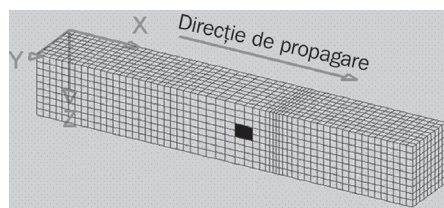


Fig. 3. Unde primare (P).

2. **Undele secundare (S)** sunt unde transversale care determină ca suprafața terestră să vibreze perpendicular pe direcția de propagare (fig. 4). Au viteze mai mici de propagare comparativ cu cele ale undei P, de unde și înregistrarea ulterioară a acestora pe seismogramă. Dispariția undelor S la 2900 km sub scoarța terestră indică faptul că partea externă a miezului este lichidă, undele transversale neputându-se propaga în mediu lichid.

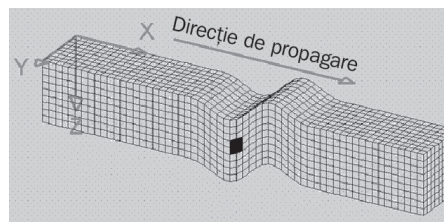


Fig. 4. Unde secundare (S).

3. **Undele Love (L)**, după numele matematicianului britanic A.E.H. Love, care le-a prezis într-un model publicat în 1911, sunt asemănătoare valurilor oceanului și se produc doar la suprafața Pământului. Undele (L) au o mișcare strict orizontală (fig. 5).

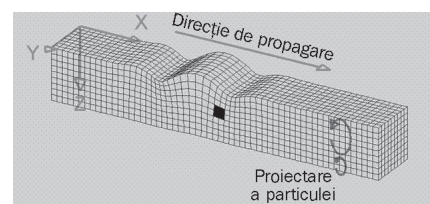


Fig. 5. Unde de suprafață (L).

4. **Undele Rayleigh (R)**, după numele lui J. W. Strutt, lord Rayleigh, care le-a demonstrat existența – matematic – în 1885, sunt o combinație de mișcare verticală și orizontală (fig. 6).

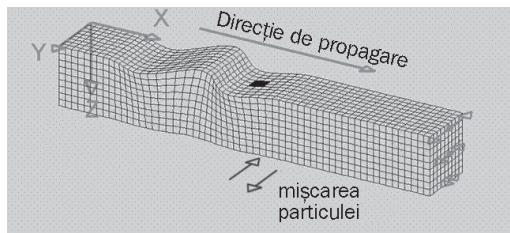


Fig. 6. Undele de suprafață (R).

Vitezele undelor P și S sunt afectate de modificările de densitate și rigiditate ale zonelor străbătute. Aceste viteze tind să crească o dată cu adâncimea în manta, datorită creșterii presiunii și a densității.

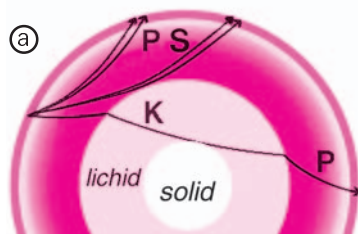
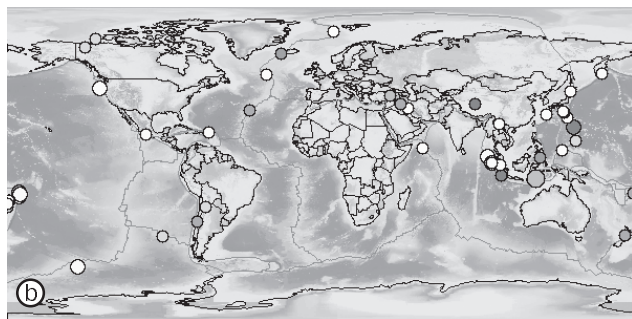


Fig. 7. Direcțiile de propagare ale undelor unui cutremur (a) și principalele zone seismice de pe glob (b).



Înregistrarea cutremurelor este realizată cu ajutorul **seismografeilor**. Dacă mare parte dintre acestea sunt astăzi electronice, principiul de funcționare se bazează pe utilizarea unui tambur cu hârtie și a unui pendul având la capăt un inscripător. Acesta înregistrează pe tamburul aflat în rotație uniformă orice trepidație a scoarței Pământului (fig. 8a, b).

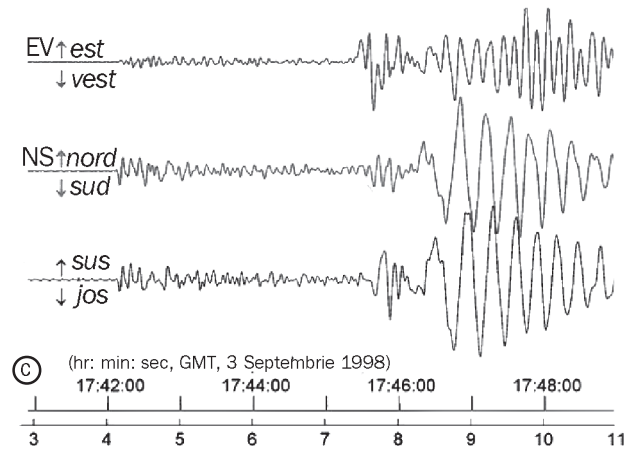
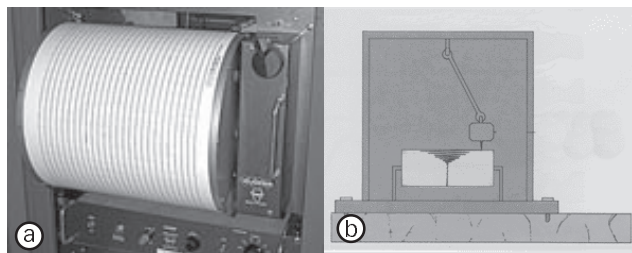


Fig. 8. Seismograf (a) – schema de principiu (b); seismograma unui cutremur înregistrat de la o stație din Peru în septembrie 1998 (c).

Înregistrarea poartă numele de **seismogramă** (fig. 8c). Din studiul seismogramei se poate stabili depărtarea față de epicentrul cutremurului. Pentru exprimarea energiei eliberate de un cutremur, este utilizată scala Richter (tabel 1).

Tabelul 1. Efecte tipice ale unui cutremur potrivit magnitudinii – dată de scala Richter.

Magnitudine	Efecte
sub 3,5	În general nu sunt simțite, dar se pot înregistra.
3,5 – 5,4	Simțite, dar rareori produc pagube.
sub 6	Distrugerii minore imobilelor bine proiectate. Distrugerea caselor cu rezistență seismică slabă.
6,1 – 6,9	Distrugerii semnificative pe arii întinse, până la 100 km depărtare de epicentru.
7,0 – 7,9	Cutremur major - produce pagube serioase pe întinderi mari.
peste 8	Cutremur mare – provoacă pagube și la sute de km distanță de epicentru.

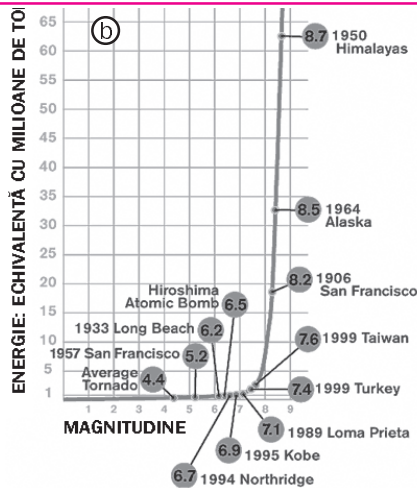
Magnitudinea pe scala Richter este calculată din amplitudinea cea mai mare a unei unde seismice și indiferent de tipul acesteia are la bază o scală logaritmică în bază 10, ceea ce înseamnă că între două grade succesive creșterea magnitudinii este de un ordin de mărime. Pe această scală, dacă energia eliberată de un cutremur cu magnitudinea 1 este echivalentă cu doar câteva kilograme de trinitrotoluen (TNT), o magnitudine de 8 pe scala Richter eliberează o energie echivalentă detonării a 6 milioane de tone de TNT (fig. 9).

Efectele unui cutremur nu depind numai de magnitudinea acestuia ci și de: distanță, condițiile de sol, standardele de construcție și alți factori. Pentru estimarea



(a)

Fig. 9.
Charles F. Richter
în 1934 (a)



A inventat scala logaritmică de măsură a cutremurilor care-i poartă numele (diagrama dată în echivalent energetic și exemple de cutremure cu diverse magnitudini (b)).

efectelor provocate de un cutremur seismologii utilizează scala de intensitate Mercali. Scala Mercali are 12 grade și estimează efecte ale cutremurilor asupra construcțiilor și a altor elemente de mediu (de exemplu, un cutremur de gradul X pe scara Mercali poate fi descris în funcție de efecte ca: majoritatea clădirilor și fundațiile acestora sunt distruse, apa se revarsă pe malurile râurilor și canalelor, pământul se surpă pe arii largi, drumurile sunt rupte.

Temă în clasă: Completați într-un tabel, utilizând diferite surse de informare, efectele după care se face estimarea pe scala Mercali.



Fig. 11. Imagini ale devastărilor produse de un cutremur din Kobe, Japonia 1995.

Caracteristicile seismice generale în țara noastră, în zona seismică Vrancea

În țara noastră seismicitatea în scoarță este împărțită variat de-a lungul teritoriului, cu magnitudini de obicei mai mici de 5,5 grade. Epicentrele de seismicitate adâncă de 70-200 km sunt concentrate într-o arie restrânsă din zona Vrancea și ajung la magnitudini de până la 8 grade (R). La declanșarea în adâncime a unui seism, mișcarea pământului provoacă apariția unei unde sferice de volum, cu două componente:

- unda P, undă de compresie care determină mișcarea particulelor solului paralel cu direcția de propagare, cu o viteză de 7,8 km/s. Amplitudinea acestei unde

este direct proporțională cu magnitudinea (energia cutremurului). Mișcarea este percepută la suprafață ca un mic șoc în plan vertical. Nu este periculoasă pentru clădiri deoarece deține circa 20% din energia totală a cutremurului.

- unda S, undă de forfecare care determină mișcarea particulelor solului perpendicular față de direcția de propagare. Are o viteză de propagare de 4,6 km/s și este resimțită la suprafață sub forma unui balans în plan orizontal. Deține circa 80% din energia totală a cutremurului și determină distrugerii proporționale cu magnitudinea cutremurului și cu durata de oscilație. Clădirile cad datorită rezonanței între frecvența proprie de oscilație și frecvența undei incidente.

Avertizarea seismică a zonelor de risc se bazează pe particularitățile zonelor seismice adiacente. În cazul Bucureștiului zona de seismicitate Vrancea este caracterizată de:

- cutremurele mari se produc întotdeauna în aceeași arie geografică, de mici dimensiuni;
- staționaritatea modelelor de radiație – ca mecanism de propagare;
- distanța față de epicentru este de circa 130 km.

Aceste particularități creează posibilitatea unui interval de timp de avertizare de 25-30 de secunde. Deși scurt, timpul este suficient pentru întreruperea distribuției gazului sau a energiei electrice principalele surse de risc post cutremur, a întreruperii activităților cu grad ridicat de pericol (reactoare nucleare, apă grea, combinate chimice etc.): decuplarea alimentării cu energie electrică a garniturilor de cale ferată – ceea ce determină oprirea acestora (atât trenuri de suprafață, cât și metrou).

Sistemul de alertare seismică este alcătuit din patru componente:

- 1 – sistem de monitorizare compus din mai mulți senzori;
- 2 – legături de comunicație în timp real pentru transmiterea datelor de la senzori la computer;
- 3 – unitate de procesare pentru convertirea datelor;
- 4 – sistem de producere și comunicare radio a alarmei seismice.

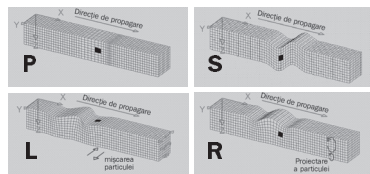
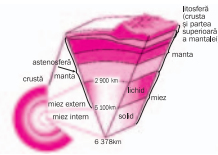
Realizarea alertării - În epicentru este instalat un seismometru racordat prin radio la stația de recepție din București. Șocul perceput de seismometru la producerea undei (P) este transpus în unde radio și transmis instantaneu la București unde se dă alarma seismică, după o prelucrare computerizată a undei, timp de 2 secunde. După un interval de circa 10 secunde se formează unda (S) care ajunge la București după cel puțin 25 de secunde de la alertare.

Tabelul 2. Cutremurele de pământ de adâncime intermediară din regiunea Vrancea, în ultimii 60 de ani.

Data	Magnitudine	Adâncime (km)
10 noiembrie 1940	7,7	160
4 martie 1977	7,5	100
30 august 1986	7,2	140
30 mai 1990	6,9	80

Rezumat

- Interiorul Pământului este format din câteva zone diferențiate din punct de vedere structural: crustă, manta, miez lichid, un miez de fier solid. Aceste zone sunt grupate în: litosferă – reprezintă zonele rigide, reci, și astenosferă – zonele ductile, calde.
- Cutremurele sunt eliberări de energie elastică acumulată într-un punct focal aflat sub suprafața Pământului. Aceste acumulări de energie se realizează îndeosebi în zonele de graniță ale plăcilor tectonice.

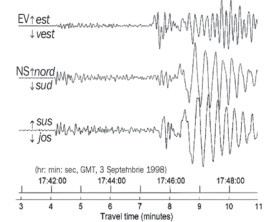


Măsurile de securitate pentru limitarea distrugerilor provocate de cutremure includ:

- întărirea fundațiilor, ca și proiectarea unor clădiri suficient de flexibile pentru a putea absorbi vibrațiile fără producerea fenomenului de rezonanță.
- educarea cetățenilor în vederea pregătirii imobilelor pentru un posibil cutremur și a ceea ce aceștia trebuie să facă în cazul unui cutremur.

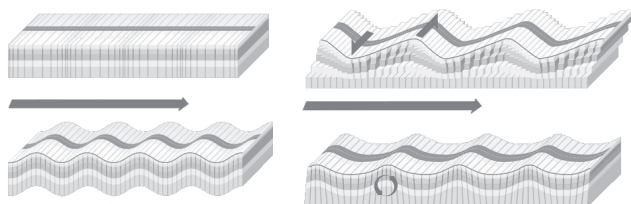
Eliberarea de energie se realizează prin intermediul undelor elastice care pot fi de mai multe tipuri: principale (P), secundare (S); Love (L) și Rayleigh (R).

- Măsurarea magnitudinii cutremurelor se realizează prin interpretarea seismogramelor produse de seismografe.
- Cutremurele sunt clasificate din punct de vedere al magnitudinii potrivit scării Richter, iar din punct de vedere al efectelor potrivit scării Mercalli.
- Cutremurele care prezintă un grad ridicat de risc pentru București sunt evenimente de adâncime intermediară, cu magnitudini apropiate de 8, la o distanță față de epicentru de circa 130 km.



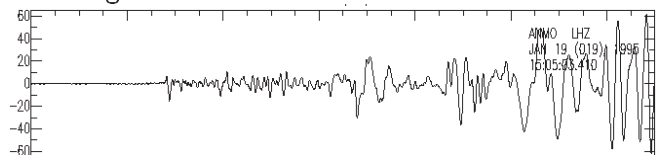
Verificați-vă cunoștințele

- Completați textul:
Cutremurele sunt ... de acumulate într-un punct ... aflat sub suprafața Pământului. Ele se realizează îndeosebi în zonele de graniță a ca urmare a a acestora. Undele (P) sunt unde ... și au viteze ... de propagare. Undele (S) sunt unde care determină ca suprafața terestră să vibreze ... pe direcția de propagare. Au viteze de propagare mai ... comparativ cu cele ale undei P. Undele (L) se produc doar la ... Pământului și au o mișcare Undele (R) sunt o combinație de mișcare ... și ...
- Identificați pe următoarele machete de propagare, tipul și caracteristicile undei.



- Care din următoarele afirmații, referitoare la unele seismice, sunt adevărate?
a) Undele primare (P) au viteza cea mai mare.
b) Undele secundare (S) nu se propagă prin medii lichide.
c) Undele de suprafață au lungimi de undă mici.
d) Undele P și S nu depind de densitatea sau rigiditatea mediului în care se propagă.

- Utilizând informațiile din lecție comentați următoarea seismogramă:



- Realizați un referat cu tema „Metode antiseismice în proiectarea construcțiilor”.
- Realizați o listă de măsuri ce trebuie respectate de fiecare cetățean în timpul și după producerea unui cutremur. Realizați o dezbatere pe această temă.

Principala diferență dintre propagarea undelor și mișcarea altor corpuri este aceea că undele nu manifestă vreo repulsie analogă forțelor de interacțiune normale dintre suprafețele corpurilor în contact.

Ce se întâmplă în cazul în care două sau mai multe unde trec simultan prin aceeași regiune din spațiu? Acestea se pot suprapune producând fenomenul de interferență. Studiul acestui fenomen face apel la *principiul independenței propagării undelor* cunoscut și sub numele de **principiul de superpoziție**.

Dicționar

Principiul de superpoziție: Principiu conform căruia, dacă două sau mai multe unde sunt prezente simultan în același punct din spațiu, deplasarea produsă mediului în acel punct este suma deplasărilor individuale produse de fiecare dintre unde.

Urmăriți stropii de ploaie ce cad într-o baltă (fig. 1) și veți observa cum undele circulare apărute în urma impactului acestora cu apa rămân nemodificate și după suprapunerea lor în aceeași zonă. Nu se modifică nici centrele de oscilație, nici forma circulară a undelor. Ce se întâmplă însă cu elongațiile particulelor mediului supuse simultan acțiunii a două sau mai multe unde?

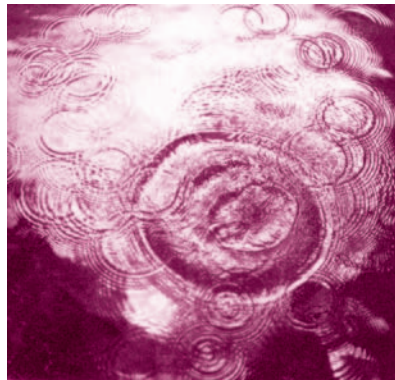


Fig. 1. Zone de interferență produse de căderea unor stropi de ploaie într-o baltă. Se verifică principiul superpoziției.

Dacă, de exemplu, două unde $y_1(x, t)$ și $y_2(x, t)$ se suprapun, funcția $y(x, t)$ care descrie mișcarea se obține prin adunarea funcțiilor de undă ale celor două unde individuale:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t).$$

Matematic, această proprietate a funcției de undă derivă din condiția de linearitate a funcției de undă, funcția $y(x, t)$ conține variabilele doar la puterea întâi. Drept consecință, dacă două funcții $y_1(x, t)$ și $y_2(x, t)$ sunt descrieri ale unor unde și suma lor, $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$ reprezintă o undă.

Laborator

A. Interferența în coarda vibrantă

Materiale necesare:

- coarde vibrante din diferite materiale;
- sistem de fixare.

- Se deplasează brusc și simultan în același sens apoi în sensuri contrare, capetele unei coarde elastice orizontale, bine întinse, producându-se două impulsuri.

Observații:

- Cele două impulsuri au aceeași formă și amplitudine (A) și sunt orientate: în același sens (fig. 2a); în sensuri contrare (fig. 3a).

- Cele două impulsuri se propagă unul spre celălalt cu aceeași viteză.

- Efectele lor se însumează în locul în care semnalele se suprapun determinând o amplitudine: de două ori mai mare ($2A$) (fig. 2b)- *interferență constructivă*; sau nulă (fig. 3b) - *interferență distructivă*.

- După interferență fiecare impuls își urmează calea proprie de propagare (fig. 2c și 3c).

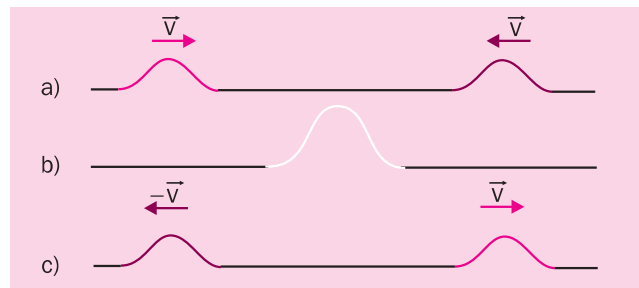


Fig. 2. Interferență constructivă în coarda vibrantă.

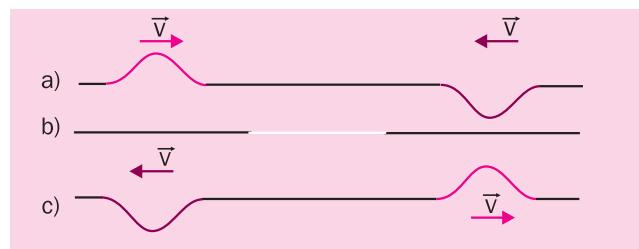


Fig. 3. Interferență distructivă în coarda vibrantă.

Concluzii:

– Prezența unui impuls într-un mediu elastic nu modifică propagarea altui impuls prezent în același mediu.

– La întâlnire, semnalele se suprapun fără a se elimina; ele interferează, fiecare semnal aducându-și propria contribuție la semnalul rezultat.

– În cazul interferenței distructive, suprapunerea a două semnale poate duce la dispariția acestora.

– Interferența se produce doar în cazul semnalelor de aceeași natură.

Rezultatul acestui experiment arată că, atunci când două (sau mai multe) semnale interferează, elongațiile rezultante – în toate punctele mediului de propagare – sunt egale cu suma algebrică a elongațiilor provocate de fiecare dintre semnale luat individual. Aceasta reprezintă o altă formulare a principiului de superpoziție. Principiul este valabil doar în cazul semnalelor de amplitudine mică, care vibrează în aceeași direcție – ca și cum vibrația s-ar propaga într-un mediu unidimensional.

B. Interferența a două unde circulare la suprafața unui lichid (mediu bidimensional)

Cu ajutorul unui oscilator (fig. 4a) se produc oscilații de aceeași frecvență și amplitudine, în două puncte de pe suprafața unui lichid. Propagarea acestor oscilații determină în mediu interferența (fig. 4b).

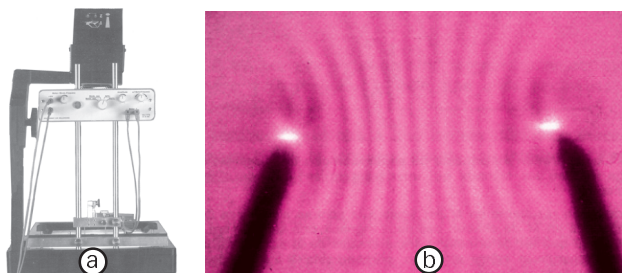


Fig. 4. Dispozitiv de producere a interferenței la suprafața unui lichid (a). Interferența a două unde circulare la suprafața apei – văzute în lumină naturală (b).

Observații:

- În locul undelor concentrice produse de fiecare dintre oscilatori între surse apar o serie de linii alternative luminoase și întunecoase imobile numite *franje de interferență*.

- Liniile luminoase - *franje de amplitudine maximă* - apar datorită suprapunerii punctelor de pe suprafața lichidului care au amplitudine de vibrație maximă.

- Liniile întunecate - *franje de amplitudine minimă* - sunt puncte de pe suprafața lichidului aflate în repaus.

În lumină stroboscopică se pot observa cele două unde circulare emise de fiecare punct-sursă (fig. 5a). Imaginea de interferență va arăta diferit, după cum este evidențiat și în diagrama din fig. 5b.

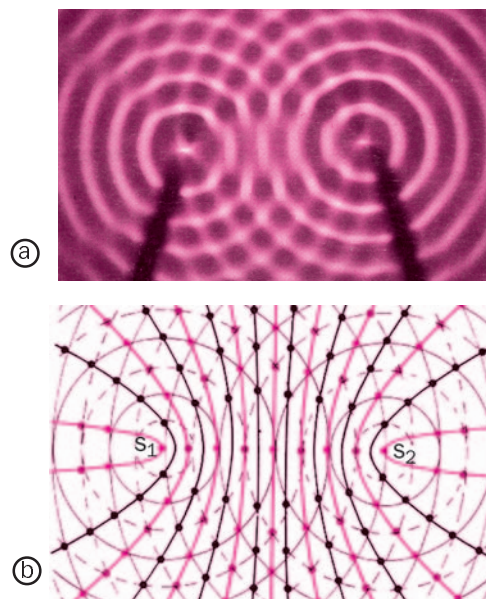


Fig. 5. Interferența a două unde circulare la suprafața apei – imagine stroboscopică (a) și reconstrucția acestuia pe baza principiului de superpoziție.

În construcția franjelor de interferență din diagrama (b) s-a utilizat principiul superpoziției:

- Punctele mai deschise corespund intersecției unei creste cu o vale; rezultatul fiind interferența distructivă și amplitudinea minimă a punctului respectiv.

- Un punct care corespunde intersecției a două creste sau două văi corespunde unei interferențe constructive, care dă naștere franjelor de amplitudine maximă.

- Liniile mai închise sunt franjele întunecate, cele mai deschise sunt franje luminoase.

- Franja centrală, dintre cele două surse, este o franjă de amplitudine maximă.

- Pozițiile franjelor nu se modifică, figura de interferență este staționară.

Pentru a se obține interferența, în experiment s-a pus de la început condiția că undele trebuie să aibă aceeași frecvență și aceeași amplitudine. Condiția de obținere a franjelor de interferență se numește **condiție de coerență**.

Dicționar

Surse coerente: Surse care vibrează cu aceeași frecvență și a căror diferență de fază este constantă în timp.

C. Stabilirea condițiilor de maxim și minim de interferență

Se consideră două surse de oscilație: S_1 și S_2 , care respectă condiția de coerență. Stabilim pozițiile punctelor

M din spațiul de interferență pentru care amplitudinea franjei este maximă (a) sau nulă (b).

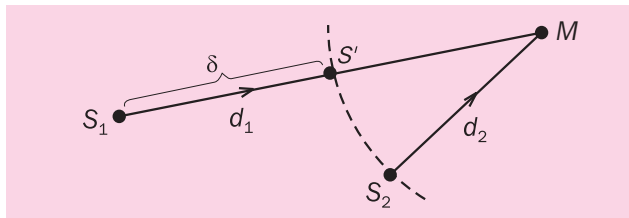


Fig. 6. Diferența de drum δ între două raze, S_1M și S_2M .

a) După cum se observă (fig. 6), cele două unde parcurg distanțe diferite până în punctul M . Diferența de drum (δ) este diferența dintre distanțele parcurse de cele două unde, figurate prin direcțiile lor de propagare, S_1M și S_2M . În notația precedentă:

$$\delta = S_1M - S_2M = d_1 - d_2 = S_1S' \quad (1)$$

Punctul M este situat pe o franjă de amplitudine maximă dacă cele două unde ajung în fază în acest punct, astfel încât să creeze o interferență constructivă. Cum $S'M = S_2M$, acest lucru revine la a spune că, cele două unde sunt în fază în punctele S' și S_2 . Pentru aceasta, distanța S_1S' (δ) trebuie să fie egală cu un număr întreg de lungimi de undă (λ).

$$\delta = k\lambda = 2k \frac{\lambda}{2} \quad (k \in \mathbf{Z}) \quad (2)$$

b) Poziția punctelor situate pe o franjă de amplitudine nulă trebuie să îndeplinească condiția ca undele să ajungă în punctul respectiv în opoziție de fază, sau:

$$S_1S' = \delta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (3)$$

Concluzie:

Un punct M al câmpului de interferență este situat pe o franjă de *amplitudine maximă*, când diferența de drum dintre undele care interferează este un număr par de semilungimi de undă și pe o franjă de *amplitudine nulă* când diferența de fază dintre unde este un multiplu impar de semilungimi de undă. Rezultatele sunt valabile în cazul surselor ce vibrează în fază.

D. Unde staționare

Unei coarde fixate la ambele capete i se imprimă la unul dintre capete o mișcare oscilatorie. În coardă se formează unde care se reflectă la celălalt capăt. În acest fel, pe lângă unda incidentă, apare o undă reflectată, de aceeași frecvență (unde provin de la aceeași sursă). Diferența de fază dintre cele două unde este constantă în timp. Cele două unde se vor combina potrivit principiului de superpoziție, dând naștere unui nou tip de undă, care pare a staționa – numită *undă staționară* (fig. 7).

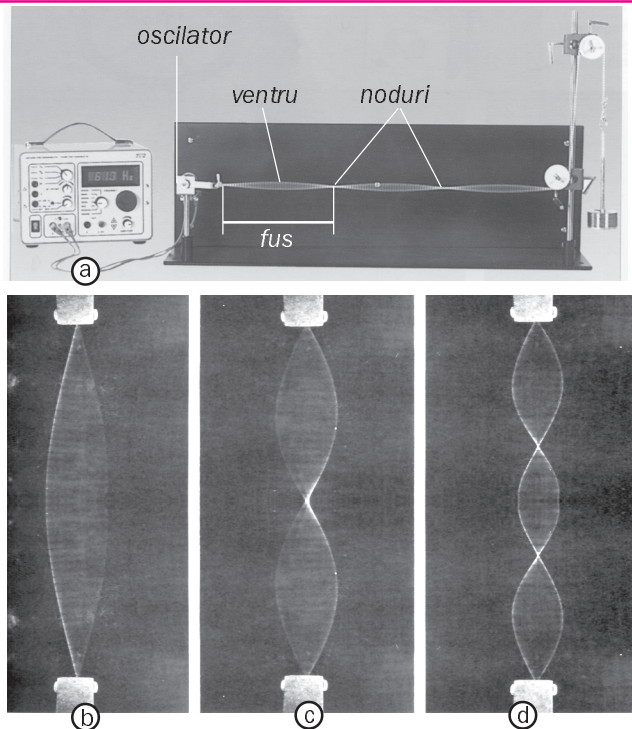


Fig. 7. Dispozitiv de producere a undelor staționare (a). Creșterea frecvenței de oscilație determină creșterea numărului de fuse. Frecvența pentru care se formează un singur fus (b) se numește fundamentală (v_1). Pentru două fuse (c) frecvența (v_2) este de două ori mai mare, pentru trei fuse (d), de trei ori mai mare etc.

În cazul unei unde staționare (fig. 7a, b, c) distingem punctele de amplitudine maximă, numite *ventre*, și cele de amplitudine zero, numite *noduri*. Numărul de noduri este întotdeauna mai mare cu o unitate decât numărul de ventre întrucât la capete, orice undă staționară se sfârșește cu un nod (punctele sunt fixate).

Imaginile undelor staționare din figura 7 sunt rezultatul suprapunerii pe retină a mai multor imagini ale corzii vibrante, ca urmare a remanenței retinei. În realitate, într-o perioadă, firul trece prin pozițiile ce apar în succesiune în figura 8.

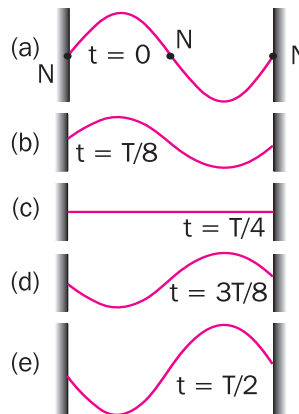


Fig. 8. Aspecte ale firului din figura 7b, la intervale de câte un sfert de perioadă.

Determinarea poziției nodurilor și ventrelor

Să considerăm pe o coardă vibrantă un punct M în care ajung atât unda incidentă, cât și cea reflectată (fig. 9). Prin suprapunere se produce unda staționară.

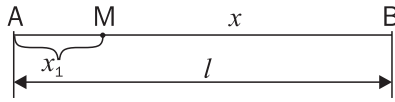


Fig. 9. O coardă în care iau naștere unde staționare. În orice punct M al corzii, diferența de fază dintre unde este constantă în timp, deci este îndeplinită condiția de coerență.

Drumurile parcurse de cele două unde până în M sunt:

$$AM = x_1 \text{ și, respectiv, } AB + BM = x_2.$$

Diferența de drum va fi:

$$x_2 - x_1 = AM + MB + BM - AM = 2BM = 2x \quad (4)$$

La această diferență de drum se mai adaugă o semilungime de undă, echivalentă schimbării de fază cu π radiani, adică cu o semilungime de undă, datorată reflexiei din B.

Pentru că diferența de drum, $\delta = 2x + \frac{\lambda}{2}$, nu depinde de timp, rezultă că ea este constantă. Aceasta determină îndeplinirea condiției de coerență.

Care este elongația în punctul M (fig. 9)?

Dacă punctul A oscilează după legea:

$$y = A \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad (5)$$

ecuația unei incidente care vine din A în punctul M este:

$$y_i = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right), \quad (6)$$

iar a unei reflectate este:

$$y_r = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l + x + \frac{\lambda}{2}}{\lambda} \right) \quad (7)$$

Cum cele două unde se găsesc în același plan, cele două oscilații care se regăsesc în punctul M vor fi paralele, dând o mișcare rezultantă a cărei elongație este:

$$y = y_i + y_r = A \left[\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) + 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l + x + \frac{\lambda}{2}}{\lambda} \right) \right] \quad (8)$$

Se transformă suma în produs, utilizând relația:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

și se obține:

$$y = 2A \cos 2\pi \left(\frac{x + l + \frac{\lambda}{2} - x_1}{2\lambda} \right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2l + \frac{\lambda}{2}}{2\lambda} \right) \quad (9)$$

unde:

$$x + l + \frac{\lambda}{2} - x_1 = 2x + \frac{\lambda}{2} \quad (10)$$

Deci:

$$y = 2A \cos 2\pi \frac{2x + \frac{\lambda}{2}}{2\lambda} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2l + \frac{\lambda}{2}}{2\lambda} \right) \quad (11)$$

termenul $2A \cos 2\pi \frac{2x + \frac{\lambda}{2}}{2\lambda}$ reprezintă aici amplitudinea,

iar termenul $2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2l + \frac{\lambda}{2}}{2\lambda} \right)$ reprezintă faza

mișcării.

Punctele pentru care amplitudinea este maximă îndeplinesc condiția:

$$\cos 2\pi \frac{2x + \frac{\lambda}{2}}{2\lambda} = \pm 1 \quad (12)$$

adică:

$$2\pi \frac{2x + \frac{\lambda}{2}}{2\lambda} = k\pi \quad (13)$$

de unde:

$$x_{\max} = (2k - 1) \frac{\lambda}{4}, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (14)$$

Deci: punctele situate la distanță egală cu un număr impar de sferturi de lungimi de undă față de punctul A vor oscila cu amplitudine maximă. Ele se numesc **ventre**.

Analog, se pune condiția de determinare a poziției nodurilor (amplitudinea să fie zero), adică:

$$2\pi \frac{2x + \frac{\lambda}{2}}{2\lambda} = (2k + 1) \frac{\pi}{2} \quad (15)$$

de unde rezultă:

$$x_{\min} = 2k \frac{\lambda}{4} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (16)$$

Deci: punctele situate la distanță egală cu un număr par de sferturi de lungimi de undă față de punctul A, în repaus, sunt **noduri**.

Distanța dintre un nod și un ventru va fi:

$$x_{\min} - x_{\max} = k \frac{\lambda}{2} - (2k - 1) \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{4} \quad (17)$$

În fig. 7 se observă că – pentru o aceeași lungime a firului – se pot forma unul sau mai multe fuse ale unei staționare. Aceste fuse vor fi produse doar la anumite frecvențe. Frecvența ν_1 care determină formarea unui singur fus este numită fundamentală. Frecvența ν_2 la care apar două fuse va fi de două ori

mai mare ca v_1 și va reprezenta a doua armonică; v_3 , frecvența la care apar trei fusuri, este de trei ori v_1 și se numește a treia armonică etc. Se pune problema găsirii acestor frecvențe.

Dat fiind faptul că formarea undelor staționare implică existența nodurilor la capetele corzii, acest lucru implică formarea unui număr întreg de semilungimi de undă. Lungimea firului va fi în acest caz un multiplu de semilungimi de undă:

$$l = k \frac{\lambda}{2} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (18)$$

Știm deja că $\lambda = \frac{v_t}{\nu}$, unde: v_t este viteza undelor transversale, iar ν frecvența oscilației. Viteza unei transversale într-o coardă vibrantă este dată de relația:

$$v_t = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (19)$$

Înlocuind în (18) expresiile lungimii de undă și, respectiv, a vitezei, se obțin frecvențele proprii (ν_{pr}) ale corzii:

$$\nu_{pr} = k \cdot \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (20)$$

Pentru $k = 1$ rezultă frecvența fundamentală:

$$\nu_1 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\mu}},$$

iar pentru $k = 2, k = 3$ etc., se obțin armonicile lor. Acestea vor fi multipli întregi ai frecvenței fundamentale.

Exemplu

O coardă vibrantă orizontală cu lungimea de 1,5 m și masa $m = 0,5 \cdot 10^{-3}$ kg, este legată de ramura unui diapazon care vibrează cu frecvența $\nu = 150$ Hz. Celălalt capăt al firului întins peste un scripete fix, pe un taler ușor, se află o masă m' . Care este valoarea masei de pe taler, pentru a se obține trei fuse de vibrație staționară?

Rezolvare

Pentru formarea a 3 fuse de vibrație staționară, deci a trei ventre, lungimea corzii trebuie să îndeplinească condiția (18), deci:

$$l = 3 \frac{\lambda}{2}$$

Viteza unei transversale este dată de relația:

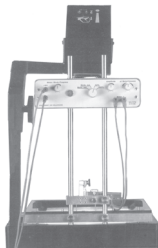
$$v_t = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{Tl}{m}} = \sqrt{\frac{m'gl}{m}}$$

iar lungimea de undă:

$$\lambda = \frac{v_t}{\nu}. \text{ Rezultă } m' = 1,125 \text{ kg.}$$

Rezumat

- Principiul de superpoziție afirmă că, dacă două sau mai multe unde sunt prezente simultan în același punct din spațiu, deplasarea produsă mediului în acel punct este suma deplasărilor individuale produse de fiecare dintre unde.
- Interferența a două unde într-o coardă vibrantă poate fi constructivă sau distructivă după cum prin interferență apar un maxim sau un minim.
- Interferența a două unde de suprafață determină apariția maximelor și minimelor de interferență.
- Condiția de interferență numită condiția de coerență afirmă că sursele care vibrează trebuie să aibă aceeași frecvență și amplitudine.
- Condiția ca într-un punct M interferența undelor să producă un maxim este ca diferența de drum (δ) să fie un număr par de semilungimi de undă



$$\delta = 2k \frac{\lambda}{2} \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

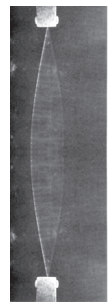
- Condiția ca într-un punct M, interferența a două unde să producă un minim este ca diferența de drum (δ) să fie un număr impar de semi-lungimi de undă

$$\delta = (2k+1) \frac{\lambda}{2} \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

- În cazul unei unde staționare se produc maxime de interferență (ventre) în punctele situate la distanță egale cu un număr impar de sferturi de lungimi de undă și nului în punctele situate la distanțe egale cu un număr impar de sferturi de lungimi de undă.
- Frecvențele la care se produc unde staționare într-o coardă vibrantă sunt date de relația:

$$\nu = k \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (\text{cu } k = 1, 2, 3 \dots),$$

unde l este lungimea corzii, T este tensiunea din coardă, iar μ este masa unității de lungime. Pentru $k = 1$ se obține frecvența fundamentală, iar pentru $k = 2, 3$ se obține armonicile de ordinul 2, 3 etc.

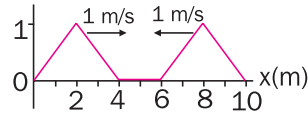




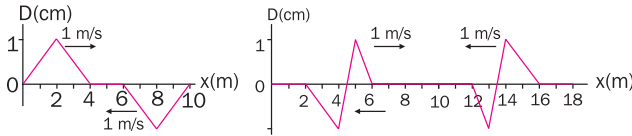
Verificați-vă cunoștințele

1. La momentul $t = 0$ două impulsuri care se propagă pe o coardă vibrantă cu viteza de 1 m/s pot fi reprezentate ca în figura alăturată.

Desenați pentru următoarele 6 secunde, la fiecare secundă cum o să varieze forma acestei reprezentări.



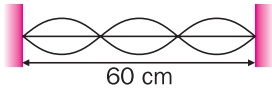
2. Același enunț ca la problema precedentă aplicat impulsurilor din figurile alăturate.



3. O coardă vibrantă în care se produc unde staționare are lungimea 2 m . Care este frecvența undei reprezentate în figura alăturată dacă viteza de propagare este 40 m/s ?



4. Dacă unda staționară din imaginea alăturată are o frecvență de 100 Hz care este viteza de propagare a acesteia?



5. În figura alăturată este reprezentată o coardă vibrantă care oscilează cu o frecvență ν_0 .

a. Câte ventre se formează dacă frecvența se dublează?



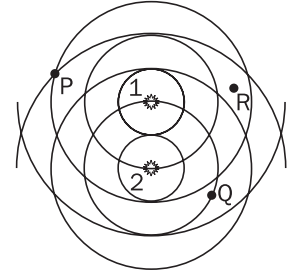
b. Dacă tensiunea în coardă crește de patru ori, pentru ce frecvență (scrisă în funcție de ν_0) coarda va oscila staționar având același număr de ventre?

6. De la două difuzoare aflate la o distanță d unul de altul sunt emise unde sonore cu frecvența de 170 Hz de-a lungul aceleiași direcții. Dacă te depărtezi de cele două difuzoare pe direcția acestora nu se va auzi nici un sunet chiar dacă ambele difuzoare sunt în funcțiune. Dacă sunetul are viteza de 340 m/s , care sunt trei valori posibile ale lui d ?

7. În figura alăturată sunt reprezentate suprafețe de undă circulare emise de două surse.

a) Sunt cele două surse în fază? Explicați!

b) Stabiliți dacă, în cazul punctelor P, Q și R reprezentate în figură, se produce interferență constructivă sau distructivă. Distanța dintre două cercuri consecutive este egală cu lungimea de undă λ . (Dați distanțele în funcție de λ .)



8. O coardă vibrează conform ecuației:

$$y = 5 \sin \frac{\pi}{3} x \sin \pi t, \text{ unde } x \text{ și } y \text{ sunt date în metri, iar } t \text{ în secunde. Determinați:}$$

a) amplitudinea și viteza undelor a căror suprapunere poate genera această vibrație;

b) distanța dintre noduri;

c) viteza unei particule de pe coardă situată în $x = 1,5 \text{ m}$, la momentul $t = 9,8 \text{ s}$ de la începutul mișcării.

9. Două unde armonice se propagă simultan în lungul unei drepte. Dacă funcțiile lor de undă sunt:

$$y_1(x, t) = 0,003 \cos(400t - 0,8x)$$

$$y_2(x, t) = 0,003 \cos(580t - 0,8x).$$

Determinați unda rezultată prin interferența celor două.

10. Două mișcări ondulatorii coerente, cu frecvența de 640 Hz , se propagă printr-un mediu, cu viteza de 30 m/s . Stabiliți diferența de fază cu care interferează într-un punct situat la $25,2 \text{ m}$ și, respectiv, $27,3 \text{ m}$ de originile acestora.

11. Două unde care se propagă pe o coardă, în aceeași direcție, cu aceeași frecvență, de 100 Hz , au lungimea de undă de $0,01 \text{ m}$ și amplitudinea de 2 cm . Care este amplitudinea undei rezultante dacă undele inițiale sunt defazate cu $\frac{\pi}{3}$?

Sunetul este o undă mecanică longitudinală ce acoperă un spectru de frecvențe cuprins între 20 Hz și 20 kHz. Energia se transmite de obicei prin aer, dar undele longitudinale, cu aceleași frecvențe, transmise prin alte medii sunt cunoscute tot sub denumirea de sunete.

Se pot distinge trei intervale diferite de frecvență:

- joasă frecvență cuprinsă între 20 și 400 Hz
- medie frecvență cuprinsă între 400 și 1600 Hz
- înaltă frecvență cuprinsă între 1600 și 20000 Hz,

Sunetul poate fi produs de orice vibrație a unui corp care transmite aerului o parte din energia sa de oscilație. Sunetul se propagă sub forma unei serii de comprimări și rarefieri ale aerului, iar caracteristicile sale sunt: *înălțimea*, *intensitatea* și *timbrul*.

A. Înălțimea sunetului este calitatea sunetului de a fi mai profund (grav) sau mai acut (ascuțit).

Se poate arăta experimental că înălțimea sunetului depinde de frecvența oscilației sonore. Urechea va interpreta două sunete ca având aceeași înălțime dacă frecvența lor este aceeași. Sunetele mai înalte sunt cele care au frecvență mai mare.

B. Intensitatea sau tăria sunetului (I) – este determinată de energia unei sonore, în unitatea de timp, prin unitatea de suprafață.

$$I = \frac{E}{S \cdot t}$$

Ea depinde atât de mărimi care caracterizează sursa sonoră, amplitudinea (A) și frecvența oscilației (ν), cât și de mărimi care caracterizează mediul de propagare, densitatea (ρ) și viteza de propagare (v). În cazul unei unde sonore plane, energia totală a oscilatorului este:

$$E = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{m4\pi^2 \nu^2 A^2}{2}. \quad (2)$$

Cum m reprezintă masa oscilatorului (în acest caz – un strat de mediu ale cărui particule suferă oscilația), ea poate fi scrisă ca:

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot S \cdot l = \rho \cdot S \cdot v \cdot t, \quad (3)$$

unde ρ este densitatea mediului, iar V este volumul unui strat de mediu intrat în oscilație. Cu S s-a notat aria suprafeței frontului de undă, iar cu l distanța parcursă cu viteza v într-un interval de timp t . Înlocuind (2) și (3) în (1), rezultă:

$$I = 2\pi^2 \rho A^2 \nu^2 v.$$

Unitatea de măsură a intensității sonore, în S.I., este:

$$[I]_{S.I.} = \frac{W}{m^2} \text{ (watt / metru pătrat).}$$

C. Timbrul – este caracteristica sunetului datorită căreia putem, de exemplu, diferenția instrumentele muzicale, chiar dacă acestea produc aceeași notă muzicală (fig. 1).

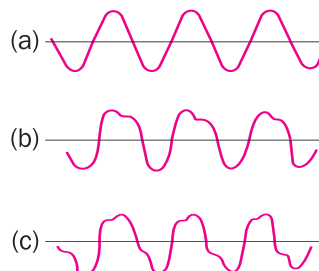


Fig. 1. Unda produsă de diapazon (a); flaut (b); clarinet (c).

Diferențele observate se datorează faptului că, pe lângă sunetul fundamental emis de diapazon (fig. 2a), instrumentele muzicale emit și o serie de sunete de frecvențe superioare, dar de intensități mult mai mici decât cel fundamental (fig. 2). Aceste sunete se numesc *armonici*.

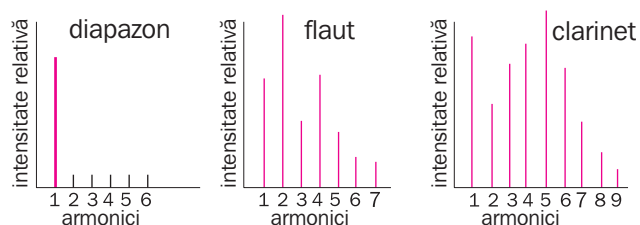


Fig. 2. Armonicile sunetului fundamental – sunt cele care determină timbrul, în cazul diferitelor instrumente muzicale.

Propagat sub forma unor mici comprimări și rarefieri ale aerului, sunetul poate fi descris prin prisma variațiilor locale de presiune. Astfel, într-o conversație normală, presiunea aerului în dreptul urechii este de circa 10^{-2} Pa (valoare foarte mică, în comparație cu presiunea atmosferică normală, care este aproximativ 10^5 Pa).

Variația presiunii aerului la pragul inferior al auzului este de $3 \cdot 10^{-5}$ Pa. La acest prag, deplasarea maximă suferită de o moleculă din aer este de circa 10^{-11} m, ceea ce este cu un ordin de mărime mai mic decât diametrul atomic ($\approx 10^{-10}$ m).

Similar, sunetul cel mai tare care poate fi tolerat de urechea umană este dat de o variație de presiune de circa 29 Pa. Aceasta corespunde unei deplasări a moleculelor de 10^{-5} m.

Dat fiind faptul că viteza moleculelor de aer, a căror vibrație o receptăm ca sunet, este de circa 500 m/s, ne putem aștepta ca și viteza sunetului să aibă același ordin

de mărime. În tabelul 1 sunt date câteva valori ale vitezei sunetului în diferite medii, la diferite temperaturi. Se observă dependența de temperatură în cazul aerului. Puteți s-o explicați?

Tabelul 1. Viteza sunetului în diferite medii [în m/s].

Solide (20°C)	Lichide (20°C)	Gaze (20°C)
granit 6000	apa dulce 1493	aer 331,4
fier 5130	apa de mare 1532 (3,6% salinitate)	hidrogen 1269,5
cupru 3750	mercur 1450	oxigen 317,2
plumb 1230		azot 339,3
aluminiu 5100		aer (15°C)

Urechea umană, organul care realizează detecția sunetului este formată din trei regiuni distincte: urechea externă, mediană și internă. Figura 3 prezintă principalele compartimente ale urechii.

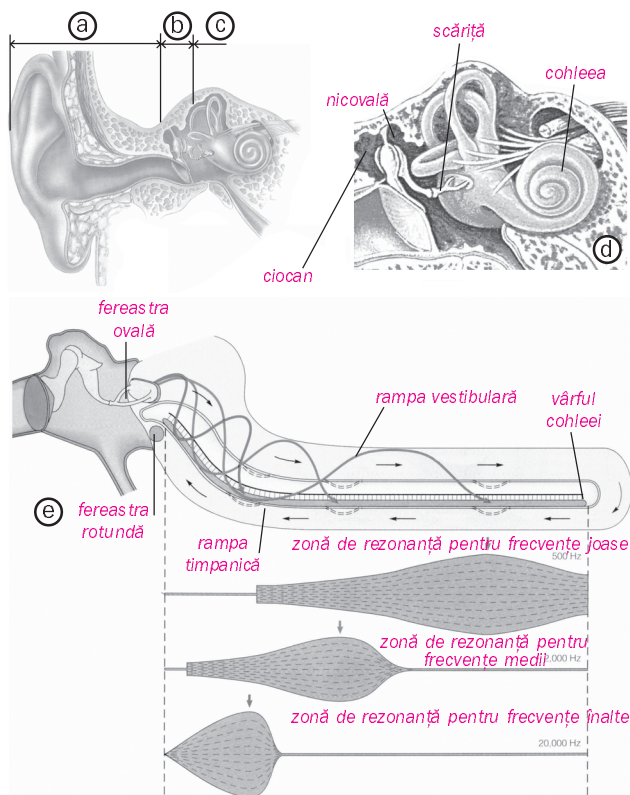


Fig. 3. Structura urechii umane – urechea externă (a), urechea medie (b), ureche internă (c), detaliu ureche medie și internă (d), zone de rezonanță ale membranei bazilare din cochlea (e).

Un rol important în recepția sunetului îl are *cochlea* (melcul). Aceasta este divizată, de-a lungul întregii sale lungimi, de membrana bazilară, care conține fibre nervoase. Membrana bazilară are o masă pe unitatea de lungime (μ) variabilă. Tensiunea pe diferitele ei porțiuni este de asemenea variabilă. Aceste caracteristici diferite determină proprietăți de rezonanță pentru frecvențe diferite (fig. 3e). Terminațiile nervoase din această regiu-

ne vor prelua vibrațiile membranei, transferându-le, sub forma de impuls electric, la creier. Aici, impulsurile sunt interpretate ca sunete de frecvențe diferite, dependente de localizarea nervului în membrana bazilară.

Urechea umană detectează intensități sonore cuprinse pe un interval de 12 ordine de mărime. Cu toate acestea, ea nu percepe cel mai intens sunet ca fiind de 10^{12} ori mai intens decât cel mai slab deoarece intensitatea senzației sonore nu este proporțională cu intensitatea sunetului fizic. Tăria relativă a sunetului (β) este dată de relația:

$$\beta = 10 \lg \left(\frac{I}{I_0} \right),$$

unde $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ este intensitatea sunetului la pragul de audibilitate, iar I intensitatea sunetului considerat. Pe această scală, pragul de audibilitate (nivelul cel mai puternic – ce nu poate fi suportat de ureche fără a fi distrusă) – este de 1 W/m^2 și corespunde la:

$$\beta = 10 \lg(1/10^{-12}) = 10 \lg 10^{12} = 120 \text{ dB}.$$

Cu dB s-a notat *decibelul*, unitatea de măsură a intensității relative a sunetelor. Decibelul reprezintă o relație între o cantitate măsurată și un nivel de referință ($20 \mu\text{Pa}$). Aceasta permite ca scala de măsură în dB să fie mai apropiată de percepția sunetului, care este logaritmică, față de variația presiunii sonore de către urechea umană.

Tabel 2. Intensitatea relativă a unor unde sonore.

Sursa sonoră	β (dB)	Sursa sonoră	β (dB)
motor de avion	150	bâzâit de țânțar	40
concert rock	120	șoaptă	30
trafic aglomerat	80	foșnet de frunze	10
aspirator	70	limita auzului	0
conversație normală	50		

Pentru o înțelegere mai profundă a percepției sunetelor, urmăriți diagrama din fig. 4.

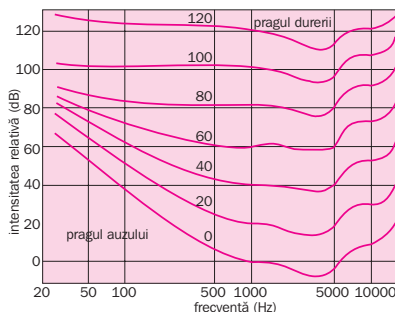


Fig. 4. Nivelul intensității sonore, în funcție de frecvența sunetelor percepute a fi de tărie egală.

În diagramă sunt reprezentate dependențe ale intensității sonore (în dB) în funcție de frecvența sunetului într-un interval cuprins între 0 și 120 dB, sunete percepute de ureche ca fiind de intensitate egală. Luând curba cea mai de jos ca prag al auzului, se poate,

compara intensitatea sonoră la 100 Hz și 1000 Hz. Urmărind axele verticale, constatăm că sunetul de 100 Hz este cu aproape 38 dB mai intens decât cel de 1000 Hz. Frecvență cea mai ușor de auzit este cea de 3300 Hz, în timp ce frecvențe foarte mici sau foarte mari trebuie să aibă intensități mai mari pentru a putea fi auzite.

Instrumente muzicale. Cum orice sunet are la origine o vibrație, rezultă că orice instrument care va produce într-un fel sau altul o vibrație va determina producerea unui sunet.

Corzile vibrante sunt fire flexibile fixate la capete. Ele sunt puse în mișcare prin frecare (vioară), lovire (pian), ciupire (chitară), iar frecvența sunetului produs depinde de lungimea corzii și de tensiunea din fir, conform relației stabilite în lecția precedentă:

$$v_k = \frac{kv}{2L} = \frac{k}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

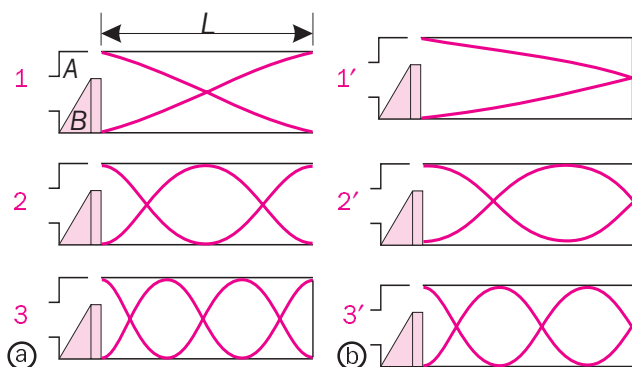
unde L este lungimea corzii vibrante, v este viteza sunetului în mediul respectiv ($v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$), μ este masa unității de lungime, iar T tensiunea din fir. În această expresie, k reprezintă numărul de fuse care se formează.

În cazul barelor și lamelor vibrante, vibrațiile depind nu numai de lungimea acestora ci și de aria și forma lamei respective. În cazul diapazonului, sunetul emis are o anumită frecvență, determinată de geometria acestuia, care corespunde de obicei notei „la” din gama diatonică (440 Hz) – fig. 5.



Fig. 5. Frecvențele sunetelor în gama diatonică (formată din tonuri și semitonuri naturale).

Tuburile sonore sunt tuburi cu pereții rigizi, care produc sunete când aerul din interiorul lor este făcut să vibreze. Un astfel de tub este format din camera de compresie A și tubul de rezonanță C (fig. 6).



Aerul, suflat în camera A, este obligat să iasă printr-un orificiu strâmt – unde lovește o pană B (buză), punând-o în vibrație. Se produce astfel un sunet care poate fi auzit și fără tubul de rezonanță. Tuburile sonore pot fi deschise la ambele capete (orgă) sau la un singur capăt (nai). În fig. 6 sunt reprezentate forma sunetului fundamental produs în astfel de tuburi și armonicile de ordinul doi și trei.

În cazul unui tub deschis la ambele capete, frecvențele de rezonanță sunt date de relația:

$$v_k = \frac{kv}{2L} \text{ pentru } k = 1, 2, \dots$$

iar în cazul celor deschise la un singur capăt:

$$v_k = \frac{kv}{4L} \text{ pentru } k = 1, 3, 5, \dots$$

În acest caz apar numai armonici impare.

Exemplu

Considerând viteza sunetului 345 m/s, determinați primele trei armonici într-un tub de lungime $L = 2,46$ m, dacă:

- tubul este deschis la ambele capete;
- tubul este deschis la un singur capăt;
- tubul este deschis la ambele capete, câte armonici sunt posibile în domeniul de frecvență: 20 Hz ÷ 20 kHz.

Rezolvare

a) se aplică relația: $v_n = \frac{kv}{2L}$.

Pentru $k = 1$ se obține: $v_1 = 70$ Hz.

Armonicile vor fi: $v_2 = 2v_1 = 140$ Hz

și: $v_3 = 3v_1 = 210$ Hz.

b) Se aplică relația: $v_n = \frac{kv}{4L}$ pentru $k = 1, 3, 5$

și se obține: $v_1 = 35$ Hz; $v_3 = 3v_1 = 105$ Hz

și: $v_5 = 5v_1 = 175$ Hz.

c) Se obțin 285 de armonici.

Fig. 6. Unde longitudinale într-un tub sonor deschis (a) (1 – prima armonică $v_1 = \frac{v}{2L}$, 2 – a doua armonică $v_2 = 2v_1$, 3 – a treia armonică $v_3 = 3v_1$) și, respectiv, închis (b) (1' – prima armonică $v'_1 = \frac{v}{4L}$, 2' – a doua armonică $v'_2 = 2v'_1$, 3' – a treia armonică $v'_3 = 3v'_1$).

Rezumat

- Sunetul este o undă mecanică longitudinală ce acoperă un spectru de frecvențe cuprins între 20 Hz și 20 KHz. Se pot distinge trei intervale diferite de frecvență: joasă frecvență (20 - 400 Hz); medie frecvență (400 - 1600 Hz) și înaltă frecvență (1600 - 20 kHz).
- Caracteristicile sunetului sunt: înălțimea, intensitatea și timbrul.
- Înălțimea sunetului este calitatea sunetului de a fi mai profund sau mai acut și depinde de frecvența oscilației sonore.
- Intensitatea (I) – este determinată de energia unei sonore, în unitatea de timp, prin unitatea de suprafață. $I = 2\pi^2\rho A^2v^2$ și are ca unitatea de măsură W/m^2 .
- Timbrul este caracteristica sunetului care permite diferențierea instrumentelor muzicale, chiar dacă acestea produc aceeași notă, pe baza armonicilor acestora.
- Urechea umană, organul care realizează detecția sunetului este formată din trei regiuni distincte: urechea externă, medie și internă.
- Tăria relativă a sunetului (β) este dată de relația:

$$\beta = 10 \lg \left(\frac{I}{I_0} \right),$$

unde $I_0 = 10^{-12} W/m^2$ este intensitatea sunetului la pragul de audibilitate, iar I intensitatea sunetului considerat. (Se măsoară în decibeli dB.)



- Corzile vibrante sunt fire flexibile fixate la capete.
- Frecvența sunetului produs depinde de lungimea acestora (L) și de tensiunea din fir (T):

$v = \frac{kv}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ $k = 1, 2, 3, \dots$, unde μ este masa unității de lungime, L este lungimea corzii vibrante, v este viteza sunetului în mediul respectiv, iar k reprezintă numărul de fuse care se formează. Pentru $k = 1$ se obține frecvența fundamentală, iar pentru $k = 2, 3, \dots$, armonicile de ordinul 2, 3 etc.

- Tuburile sonore sunt tuburi cu pereți rigizi, care produc sunete când aerul din interiorul lor este făcut să vibreze. Un astfel de tub este format din camera de compresie A și tubul de rezonanță.

- În cazul tuburilor închise frecvențele produse sunt date de relația $v_k = \frac{kv}{2L}$, unde $k = 1, 2, \dots$, iar pentru cele deschise, $v_k = \frac{kv}{4L}$, unde $k = 1, 3, 5, \dots$.



Verificați-vă cunoștințele

1. Care din următoarele afirmații referitoare la sunet sunt adevărate:
 - a) caracteristicile sunetului perceput de ureche sunt: înălțimea, intensitatea și timbrul;
 - b) înălțimea sunetului nu depinde de frecvența oscilației;
 - c) intensitatea sonoră depinde de mărimile care caracterizează sursa sonoră;
 - d) intensitatea sonoră nu depinde de caracteristicile mediului de propagare.
2. Care sunt limitele între care sunt cuprinse sunetele?
 - a) 20 kHz ÷ 100 kHz;
 - b) 100 Hz ÷ 1000 Hz;
 - c) 20 Hz ÷ 20 kHz.
3. Un fir de sârmă cu lungimea 0,8 m este întins între două puncte fixe. Frecvența lui fundamentală este de 150 Hz. Stabiliți viteza undei în fir. Dacă tensiunea maximă la care poate fi supus firul înainte de a se rupe este $1,6 \cdot 10^9 N/m^2$, care va fi frecvența fundamentală cea mai înaltă de vibrație ce poate fi produsă de creșterea tensiunii? Se da densitatea oțelului $8 \cdot 10^3 kg/m^3$.
4. Stabiliți primele patru armonici ale unei corzi în lungime de 1 m, având masa unității de lungime de $2 \cdot 10^{-3} kg/m$,

când tensiunea din fir este de 80 N. Care este tensiunea din coardă dacă frecvența fundamentală crește la 120 Hz?

5. Calculați frecvența sunetelor emise printr-un tub deschis și prin altul închis, cu lungimea de 1 m, dacă se produce un sunet fundamental.

6. Care este tensiunea dintr-un fir metalic, cu lungimea de 3 m și densitatea liniară de 5 g/cm dacă, apăsându-l în centrul său, este emis un sunet fundamental de 50 Hz?

7. Frecvența fundamentală a unui tub de orgă, deschis la ambele capete, corespunde sunetului „mi” (261,6 Hz) pe scala muzicală cromatică. Cea de-a treia armonică a unui tub de orgă, închis la unul din capete, are aceeași valoare. Care sunt lungimile celor două tuburi?

8. Un tub deschis la ambele capete, de 2 m lungime, are la 410 Hz o frecvență de rezonanță, iar la 492 Hz – următoarea rezonanță. Care este viteza sunetului în coloana de aer din tub?

9. Într-o zi de lucru, nivelul mediu al intensității sonore al unei străzi este de 100 dB, când este parcursă, într-un minut, pe o transversală a sa, de 100 de mașini. Dacă la sfârșit de săptămână numărul acestora scade cu 25 în fiecare minut, care va fi nivelul sonor al străzii?

La întâlnirea unui obstacol de către o undă, pe lângă fenomene ca reflexia sau refracția, poate apărea și difracția undei.

Față de refracție, care implică la rândul-i o schimbare a direcției de propagare, în cazul difracției abaterea de la direcția inițială se produce în același mediu și nu ca urmare a trecerii undei dintr-un mediu în altul.

Dicționar

Difracție: Abaterea unei unde de la direcția inițială de propagare la trecerea de un obstacol.

Laborator

Materiale necesare:

- bazin cu apă;
- vibrator;
- riglă de plastic;
- obstacole de diferite mărimi.

1. Difracția pe un obiect

• Se realizează unde paralele în bazinul cu apă cu ajutorul unui oscilator similar celui utilizat în experimentul de la pag. 54, de care se conectează o riglă de plastic.

• Dacă în fața acestor unde se pune un obstacol plan cu dimensiuni variabile, se obțin situații de propagare ca în fig. 1.

Observație: Când obstacolul are dimensiuni comparabile cu lungimea de undă a undei, difracția este mai intensă. Pare că unda a ocolit obstacolul respectiv.

2. Difracția pe o fantă

Dacă în locul obiectului din experimentul 1 în calea undei se pune o fantă reglabilă, se obțin situații de

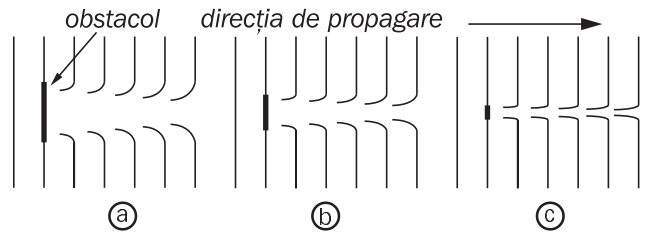


Fig. 1. Difracția pe un obstacol.

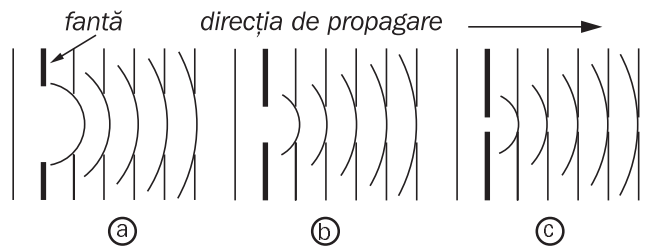


Fig. 2. Difracția pe o fantă.

propagare ca în fig. 2.

Observație:

Reducerea dimensiunilor fantei, astfel încât aceasta să devină comparabilă cu lungimea de undă a undei evidențiază mai bine fenomenul.

Fenomenul de difracție este cu atât mai vizibil cu cât dimensiunile obstacolului/fantei prin care se produce difracția, devin mai apropiate ca dimensiuni de lungimea de undă a undei respective.

Explicarea fenomenului este dată de *Principiul Huygens*. Odată ajuns la nivelul obstacolului/fantei, frontul de undă poate fi interpretat ca o mulțime de noi oscilatori ce oscilează în fază. Fiecare dintre acești

oscilatori va produce unde circulare la suprafața apei, a căror înfășurătoare formează noul front de undă.

Dacă în cazul obstacolelor mici, acestea sunt practic înconjurate de noul front de undă, semicircular, cu creșterea dimensiunilor acestuia, vor exista domenii, la mijlocul acestor corpuri, pentru care nu se pot forma unde liniare.



Verificați-vă cunoștințele

1. Urmăriți fenomenul de difracție în cazul undelor circulare – se înlocuiește dispozitivul cu riglă cu unul circular (o bară metalică).

2. Realizați diagramele de propagare în cazul utilizării unor obstacole/fante de mărimi diferite.

3. Cum se produce propagarea?

4. De cine este influențată difracția?

Dincolo de limitele de audibilitate ale urechii umane se întind domeniile de frecvențe ale ultrasunetelor (la limita superioară) și infrasunetelor (la cea inferioară).

Ultrasunetele

Ultrasunetele sunt unde sonore cu frecvențe de peste 20 kHz. Aceste frecvențe sunt utilizate de unele viețuitoare. Liliicii, de exemplu, emit semnale ultrasonore scurte cu frecvențe cuprinse între 30 – 60 kHz. O parte din aceste semnale sunt recepționate în urma reflexiei pe diferitele corpuri din mediu ca ecouri. În acest fel liliacul va realiza o hartă sonoră a mediului în care trăiește putând detecta obstacolele sau hrana aflată în mișcare.

Principalele modalități de producere a ultrasunetelor cu importanță practică utilizează efectele: *piezoelectric* și *magnetostrictiv*.

Efectul piezoelectric - pe fețele unui cristal (turmalină, titanat de bariu sau stronțiu) supus la deformări de tracțiune sau comprimare apar sarcini electrice egale, de semne contrare. Aceste sarcini electrice își schimbă semnul dacă se înlocuiește tracțiunea prin comprimare și invers.

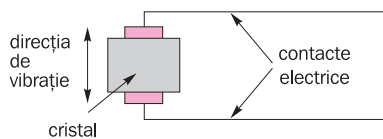


Fig. 1.
Generator
piezoelectric.

Partea esențială a unui generator piezoelectric o reprezintă lama piezoelectrică pe fețele căreia sunt aplicați doi electrozi (straturi subțiri metalice) legați la o sursă de tensiune alternativă. Sub acțiunea câmpului electric alternativ lama vibrează cu o frecvență egală cu cea a tensiunii aplicate. Vibrațiile lamei sunt transmise mediului înconjurător sub formă de ultrasunete. Astfel de generatori ajung la frecvențe de circa 150 MHz și intensități ale radiației ultrasonore de până la câteva sute de W/cm².

Efectul piezoelectric invers (electrostricțiunea)

- constă în dilatări și comprimări succesive ale cristalului sub acțiunea unui câmp electric alternativ. Și prin acest efect sunt produse ultrasunete.

Efectului magnetostrictiv - constă în deformarea corpurilor feromagnetice (fier, nichel, cobalt) sub acțiunea unui câmp magnetic. Introducând o bară de nichel (Ni) într-un câmp magnetic (produs de exemplu de o bobină), paralel cu lungimea ei, aceasta se scurtează. Variația periodică a câmpului magnetic determină o variație periodică a lungimii barei. În cazul

unor frecvențe mari ale câmpului alternativ vibrațiile capetelor barei dau naștere la ultrasunete.

Proprietăți ale ultrasunetelor:

- Deoarece lungimea unei emise este mai mică decât dimensiunile liniare ale sursei, ultrasunetele pot fi emise și se propagă sub formă de fascicule, spre deosebire de sunetele obișnuite care se împrăștie în toate direcțiile.

- Fenomenul de difracție nu apare decât pentru obstacolele de dimensiuni foarte mici, în timp ce sunetele obișnuite ocolesc practic aproape orice obstacol.

- Ultrasunetele suferă reflexie și refracție la suprafața de separare a două medii ca și celelalte unde – pe această bază au fost construite oglinzi concave sau lentile speciale care să realizeze focalizarea acestora.

- Din proporționalitatea intensității cu pătratul frecvenței rezultă că energia ultrasunetelor este mult mai mare decât energia sunetelor cu o aceeași amplitudine.

- Absorbția în mediu, fenomen care apare la propagarea tuturor oscilațiilor elastice devine în cazul ultrasunetelor foarte importantă. După cum s-a arătat, intensitatea unei unde elastice scade cu distanța de la sursă după o lege exponențială de tipul

$$I = I_0 e^{-kx},$$

unde k depinde atât de caracteristicile mediului (densitate, vâscozitate, căldură specifică etc.), cât și de frecvența undei. Din cauza frecvențelor mari ale acestor unde, scăderea va fi rapidă, astfel încât propagarea ultrasunetelor nu se realizează pe distanțe mari (la o frecvență de circa 3000 kHz absorbția este practic completă, la o distanță de cca. 0,6 cm). În lichide și solide, ca urmare a scăderii coeficientului de absorbție față de aer, ultrasunetele sunt mult mai puțin atenuate.

- La propagarea în lichide a ultrasunetelor apare uneori fenomenul de **cavitație ultrasonoră**.

Dicționar

Cavitație: Fenomen specific lichidelor, cavitația apare sub influența unor tensiuni interne locale sau a unor variații rapide de presiune. Constă în apariția unor cavități de vapori în interiorul lichidului. Cavitația poate fi hidraulică sau ultrasonoră.

În cazul cavitației ultrasonore, variațiile locale de presiune ce însoțesc propagarea undei ultrasonore duc la formarea unor cavități, cu predilecție în punctele în

care există particule în suspensie, aer sau vapori. Acestea sunt rapid umplute cu gazele dizolvate în lichid sau cu vaporii lichidului respectiv. În semiperioada următoare în aceleași locuri în care au apărut cavitațiile iau naștere presiuni de ordinul a $10^8 - 10^{11}$ Pa, creșteri locale de temperatură sau descărcări electrice. În final, cavitatea se distruge dând naștere unei unde de șoc. Apariția efectului este condiționată de gradul și puritatea lichidului, presiunea și frecvența undelor ultrasonore.

Temă în clasă:

Identificați prin studiu individual din diverse surse efecte și aplicații ale cavitației.

Aplicații ale ultrasunetelor

Proprietățile ultrasunetelor permit folosirea lor într-o mare varietate de aplicații practice.

- Ultrasunetele produc încălzirea substanței din celulele vii ceea ce duce la folosirea lor terapeutică - încălzirea unor țesuturi.
- Conservarea alimentelor – prin folosirea unor ultrasunete de frecvență și intensitate potrivită cu efect în distrugerea microorganismelor.
- Măsurarea unor distanțe în topografie. În esență procedeul este același ca și în cazul folosirii sunetelor obișnuite, prezentând însă avantajul fasciculelor dirijate. De asemenea se pot produce semnale foarte scurte ceea ce mărește precizia măsurării intervalului de timp dintre producerea semnalului direct și înregistrarea celui reflectat.
- Utilizare în procese tehnologice, cum ar fi: spălarea/curățarea, uscarea, sudarea unor corpuri, prelucrarea unor piese. În principiu, prelucrarea cu ajutorul ultrasunetelor are la bază fenomenul de cavitație. În cazul operațiunilor de curățare de pildă, datorită șocurilor hidraulice particulele de abraziv sunt lovite cu putere de suprafața piesei smulgând așchii din aceasta.

Defectoscopia ultrasonoră este un proces care utilizează ultrasunetele pentru detectarea defectelor înteme, de structură (fisuri, goluri), dintr-un material sau o piesă prelucrată. Principalele tipuri de defectoscoape ultrasonore utilizează transmisia (fig. 2) sau reflexia (fig. 3).

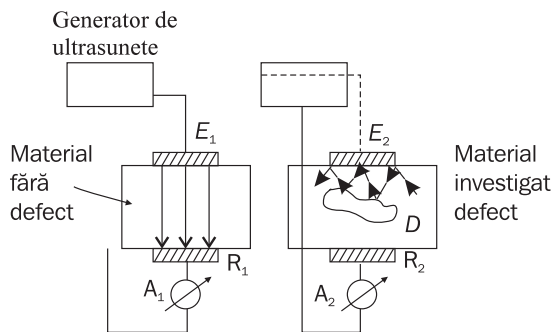


Fig. 2. Defectoscop prin transmisie.

La defectoscopul prin transmisie emițătorul și receptorul de ultrasunete sunt situate de o parte și de alta a piesei. Dacă între emițător (E_1) și receptor (R_1) nu există nici un defect semnalul ultrasonor transmis trece neatenuat producând o anumită deviație a acului aparatului de înregistrare (A_1). În cazul în care întâlnește un gol (D) o parte a semnalului ultrasonor este reflectat pe suprafața de separare dintre metal și aerul din golul respectiv și semnalul este mult atenuat ceea ce este indicat de înregistratorul (A_2).

Metoda are două inconveniente: 1) reflexia ultrasunetelor pe fețele opuse ale piesei îngreunează observarea defectelor; 2) procedeul nu permite stabilirea adâncimii în material la care se găsesc defectele. Aceste inconveniente sunt în bună măsură eliminate de defectoscopul prin reflexie.

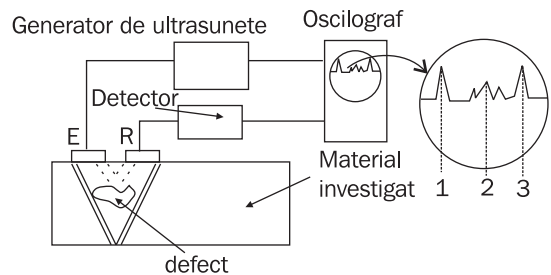


Fig. 3. Defectoscop prin reflexie.

La defectoscopul prin reflexie, emițătorul și receptorul sunt situate de aceeași parte a piesei unul lângă altul. Ultrasunetele se propagă prin piesă, ajung la fața opusă unde sunt reflectate și apoi revin la receptor. Dacă în piesă există un defect, semnalul ultrasonor se reflectă de acesta și ajunge la receptor mai devreme față de semnalul reflectat de fața opusă. Emițătorul generează impulsuri scurte la intervale lungi, constante, care împreună cu semnalul reflectat, sunt marcate pe ecranul unui oscilograf. Dacă 1 și 3 indică locurile unde spotul ultrasonor are devieri bruște care marchează momentele în care a fost emis/receptat semnalul ultrasonor, 2 indică primirea unui semnal reflectat de un defect. Poziția relativă a acestui semnal în raport cu 1 și 3 permite determinarea adâncimii la care se găsește defectul.

Ca metodă de diagnostic în medicină, ultrasunetele sunt direcționate spre organul investigat. Datorită reflexiei parțiale a ultrasunetelor atunci când acestea întâlnesc suprafața de separație dintre două medii cu densități diferite pe monitorul unui computer va apărea imaginea respectivului organ.

Cu ajutorul ultrasunetelor se pot examina diferite organe interne. Comparativ cu razele X, utilizarea ultrasunetelor prezintă mai puțin risc (malformații, produce-

rea cancerului). În această tehnică, ultrasunetele sunt emise ca impulsuri, astfel încât același cristal poate fi utilizat atât ca emițător cât și ca detector. Sunetul recepționat de la organ este transformat în semnal electric, care este apoi convertit în imagine pe monitor.

Infrasunetele

Infrasunetele au frecvențe prea mici pentru a putea fi percepute de urechea umană. Infrasunetele sunt produse pe cale naturală de spargerea valurilor de țărnm, furtuni, curenți atmosferici (30 – 40 Hz), cutremure, meteoriții care intră în atmosferă. Tuburile lungi de orgă din marile catedrale produc deasemenea infrasunete. Alte surse de infrasunete includ aurora boreală (0,1 – 0,01 Hz), vânturile solare, curenți de aer din unele peșteri (20 - 30 Hz), etc. Unele structuri produse de om cum ar fi motoarele mijloacelor de transport produc infrasunete.

Infrasunetele, deși sunt sub pragul de audibilitate al urechii umane, pot fi detectate de către viețuitoare. Unele păsări, de exemplu, au capacitatea de a prevedea furtunile. Elefanții utilizează infrasunetele (12 – 35 Hz) pentru a comunica la mari distanțe (10 – 20 km), ca și balenele care-și transmit mesaje la frecvențe joase, la mari distanțe, în mediul acvatic. Efectul paralizant al răgetului unui tigru se spune că s-ar datora frecvențelor din gama infrasunetelor (în jur de 18 Hz, frecvența de rezonanță a globului ocular uman, care produce alarmarea).

Deoarece infrasunetele nu sunt absorbite în aceeași măsură ca undele sonore, acestea se pot propaga pe distanțe lungi. Factorul determinant în acest sens este conducția termică care descrește cu frecvența undei. De exemplu, pe Pământ 99% dintr-un sunet de 1 kHz este absorbit de atmosferă după parcurgerea unei distanțe de circa 7 km, în timp ce, în cazul unei unde cu frecvența de 1 Hz distanța crește la peste 3000 km. Alți factori la fel de importanți sunt legați de temperatură și structura vânturilor atmosferice. Inversiile de temperatură și vânturile determină reflexia și refracția infrasunetelor astfel încât aceste emisii pot fi ghidate de jur împrejurul Pământului prin reflexii între partea superioară a atmosferei și sol. Efectul este similar recepției pe distanțe mari a undelor radio cu lungimi de undă scurte ca urmare a reflexiei acestora pe ionosferă.

Aplicații

• *Studiul infrasunetelor generate de diferite fenomene naturale poate determina mai profunda lor înțelegere.* De exemplu, aurora boreală, erupțiile vulcanice și taifunul, generatori de infrasunete pot fi studiați pe baza recepției și analizei undelor infrasonore generate de aceste fenomene.

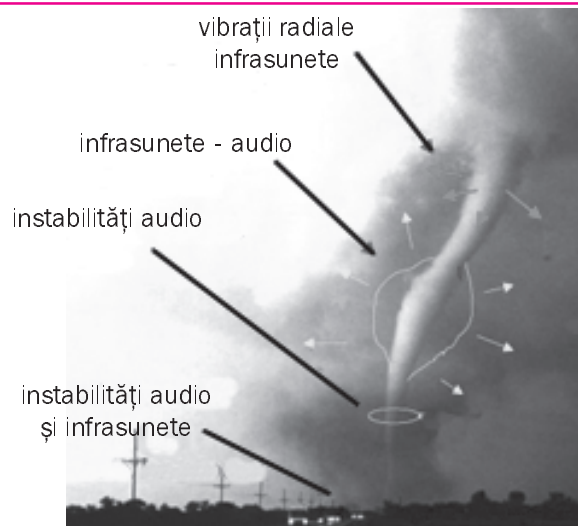


Fig. 4. Tornadele sunt surse recunoscute de infrasunete.

• *Utilizarea infrasunetelor pentru detectarea poziției, intensității și a altor caracteristici ale surselor din care provin.* De exemplu, recepția infrasunetelor unei explozii nucleare, a unei rachete sau a unui taifun pot determina stabilirea coordonatelor acestora.

• *Prevederea unor dezastre naturale* - precum erupțiile vulcanice, cutremurele, turbulențele aerului, erupția sondelor petroliere și altele pot produce infrasunete înainte de declanșare, astfel încât, pe baza detecției acestora, producerea lor devine predictibilă.

• *Monitorizarea activității atmosferice.* Infrasunetele sunt influențate de starea atmosferei în timpul propagării, iar această influență este strâns legată de temperatură și vânturi. Prin măsurarea proprietăților de propagare ale undelor infrasonore generate de surse naturale sau artificiale, pot fi detectate unele caracteristici ale fenomenelor meteorologice. Marele avantaj al metodei este acela că detecția și monitorizarea atmosferei poate fi făcută continuu.

• *Studiul proprietăților undelor infrasonore pe baza măsurării influenței asupra acestora a altor unde ce se propagă prin atmosferă.* De exemplu, infrasunetele, trecând prin ionosferă produc perturbații ale acesteia. Aceste perturbații determină distorsiuni ale propagării undelor electromagnetice. Măsurarea parametrilor legați de astfel de distorsiuni pot furniza informații privind infrasunetele. Similar, măsurând parametrii interacțiunii dintre infrasunete și alte tipuri de unde, pot fi studiate comportamente ale celor din urmă.

Organismul uman nu numai că dă răspunsuri caracteristice la infrasunete (tabelul 1), dar poate genera prin intermediul unora dintre organe infrasunete slabe. Măsurarea proprietăților acestor infrasunete dau informații cu privire la starea activității organismului.

Tabelul 1

Frecvență (Hz)	Efecte
100 - 200	Iritație, grețuri, tremurături, amețeli, anxietate, oboseală extremă.
70 - 100	Senzații greu tolerabile în zona toracică, schimbări ale ritmului respirator, grețuri.
60 - 70	Presiune sternală, salivație excesivă, dureri la înghițire, de cap și abdominale; post expunere: tuse și oboseală.
30 - 60	Lipsa acuității vizuale, distorsionări ale orientării spațiale, coordonare musculară slabă, pierderi de echilibru etc.
1 - 30	Activitatea intelectuală este inhibată, blocată și apoi distrusă. Activitatea medulei este blocată, încetând funcționarea autonomă a acesteia. Frecvența letală este în jur de 7 Hz, frecvență care corespunde cu frecvența undelor alfa ale creierului și frecvența de rezonanță a organelor interne ceea ce determină ruperea acestora și instalarea morții. Creșterea temperaturii corpului până la atingerea unor temperaturi letale, deshidratare, microleziuni ale țesuturilor.

• Dezvoltarea unor generatoare de infrasunete de mare putere, ca urmare a efectelor pe care infrasunetele de frecvență joasă și intensitate mare le au asupra organismului uman pot determina numeroase aplicații militare printre care și așa numitele

„gloanțe acustice” al căror efect asupra țintei umane poate fi cuprins de la disconfort la moarte. Datorită posibilităților de propagare la distanțe mari și a mării capacități de penetrare, infrasunetele pot fi utilizate ca arme ofensive.

Rezumat

• Ultrasunetele se întind pe domenii de frecvențe la limita superioară a pragului de audibilitate a urechii umane, iar infrasunetele la cea inferioară. Ultrasunetele pot fi generate pe baza efectului piezoelectric sau a celui magnetostriktiv.

• Proprietăți ale ultrasunetelor, precum: emisia fasciculară, difracție slabă, energie mult mai mare decât a sunetelor obișnuite cu o aceeași amplitudine, absorbția foarte puternică în gaze, cavitația ultrasonoră în lichide, determină o serie de aplicații în domenii precum: medicină și alimentație (conservarea alimentelor), tehnică

– controlul defectoscopic al materialelor, măsurarea unor distanțe etc.

• Infrasunetele sunt produse atât pe cale naturală (fenomene atmosferice, cutremure, vulcani activi etc.), cât și artificială (motoare, vibrații ale unor sisteme tehnice). Absorbția este slabă, infrasunetele propagându-se pe distanțe lungi.

Se pot utiliza în cercetarea unor fenomene naturale care produc aceste unde: detectarea prezenței acestora, industria militară, ca urmare a efectelor nocive pe care le pot avea asupra organismelor vii.



Verificați-vă cunoștințele

1. Care dintre următoarele afirmații referitoare la ultrasunete sunt adevărate

- Sunt produse cu frecvențe sub 20 kHz.
- Produc fenomenul de cavitație în corpurile solide.
- Sunt utilizate în defectoscopie.
- Au energii mai mari decât ale unei radiații sonore de aceeași amplitudine.

2. Realizați un referat cu tema: „Cavitația – descriere și aplicații”.

3. Identificați, pe baza proprietăților ultrasunetelor, posibilități de aplicație ale acestora în domeniul medical.

4. Realizați un poster de prezentare a uneia dintre aplicațiile infrasunetelor.

5. Care dintre următoarele afirmații referitoare la infrasunete sunt adevărate:

- Pot fi produse pe cale naturală de valuri și vânturi.
- Sunt absorbite mai rapid decât undele sonore.
- La anumite frecvențe produc distrugerii ale organismului uman.
- Se propagă pe distanțe scurte.

6. Realizați un referat cu tema: „Aplicații meteorologice ale infrasunetelor”.

7. Ce efecte au infrasunetele asupra organismului uman?

8. Cum sunt utilizate ultra și infrasunetele în lumea animală?

9. Vasele de pescuit utilizează sonarele pentru a detecta bancurile de pești. Dacă ecoul unui impuls sonor este detectat la 0,1 s după emisie, iar viteza sunetului în apa marină este 1500 m/s, determinați: a) la ce adâncime se află bancul de pești? b) unde a ajuns semnalul în 0,1 s? c) de ce semnalul reflectat durează mai mult decât cel emis?

- 2.1. Circuitul RLC în curent alternativ
- 2.2. Oscilații electromagnetice libere. Circuitul oscilant
- 2.3. Câmpul electromagnetic
Unda electromagnetică
- 2.4. Clasificarea undelor electromagnetice
- 2.5. Aplicații








Capitolul 2

OSCILAȚII ȘI UNDE ELECTROMAGNETICE

2.1

Circuitul RLC în curent alternativ

Circuitele de curent continuu sau alternativ reprezintă o combinație de elemente pasive de circuit: rezistoare (——), bobine (——) și condensatoare (——) și a unui generator de tensiune continuă (——) sau alternativă (——).

Dacă în cazul generatorului de tensiune continuă, tensiunea este constantă (U), în cazul celui alternativ, polaritatea tensiunii se schimbă. Valoarea ei instantanee

este de forma:

$$u = U_M \sin 2\pi vt = \sqrt{2}U \sin 2\pi vt,$$

unde U_M este valoarea maximă a tensiunii, U valoarea ei efectivă, iar v frecvența fenomenului oscilatoriu.

Să sintetizăm în experiențele următoare rolul fiecăruia dintre elementele pasive de circuit în circuitele de curent continuu sau alternativ, prin modificările pe care acestea le aduc tensiunii sau intensității curentului.

A. Rezistorul în curent continuu și alternativ

Laborator

Materiale necesare:

- generator de curent continuu (c.c.) și alternativ (c.a.);
- rezistor;
- osciloscop cu spot multiplu;
- ampermetru/voltmetru în c.c. și c.a.;
- condensatoare de legătură.

1. Rezistorul în curent continuu

Se realizează, utilizând generatorul de curent continuu, dispozitivul din fig. 1.

Pentru măsurarea tensiunii și a curentului electric

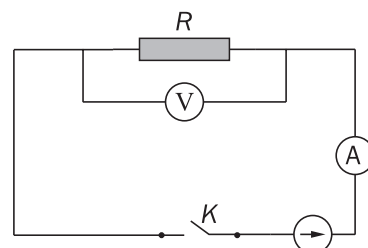


Fig. 1.

se introduc în circuit ampermetrul (legat în serie cu rezistorul) și voltmetrul (legat în paralel la bornele acestuia) în regimul de funcționare continuu.

- La închiderea comutatorului K se citesc indicațiile instrumentelor de măsură.

- Prin aplicarea legii Ohm pe o porțiune de circuit, se determină valoarea R a rezistenței electrice a rezistorului: $R = \frac{U}{I}$.

2. Rezistorul în curent alternativ

- Se realizează un circuit format din rezistorul de studiat, generatorul de tensiune alternativă și un osciloscop cu spot multiplu, ultimul cu rolul de a măsura și vizualiza intensitatea curentului și tensiunea electrică alternativă de pe rezistor. Pe ecranul acestuia, la închiderea întrerupătorului, apare imaginea intensității curentului și tensiunea alternativă aplicată (fig. 2).

Observație: În circuitul de curent alternativ care conține doar un rezistor, tensiunea și intensitatea curentului oscilează în fază.

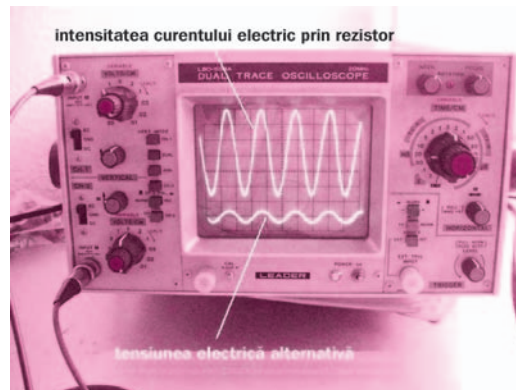


Fig. 2.

Să discutăm pe scurt diagrama curent/tensiune în raport cu timpul (fig. 2). Se observă că sensul curentului în circuit se modifică după un interval de timp constant, iar amplitudinea maximă este aceeași, indiferent de orientarea curentului. Sensul curentului nu are însă nici un efect asupra comportării rezistorului în circuit. Trecerea curentului prin rezistor, indiferent de sens, va determina în urma interacțiunilor dintre electronii și atomii rețelei, încălzirea acestuia. Transferul de energie realizat în urma acestor ciocniri este dependent doar de intensitatea curentului. Dacă cuantificăm acest transfer de energie în căldura Q , aceasta va fi dată de:

$$Q = i^2 R,$$

unde i este valoarea instantanee a intensității curentului. Cum efectul de încălzire este proporțional cu pătratul intensității curentului, sensul curentului nu va avea nici o influență asupra încălzirii. Efectul de încălzire, produs de un curent alternativ cu intensitatea maximă I_m nu va fi însă același cu al unui curent continuu de aceeași intensitate. Aceasta deoarece valoarea I_m , a curentului alternativ este doar una instantanee. Ceea ce este important în cazul curentului alternativ este valoarea medie a curentului care produce același efect termic cu al unui curent continuu.

Din forma sinusoidală a graficului $i = i(t)$ (fig. 2) rezultă că valoarea instantanee (i) a curentului este dată de:

$$i = I_m \sin \omega t,$$

de unde:

$$i^2 = I_m^2 \sin^2 \omega t.$$

Făcând observația că graficul funcțiilor sinus și cosinus sunt identice pe același interval de timp se poate scrie că:

$$(\sin^2 \omega t)_{\text{med}} = (\cos^2 \omega t)_{\text{med}}$$

Utilizând relația $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$

$$\text{rezultă } 2 \sin^2 \omega t = 1 \text{ sau } \sin^2 \omega t = \frac{1}{2}.$$

Substituind în expresia lui i^2 rezultă:

$$(i^2)_{\text{med}} = \frac{I_m^2}{2} = i^2 \Rightarrow i = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m$$

Cu i s-a notat valoarea efectivă a intensității curentului.

Și pentru tensiune se pot face observații similare, ceea ce conduce la o relație între valoarea efectivă a tensiunii (U) și cea maximă (U_m) de tipul:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 U_m,$$

Legea lui Ohm pentru o porțiune de circuit,

$$U = IR,$$

rămâne valabilă în cazul circuitului de curent alternativ cu rezistor, pentru valorile efective ale curentului și tensiunii alternative. Comportarea rezistorului în curent alternativ este similară celei în curent continuu.

B. Condensatorul în curent continuu și alternativ

Dacă una dintre armăturile metalice ale condensatorului (fig. 3), este încărcată cu sarcină pozitivă (A), aceasta va determina o redistribuire a sarcinilor electrice libere din cea de-a doua armătură (B) determinând un exces de sarcini negative pe fața apropiată de armătura (A). Sarcinile pozitive de pe fața opusă (din B) vor fi neutralizate prin legarea la pământ a acestei armături.

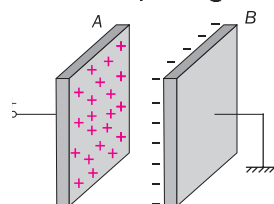


Fig. 3.
Fenomene fizice într-un condensator.

Laborator

Condensatorul în curent continuu și alternativ (circuit serie RC)

Materiale necesare:

- generator de curent continuu și alternativ;
- condensator;
- rezistor;
- osciloscop cu spot multiplu;
- ampermetru și voltmetru.

• Se realizează circuitul din fig. 4a.
 • La închiderea comutatorului K se urmăresc indicațiile ampermetrului și ale voltmetrului comutate în regim de funcționare în curent continuu.

Observații: La închiderea comutatorului, acul ampermetrului va avea o deviație revenind apoi la zero. Voltmetrul va indica tensiunea electrică de pe armăturile condensatorului.

- Se realizează circuitul din fig. 4b.
- Se leagă în circuit osciloscopul cu spot multiplu.

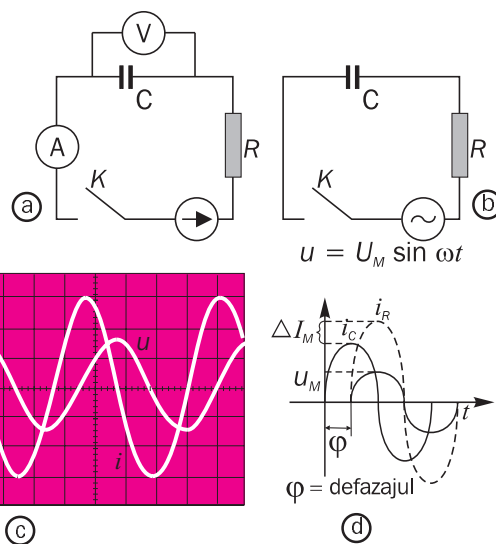


Fig. 4.

Pe ecranul acestuia va apărea atât imaginea tensiunii alternative (fig. 4c), cât și cea a curentului alternativ reprezentată în diagrama din fig. 4d.

Conectat într-un circuit de curent continuu, imediat ce comutatorul K este închis (fig. 4a), condensatorul, inițial descărcat, se încarcă cu sarcină electrică. La închiderea comutatorului în circuit, ia naștere un curent electric a cărui intensitate scade pe măsura acumulării de sarcină electrică pe armăturile condensatorului. Pe măsură ce crește sarcina electrică acumulată pe armături, crește simultan și tensiunea pe armături, ceea ce duce la scăderea curentului prin circuit la zero. Deci, într-un circuit de curent continuu, condensatorul limitează, și apoi împiedică, după un timp scurt, trecerea curentului electric prin circuit.

Ce se întâmplă însă în curent alternativ?

Din menținerea imaginii curentului și tensiunii pe ecranul osciloscopului un timp nedefinit rezultă că procesul nu este limitat temporar, ca în cazul circuitului de curent continuu, decât de eventuala decuplare a circuitului. Deci condensatorul permite trecerea curentului alternativ. Dacă vom considera cele două alternanțe ale curentului; pe alternanța pozitivă armăturile condensatorului se încarcă cu sarcină electrică într-un sens (sarcină negativă pe una dintre armături și pozitivă pe cealaltă), în timp ce pe alternanța negativă, schimbarea sensului curentului determină și schimbarea sensului de încărcare. Aceasta duce la descărcarea armăturilor de sarcinile inițiale și reîncărcarea cu sarcini de semn schimbat.

Urmărind diagrama variației în timp a curentului și tensiunii pe condensator (fig. 4d), în care s-a trasat

punctat și variația intensității curentului în circuitul fără condensator (i_R), se constată:

- o defazare înainte cu $\frac{\pi}{2}$ a curentului în raport cu tensiunea.

- o scădere a intensității maxime a curentului prin circuit. Aceasta se poate explica prin introducerea unei rezistențe aparente suplimentare în circuit prin intermediul condensatorului. Efectul rezistiv al condensatorului în circuitul de curent alternativ este exprimat de către mărimea numită **reactanță capacitivă** (X_C) definită ca:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C},$$

unde C este capacitatea electrică a condensatorului, iar ν este frecvența tensiunii generatorului.

Să aplicăm legea a II-a Kirchoff în cazul circuitului din figura 4b. Căderea de tensiune pe condensator (U_c) este:

$$U_c = \frac{q}{C},$$

iar legea a II-a Kirchoff se scrie:

$$u = \frac{q}{C} + Ri$$

tensiunea sursei
căderea de tensiune pe condensator
căderea de tensiune pe rezistor

Mărimile instantanee pentru tensiune și curent pot fi scrise în funcție de mărimile efective măsurate.

$$u = \sqrt{2}U \sin \omega t \quad \text{și} \quad i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \varphi).$$

Sarcina de pe armăturile condensatorului poate fi determinată plecând de la relația:

$$i = \frac{dq}{dt} = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \varphi).$$

Se poate arăta că sarcina q va fi dată de expresia:

$$q = \frac{\sqrt{2}I}{\omega} \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \text{ (Verificați!)}$$

Înlocuind valorile tensiunilor în Legea a II-a Kirchhoff, aceasta se scrie:

$$U \sin \omega t = RI \sin(\omega t + \varphi) + \frac{I}{\omega C} \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Relația poate fi reprezentată fazorial (fig. 5).

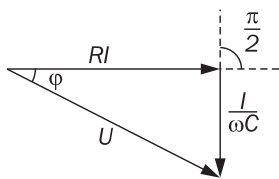


Fig. 5. Reprezentare fazorială a triunghiului tensiunilor într-un circuit serie RC.

Din triunghiul tensiunilor rezultă impedanța circuitului (Z):

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

și defazajul $\text{tg } \varphi = \frac{X_C}{R} = \frac{1}{R\omega C}$.

Permițând trecerea curentului alternativ, condensatorul poate fi utilizat pentru filtrarea componentei continue a curentului, respectiv a tensiunii electrice, față de componenta alternativă.

C. Bobina în circuitul de curent continuu și alternativ

Se știe că trecerea unui curent electric printr-o bobină determină apariția unui câmp magnetic. Dacă intensitatea curentului variază în timp, inducția magnetică în bobină va fi variabilă. Aceasta implică un flux magnetic variabil care va determina apariția fenomenului de autoinducție, adică inducerea unei tensiuni alternative, care să se opună variației fluxului magnetic inductor. Tensiunea indusă în bobină este dată de:

$$u = -L \frac{di}{dt},$$

adică depinde atât de caracteristicile bobinei prin inducția acesteia (L), cât și de viteza de variație a curentului ce parcurge bobina.

În cazul în care intensitatea curentului este constantă, neproducându-se fenomenul de autoinducție, ne așteptăm ca singura acțiune a bobinei în circuitul de curent continuu să fie datorată rezistenței electrice proprii a acesteia.

Laborator

Bobina în curent continuu și alternativ

Materiale necesare:

- generator de curent continuu și alternativ;
- ampermetru și voltmetru;
- bobină cu miez de fier mobil;
- conductoare de legătură;
- osciloscop cu spot multiplu.

• Se realizează circuitul din fig. 6a în care s-a legat sursa de curent continuu.

• Se măsoară intensitatea curentului din circuit și tensiunea pe bobina cu și fără miez de fier (cu instrumentele de măsură comutate pe regimul de funcționare corespunzător).

• Se realizează circuitul din figura 6b.

Observație: Instrumentele de măsură a curentului și tensiunii alternative sunt etalonate în valori efective.

• Se leagă în circuitul de curent alternativ osciloscopul cu spot multiplu pentru a vizualiza imaginea curen-

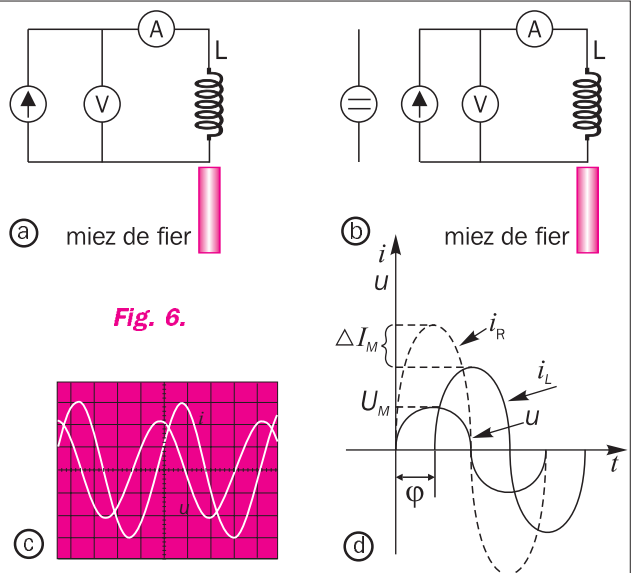


Fig. 6.

tului și a tensiunii pe bobină, cu și fără miez de fier.

• Diagrama curentului și tensiunii înregistrate de osciloscop este dată în figura 6c, d, comparativ cu intensitatea curentului din circuitul fără bobină (i_R).

Concluzii:

• În cazul măsurătorilor în curent continuu rezistența bobinei este mică și nu depinde de miezul de fier,

introducerea acestuia nemodificând datele furnizate de instrumentele de măsură.

• În curent alternativ intensitatea curentului scade, ceea ce semnifică introducerea unei rezistențe aparente de către bobină, rezistență dependentă de introducerea sau nu, a miezului de fier (mai mare în primul caz).

• Se observă o defazare a tensiunii în bobină cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea curentului.

Să aplicăm legea a II-a Kirchoff în cazul circuitului din figura 6a cu sursă de curent alternativ, ținând cont de rezistența electrică (R) a firului de sârmă din care este confecționată bobina. Legea a II-a Kirchoff pentru circuitul serie RL se scrie:

$$u + \left(-L \frac{di}{dt}\right) = Ri$$

tensiunea generatorului tensiunea autoindusă în bobină căderea de tensiune pe condensator

Mărimile instantanee ale tensiunii și curentului, în funcție de valorile efective, sunt:

$$u = \sqrt{2}U \sin \omega t$$

$$i = \sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi)$$

Viteza de variație a intensității curentului este:

$$\frac{di}{dt} = \frac{d(\sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi))}{dt} = \sqrt{2}I \omega \cos(\omega t - \varphi) = \sqrt{2}I \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Înlocuind expresiile tensiunii, intensității curentului și vitezei de variație a acestuia rezultă:

$$U \sin \omega t = RI \sin(\omega t - \varphi) + \omega LI \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

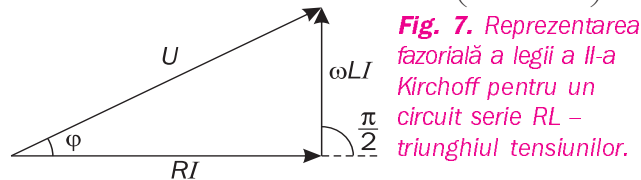


Fig. 7. Représentarea fazorială a legii a II-a Kirchoff pentru un circuit serie RL - triunghiul tensiunilor.

Dacă aplicăm teorema Pitagora în triunghiul tensiunilor:

$$U^2 = (RI)^2 + (\omega LI)^2,$$

se obține impedanța (Z) a circuitului:

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

Din definiția tangentei φ , rezultă defazajul:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R} = \frac{X_L}{R},$$

unde $X_L = \omega L$ poartă numele de **reactanță inductivă**. Ambele mărimi se măsoară în ohm (Ω).

Pe baza concluziilor experimentelor anterioare, utilizând reprezentarea fazorială, se pot analiza circuitele

de curent alternativ.

Să pomim de la cazurile cele mai simple: circuitul serie RLC și circuitul paralel RLC.

Circuitul serie cu rezistor, bobină și condensator (RLC)

Dacă într-un circuit de curent alternativ se montează în serie un rezistor, o bobină și un condensator, se obține un circuit serie RLC (fig. 8a).

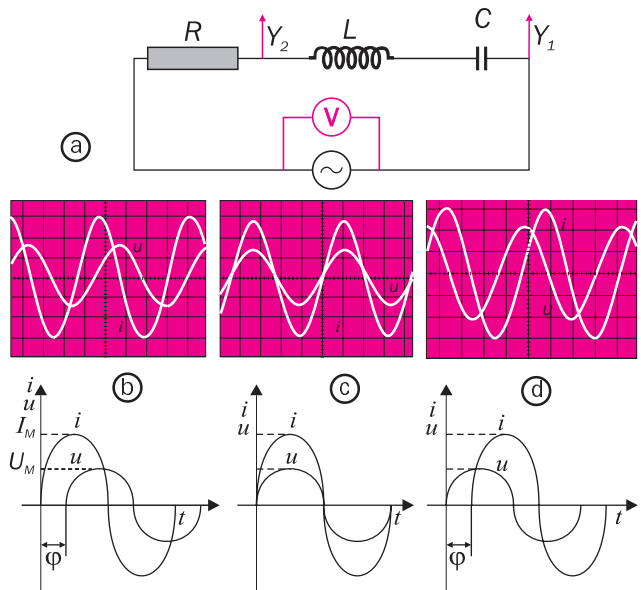


Fig. 8. Circuit serie RLC (a) și imaginile posibile obținute la osciloscop (b, c, d).

La osciloscop se va vizualiza variația în timp a curentului și a tensiunii conform uneia din figurile 8b, c sau d.

Pentru descrierea acestor posibilități, scriem ecuația teoremei a II-a a lui Kirchoff pentru circuitul din fig. 8.a.

$$u + \left(-L \frac{di}{dt}\right) = \frac{q}{C} + Ri$$

tensiunea generatorului t.e.m. de autoinducție a bobinei tensiunea pe armăturile condensatorului căderea de tensiune pe rezistor

Notând cu φ defazajul dintre curent și tensiune, mărimile instantanee vor fi:

$$u = \sqrt{2}U \sin \omega t$$

$$i = \sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\frac{di}{dt} = \sqrt{2}I \omega \cos(\omega t - \varphi) = \sqrt{2}I \omega \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Sarcina de pe armăturile condensatorului, se poate verifica, că este dată de relația:

$$q = -\frac{\sqrt{2}I}{\omega} \cos(\omega t - \varphi) = -\frac{\sqrt{2}I}{\omega} \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Înlocuind tensiunile în Legea a II-a Kirchoff pentru circuitul serie RLC, se obține:

$$U \sin \omega t = L \omega \sin \left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{I}{\omega C} \sin \left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2} \right) + R I \sin (\omega t - \varphi).$$

Observații:

- Dacă $\varphi > 0$, curentul este defazat în urma tensiunii.
- Dacă $\varphi < 0$, curentul este defazat înaintea tensiunii.

Diagramele fazoriale sunt reprezentate în fig. 9a, b, c.

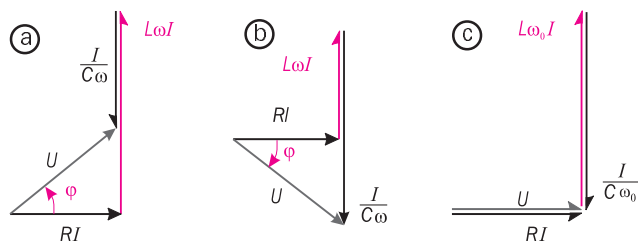


Fig. 9. Diagramele fazoriale ale circuitului RLC serie.

a) În cazul în care tensiunea autoindusă în bobină (U_L) depășește căderea de tensiune pe condensator (U_C) (adică $U_L > U_C$), efectul inductiv va fi predominant

($X_L > X_C$), iar intensitatea curentului este defazată în urma tensiunii ($\varphi > 0$) (fig. 9a).

b) În cazul în care tensiunea autoindusă în bobină (U_L) este mai mică decât căderea de tensiune pe condensator (U_C) (adică $U_L < U_C$), efectul capacitiv va fi predominant ($X_L < X_C$), iar intensitatea curentului este defazată înaintea tensiunii ($\varphi < 0$) (fig. 9b).

c) În cazul în care cele două tensiuni sunt egale, $U_L = U_C$, cele două efecte – inductiv și capacitiv – se vor compensa ($X_L = X_C$), iar curentul și tensiunea vor fi în fază (fig. 9c). Spunem că s-a realizat starea de rezonanță ($\varphi = 0$).

Pentru cazurile (a) și (b), din triunghiul tensiunilor (fig. 9a și b) se obține impedanța circuitului:

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

și:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R},$$

unde: $\omega L = X_L$ și $\frac{1}{\omega C} = X_C$ reprezintă reactanțele inductivă și respectiv, capacitivă.

Laborator

Studiul circuitului serie RLC – determinarea impedanței și a fazei circuitului

Materiale necesare:

- generator de tensiune alternativă (variabilă);
- voltmetru;
- bobină;
- osciloscop;
- rezistor;
- condensator;
- conductoare de legătură.

- Se realizează circuitul din fig. 10.

Măsurarea impedanței

• Se măsoară intensitățile efective ale curentului pentru diferite valori ale tensiunii, la două valori diferite ale frecvenței ($v_1 < v_2$).

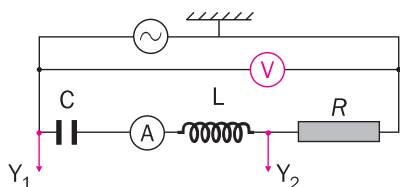


Fig. 10.

Frecvența (Hz)	U (V)	5	10	15	20
v_1	I_1 (A)				
v_2	I_2 (A)				

- Reprezentați grafic: $U_1 = f(I_1)$, pentru $v_1 = \text{ct.}$ și: $U_2 = f(I_2)$, pentru $v_2 = \text{ct.}$

- Măsurând panta graficelor, stabiliți valorile Z_1, Z_2 ale impedanței, în fiecare caz.

Măsurarea defazajului

- Se măsoară defazajul cu ajutorul osciloscopului cu dublu spot, astfel:
 - se stabilește frecvența generatorului de tensiune (de exemplu: 500 Hz) și valoarea corespunzătoare de baleiere a osciloscopului (exemplu: 0,5 ms/cm).
 - se leagă bornele Y_1 și Y_2 ale osciloscopului la punctele indicate în circuit. La Y_1 se observă tensiunea la bornele circuitului, iar la Y_2 tensiunea la bornele rezistorului. Imaginea obținută la osciloscop este cea din fig. 11.

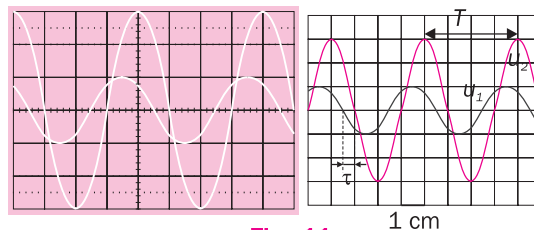


Fig. 11.

- Se verifică frecvența generatorului observând că, pe ecran, perioada (T) este de 4 cm.

Deci $T = 4 \times 0,5 = 2 \text{ ms}$; $v = \frac{1}{T} = 500 \text{ Hz}$.

- Măsurând decalajul în timp (τ) al celor două curbe, decalaj proporțional cu faza φ ($\varphi = 2\pi \frac{\tau}{T}$), stabiliți valoarea defazajului.

Exemplu

Unui circuit serie RLC, cu $R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$ și $L = 1 \text{ H}$, i se aplică o tensiune de 220 V , cu frecvența $\nu = 50 \text{ Hz}$. Determinați:

- impedanța circuitului;
- intensitatea maximă;
- defazajul;
- căderea de tensiune pe bobină, știind că ei îi corespunde un sfert din rezistența totală a circuitului.
- căderea de tensiune pe condensator.

Rezolvare

a) Impedanța circuitului RLC serie este:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

unde: $X_L = \omega L = 2\pi\nu L = 314 \text{ }\Omega$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C} = 3183 \text{ }\Omega$$

$$Z = 3038 \text{ }\Omega.$$

b) Din $Z = \frac{U}{I}$ se obține valoarea efectivă a intensității curentului: $I = \frac{U}{Z} = 0,07 \text{ A}$.

Între aceasta și intensitatea maximă există relația:

$$I = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$$

de unde: $I_{\max} = \sqrt{2}I = \frac{U\sqrt{2}}{Z} = 0,1 \text{ A}$.

c) Defazajul (φ) este: $\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} \approx -70^\circ$.

d) Impedanța bobinei este:

$$Z_L = \sqrt{X_L^2 + \left(\frac{R}{4}\right)^2} = 401 \text{ }\Omega,$$

iar tensiunea pe aceasta va fi: $U_L = Z_L I = 29 \text{ V}$.

e) $U_C = X_C I = 227,2 \text{ V}$.

Circuitul paralel RLC în curent alternativ

În cazul legării în paralel a unui rezistor, cu rezistența electrică R , a unei bobine de inductanță L și a unui condensator cu capacitatea C , și al cuplării acestui circuit la un generator de tensiune alternativă de frecvență ν (pulsatie $\omega = 2\pi\nu$), se obține un circuit RLC paralel (fig. 12).

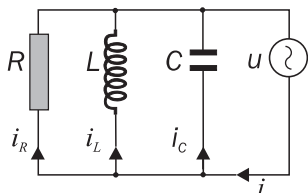


Fig. 12.
Circuit RLC paralel.

Dacă tensiunea generatorului este:

$$u = \sqrt{2}U \sin \omega t$$

prin cele trei ramuri ale circuitului se vor stabili curenții:

• prin rezistor: $i_R = \frac{\sqrt{2}U}{R} \sin \omega t$;

• prin bobină: $i_L = \frac{\sqrt{2}U}{X_L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$;

• prin condensator: $i_C = \frac{\sqrt{2}U}{X_C} \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Prin aplicarea primei teoreme Kirchoff, se obține curentul total, care are intensitatea:

$$i = i_R + i_L + i_C$$

Înlocuind valorile instantanee ale curenților în ecuația Legii I Kirchoff, rezultă:

$$I \sin(\omega t - \varphi) = \frac{U}{R} \sin \omega t - \frac{U}{X_L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{U}{X_C} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

În general, intensitatea curentului total și tensiunea generatorului nu vor fi în fază. Aici, cu φ s-a notat defazajul dintre cele două mărimi. Pentru stabilirea defazajului (φ) și a impedanței (Z) a circuitului, se utilizează și în acest caz metoda fazorială. De această dată, după cum se observă din ecuația legii I Kirchoff, pentru circuitul RLC paralel, tensiunea aplicată celor trei elemente ale circuitului este aceeași, variind intensitățile curenților prin ramurile circuitului. De aceea, se vor reprezenta fazorial curenții prin cele trei ramuri ale circuitului (fig. 13).

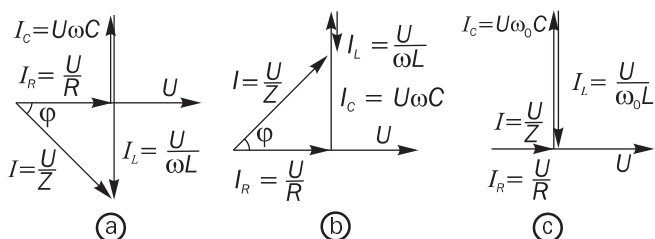


Fig. 13. Diagrame fazoriale: (a) predomină componenta inductivă; (b) predomină componenta capacitivă și (c) egalitatea celor două componente ($X_C = X_L$) stabilește condiția de rezonanță a circuitului.

Potrivit diagramei fazoriale, defazajul rezultă din relațiile:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_L - I_C}{I_R} = \frac{\frac{U}{\omega L} - U\omega C}{\frac{U}{R}} = R \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)$$

sau $\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_C - I_R}{I_L} = R \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$,

iar impedanța Z a circuitului se obține aplicând teorema lui Pitagora „triunghiului curenților“ (fig. 12).

$$I^2 = I_R^2 + (I_L - I_C)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{U}{Z}\right)^2 = \left(\frac{U}{R}\right)^2 + \left(\frac{U}{\omega L} - U\omega C\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2$$

Deci:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2}}$$

unde: $X_L = \omega L$ și $X_C = \frac{1}{\omega C}$
 reprezintă reactanțele inductivă și capacitivă.

Exemplu

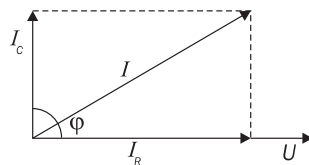
O rezistență de 500Ω și un condensator de $2 \mu F$ se conectează în paralel la un generator de curent alternativ cu tensiunea efectivă $U = 220 V$ și frecvență $\nu = 50 Hz$. Determinați:

a) valoarea maximă a intensității curentilor prin rezistență (I_{mR}) și condensator (I_{mC}) și în circuitul total (I_m);

b) defazajul dintre curent și tensiune (φ).

Rezolvare

Diagrama fazorială este dată în figura alăturată.



a) tensiunea maxi-

mă este: $U_m = \sqrt{2}U = 311,13 V$,
 iar pulsația: $\omega = 2\pi\nu = 100\pi \text{ rad/s}$. În aceste condiții, intensitățile maxime ale curentilor vor fi:

- prin rezistor: $I_{mR} = \frac{U_m}{R} = 0,62 A$;
- prin condensator: $I_{mC} = \frac{U_m}{X_C} = U_m \omega C = 0,195 A$;
- și total: $I_m = \sqrt{I_{mR}^2 + I_{mC}^2} = 0,65 A$.

Aplicarea metodei fazoriale în rețelele electrice de curent alternativ

Pentru rezolvarea rețelilor electrice de curent alternativ să urmărim pașii analizei unui caz tipic de rețea (fig. 14).

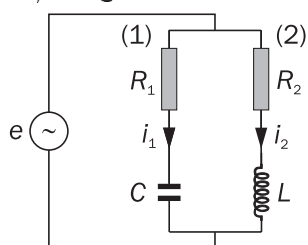
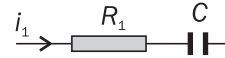


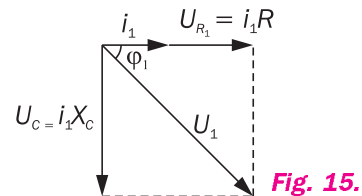
Fig. 14.
 Exemplu tipic de rețea de curent alternativ.

În rețeaua din fig. 14 se consideră cunoscute: tensiunea e , frecvența, rezistențele electrice R_1 și R_2 , inductanța bobinei (L) și capacitatea condensatorului (C). Analiza circuitului duce la determinarea curentului total i și a defazajului dintre curent și tensiune.

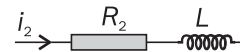
Notăm cu (1) și (2) cele două ramuri ale circuitului.
Pasul 1: Analiza ramurei (1) a circuitului.



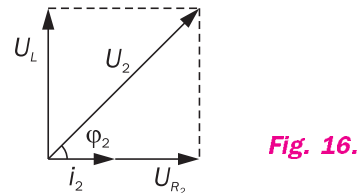
- Se ia ca referință curentul i_1 (fig. 15).
- Se trasează diagrama fazorială ținând cont de defazajele introduse de elementele reactive ale circuitului. În acest caz condensatorul determină o defazare în urmă a tensiunii.



Din diagramă se determină i_1 și φ_1 .
Pasul 2: Analiza ramurii (2)

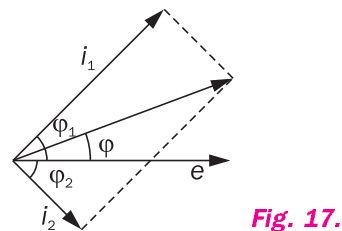


- Se ia ca referință curentul i_2 .
- Se trasează diagrama fazorială (fig. 16) ținând cont că bobina defazează tensiunea înaintea curentului.



Din diagramă se determină i_2 și φ_2 .
Pasul 3: Analiza întregului circuit.

- Se ia ca referință tensiunea $U_1 = U_2 = e$.
- Se trasează diagrama fazorială (fig. 17).

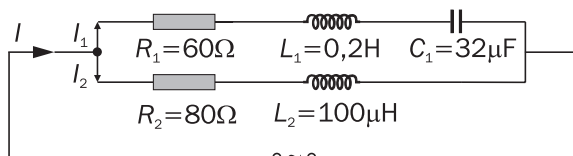


- Se determină din diagramă i și φ .

Exemplu

Fie rețeaua din figura de mai jos conectată la o sursă de curent alternativ cu tensiunea de 220 V și frecvența de 50 Hz. Să se determine, utilizând diagramele fazoriale:

- curenții și tensiunile în cele două ramuri ale rețelei;
- curentul total din rețea;
- caracterul rețelei.



Rezolvare

a) Pentru rezolvarea rețelei se pot inițial calcula reactanțele elementelor pasive din circuit.

$$\text{Din: } \omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ rad/s,}$$

înlocuind în expresiile reactanțelor inductivă și capacitivă se obțin:

$$X_{L_1} = \omega L_1 = 314 \cdot 0,2 \Omega = 62,8 \Omega$$

$$X_{L_2} = \omega L_2 = 314 \cdot 0,1 \Omega = 31,4 \Omega$$

$$X_{C_1} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{314 \cdot 32 \cdot 10^{-6}} \approx 10^2 \Omega.$$

Din $I = I_1 + I_2$, aplicând legea Ohm pentru curentul alternativ, se obține pentru ramura (1):

$$I_1 = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + (X_{L_1} - X_{C_1})^2}} = \frac{220}{\sqrt{60^2 + (62,8 - 100)^2}} = 3,1 \text{ A}$$

și, respectiv, pentru ramura (2):

$$I_2 = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + X_{L_2}^2}} = \frac{220}{\sqrt{80^2 + (31,4)^2}} = 2,56 \text{ A.}$$

Defazajele pentru cele două ramuri sunt:

$$\text{tg } \varphi_1 = \frac{X_{L_1} - X_{C_1}}{R_1} = \frac{62,8 - 100}{60} = -\frac{37,2}{60},$$

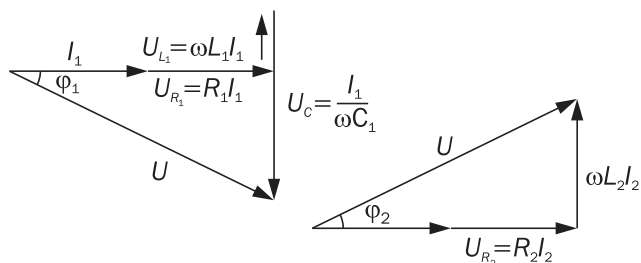
de unde rezultă $\varphi_1 = \text{arctg}(-0,62)$.

$$\text{tg } \varphi_2 = \frac{X_{L_2}}{R_2} = \frac{31,4}{80} = 0,392,$$

de unde rezultă $\varphi_2 = \text{arctg}0,392$.

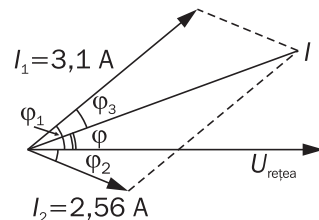
Se observă din semnul tangentelor că, în timp ce ramura (1) are un caracter capacitiv (curentul este defazat înaintea tensiunii), ramura (2) are un caracter inductiv.

Diagramele fazoriale pentru cele două ramuri sunt:



b) Pentru a determina curentul total se adună fazorial cei doi curenți. Din teorema cosinusului, obținem: $I^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$.

Pentru a determina $\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$ utilizăm relațiile între funcțiile trigonometrice plecând de la $\text{tg}\varphi_1$ și $\text{tg}\varphi_2$ care sunt cunoscute:



$$\text{tg}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\text{tg } \varphi_1 + \text{tg } \varphi_2}{1 - \text{tg } \varphi_1 \text{tg } \varphi_2} = \frac{0,62 + 0,392}{1 - 0,62 \cdot 0,392} = 1,34$$

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{tg}^2(\varphi_1 + \varphi_2)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (1,34)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2,79}} = 0,596.$$

Înlocuind în relația curentului, I^2 din teorema cosinusului și extrăgând radicalul, rezultă: $I = 5,06 \text{ A}$.

c) Pentru a determina caracterul rețelei se calculează defazajul $\varphi = \varphi_1 - \varphi_3$ dintre curentul total I și tensiunea rețelei.

Folosind teorema cosinusului în triunghiul curenților, se obține:

$$I_2^2 = I_1^2 + I^2 - 2I_1I \cos\varphi_3$$

de unde rezultă:

$$\cos\varphi_3 = \frac{I^2 + I_1^2 - I_2^2}{2I_1I} = \frac{5,08^2 + 3,1^2 - 2,56^2}{2 \cdot 3,1 \cdot 5,08} = 0,91$$

Din relația $\varphi = \varphi_1 - \varphi_3$ rezultă:

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \cos(\varphi_1 - \varphi_3) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_3 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_3 = \\ &= \frac{\cos\varphi_3}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\varphi_3}} + \frac{\text{tg}\varphi_1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\varphi_1}} \sqrt{1 - \cos^2\varphi_1} \end{aligned}$$

$$\text{sau } \cos\varphi = \frac{0,92 + 0,24}{1,18} \approx 1.$$

Deci circuitul are un comportament rezistiv.

Analiza energetică a circuitelor de curent alternativ

Curentul alternativ joacă un rol important în distribuirea și utilizarea energiei electrice. Este util de urmărit ce se întâmplă din punct de vedere energetic cu elementele unui circuit de curent alternativ sau, ce se întâmplă cu puterea într-un astfel de circuit.

Puterea instantanee (p) pe un element al circuitului, în funcție de mărimile instantanee ale curentului și tensiunii, se scrie:

$$p = ui.$$

1. Puterea pe rezistor. În cazul rezistorului, tensiunea și intensitatea curentului sunt în fază (fig. 18), ceea ce face ca produsul lor să fie totdeauna pozitiv.

Energia, în acest caz este furnizată rezistorului în orice moment de către sursă, indiferent de sensul curentului. Din simetria curbei reprezentative a puterii, în raport cu semînfățimea se poate determina valoarea medie a puterii:

$$P_{med} = \frac{1}{2} U_M I_M,$$

unde U_M și I_M sunt valorile maxime ale tensiunii și curentului.

Utilizând valorile efective ale acestora (U, I) din $U = \frac{U_M}{\sqrt{2}}$

și $I = \frac{I_M}{\sqrt{2}}$ rezultă:

$$P_{med} = UI.$$

2. Puterea pe bobină – conectarea unei bobine, a cărei rezistență electrică se poate neglija, la un generator de curent alternativ determină o

defazare cu $\frac{\pi}{2}$ a curentului, în raport cu tensiunea (fig. 19).

În acest caz semnul produsului celor două mărimi u și i este alternativ pozitiv sau negativ cu perioade egale, ceea ce face ca simetria curbei puterii să se realizeze în jurul axei. Aceasta determină ca puterea medie să fie nulă. Când $p > 0$ sursa cedează energie bobinei pentru formarea câmpului său magnetic, iar când $p < 0$ bobina cedează energia câmpului său magnetic, sursei.

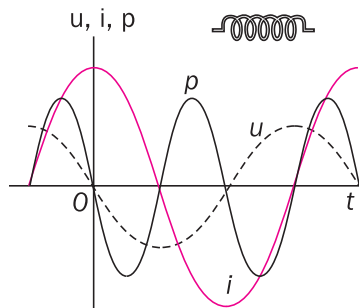


Fig. 19.

3. Puterea pe condensator. Când componenta

de circuit este condensatorul, defazajul $\frac{\pi}{2}$ produs de acesta determină o situație similară cazului discutat anterior al bobinei (fig. 20). De data aceasta furnizarea energiei către condensator duce la producerea câmpului electric între armăturile acestuia. Și aici puterea medie este nulă.

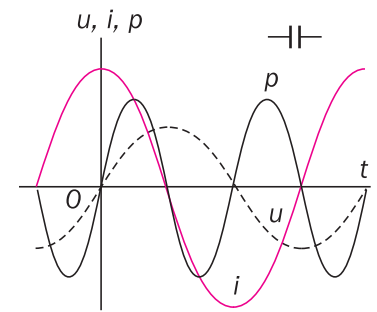


Fig. 20.

În cazul general al unui circuit RLC, indiferent de combinația componentelor, dacă între curent și tensiune există un defazaj φ , puterea instantanee va fi dată de:

$$p = ui = (\sqrt{2}U \sin \omega t) [\sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi)].$$

Variațiile în timp ale tensiunii și intensității curentului și puterii pot fi cele din figura 21.

Dezvoltând $\sin(\omega t - \varphi)$, se obține relația:

$$P = UI \cos \varphi - UI \sin(2\omega t - \varphi),$$

unde prima componentă este constantă, iar cea de a doua, alternativă.

Din figura 21 se observă că, deși valorile medii ale intensității curentului (i) și tensiunii (u) sunt nule pe interval de o perioadă, valoarea medie a puterii va fi diferită de zero. Acest lucru se datorează faptului că produsul a două mărimi oscilatorii armonice nu este o mărime oscilatorie armonică.

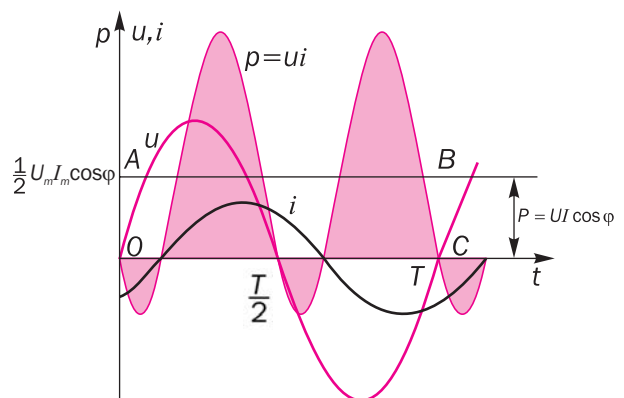


Fig. 21. Puterea instantanee și medie într-un circuit de curent alternativ.

Singurul element din circuitul RLC care disipă energie este rezistorul. Condensatorul și bobina realizează doar redistribuirea acesteia de la generator în câmpurile electrice ($W_C = \frac{1}{2} C U_M^2$) al condensatorului și magnetic

$\left(W_L = \frac{LI_M^2}{2} \right)$ al bobinei. Valorile date în paranteze

reprezintă valorile maxime ale acestora.

Utilizăm diagrama tensiunilor în cazul circuitului RLC serie (fig. 22a).

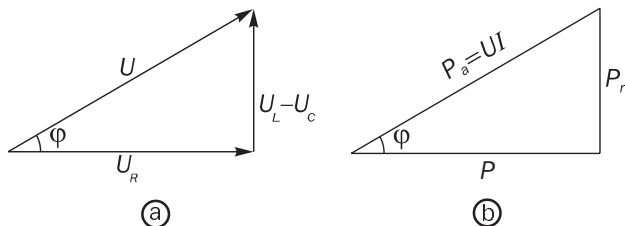


Fig. 22. Diagrama fazorială a tensiunilor în circuitul RLC serie (a) și a puterilor în același circuit (b).

Prin înmulțirea cu I a laturilor triunghiului tensiunilor, se obține un triunghi asemenea, numit „triunghiul puterilor” (fig. 22b). Se pot urmări în acest caz puterile distribuite fiecărui element de circuit.

Din tensiunea la bornele rezistorului U_R scrisă în funcție de tensiunea efectivă de la bornele generatorului, $U_R = U \cos \varphi$, rezultă pentru putere expresia:

$$P = UI \cos \varphi.$$

- Puterea disipată pe rezistor reprezintă puterea activă: $[P]_{s.i.} = W$ (Watt)
- Termenul $\cos \varphi$ reprezintă factorul de putere și arată ce fracțiune din putere este disipată prin efect Joule.
- Produsul UI poartă numele de *putere aparentă* (P_a) și exprimă energia transferată circuitului, în unitatea de timp, de către generatorul de curent alternativ.

Expresia ei este dată de:

$$P_a = UI,$$

iar unitate de măsură este:

$$[P_a]_{s.i.} = VA \text{ (voltamper)}$$

- Cea de-a treia latură din triunghiul puterilor, notată cu P_r , reprezintă *puterea reactivă*. Ea este utilizată în bobină și condensator pentru generarea câmpurilor magnetic și respectiv, electric.

Expresia ei este:

$$P_r = UI \sin \varphi,$$

iar unitate de măsură este:

$$[P_r] = VAR \text{ (voltamper reactiv)}.$$

Exemplu

Calculați puterea medie pierdută într-un circuit RLC serie în care $R = 250 \Omega$, $L = 0,6 \text{ H}$, $C = 3,5 \mu\text{F}$, tensiunea generatorului este $U = 150 \text{ V}$ și frecvența $\nu = 60 \text{ Hz}$.

Rezolvare

Din expresia puterii consumate prin efect Joule pe rezistor:

$$P = UI \cos \varphi,$$

pentru calculul acesteia, trebuie determinată intensitatea efectivă a curentului în circuit. Aceasta rezultă din relația:

$$I = \frac{U}{Z},$$

unde impedanța Z a circuitului este:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

cu: $X_L = \omega L = 2\pi\nu L = 226 \Omega$

și: $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C} = 758 \Omega$.

Înlocuind, se obține: $I = 0,255 \text{ A}$.

Determinarea factorului de putere $\cos \varphi$ necesită calculul defazajului, din relația:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \Rightarrow \operatorname{arctg} \varphi = -64,8^\circ.$$

Semnul „-“ semnifică faptul că în circuit predomină caracterul capacitiv. Înlocuind în expresia puterii, se obține:

$$P = 16,3 \text{ W}.$$

Circuitul serie RLC la rezonanță

După cum s-a constatat din studiul circuitului RLC, pentru anumite valori ale componentelor circuitului și ale frecvenței se poate întâmpla ca tensiunea și intensitatea curentului în circuit să fie în fază (fig. 8c, 9c). În acest caz se spune că circuitul este la rezonanță.

Condiția de rezonanță se scrie:

$$X_L = X_C \Leftrightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C},$$

adică: $\omega = \omega_0 = 2\pi\nu = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \nu_0$.

Perioada de oscilație va fi:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = T_0,$$

unde cu ω_0 , ν_0 și T_0 s-au notat pulsația, frecvența și perioada proprie a circuitului la rezonanță.

În diagrama fazorială din fig. 9c, se observă că la rezonanță, tensiunea bobinei și a condensatorului sunt egale în modul și opuse ca sens, ceea ce face ca suma lor să fie egală cu zero ($U_L - U_C = 0$).

Pe de altă parte tensiunea pe rezistor este egală cu tensiunea sursei, ceea ce face ca la frecvența de rezonanță circuitul să se comporte de parcă bobina și condensatorul nici nu ar exista în circuit.

Dacă într-un circuit RLC am putea varia inductanța bobinei (L) sau capacitatea condensatorului (C) am varia prin aceasta frecvența de rezonanță. Acesta este

principiul prin care se selectează un anumit emițător la un aparat de radio sau un televizor. Trasarea curbei intensitatea curentului – frecvență ($I = I(\nu)$), permite evidențierea frecvenței de rezonanță și a maximului înregistrat de curent în această situație.

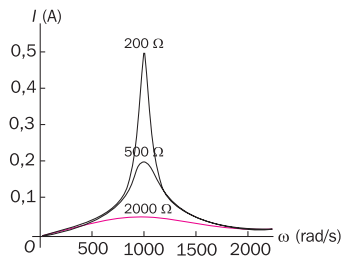


Fig. 23. Variația intensității curentului în funcție de frecvență, într-un circuit RLC, pentru trei rezistențe diferite ale circuitului.

Dacă frecvența de rezonanță depinde de valorile L și C ale bobinei și condensatorului, din grafic se observă și influența rezistenței electrice asupra caracteristicilor curbei de rezonanță.

Cu cât scade rezistența electrică (R) a circuitului, curba de rezonanță devine mai îngustă și mai ascuțită evidențind o intensitate mai mare a curentului. Comportarea este normală având în vedere că, din legea Ohm,

$I = \frac{U}{R}$, intensitatea este invers proporțională cu rezistența circuitului.

Forma curbei $I = I(\nu)$ este importantă în proiectarea aparatelor de radio și a televizoarelor.

Cu cât vârful de rezonanță este mai ascuțit, cu atât mai bună va fi discriminarea dintre două frecvențe de transmisie apropiate. Pe de altă parte, dacă vârful este prea ascuțit, o parte din informații se pierd astfel încât orice transmisie trebuie să realizeze un optim între discriminare și calitatea informației, ceea ce implică emisia într-o bandă mai largă de frecvență.

Pe de altă parte, forma curbei de rezonanță, așa cum discutăm și în cazul oscilațiilor mecanice, implică și o corespondență între rezistența electrică și atenuarea semnalului. Cu cât rezistența este mai mare, atenuarea este mai puternică, iar curba de rezonanță este mai largă și mai aplăzată.

La rezonanță, atât intensitatea curentului, $I = U/R$, cât și tensiunile la bornele bobinei:

$$U_L = I_R X_L = \left(\frac{U \omega L}{R} \right)_{\omega=\omega_0} \text{ și condensatorului:}$$

$$U_C = I_R X_C = \left(\frac{U}{\omega RC} \right)_{\omega=\omega_0}, \text{ devin maxime.}$$

Factorul de calitate (Q) al unui circuit, după cum s-a văzut, descrie comportarea acestuia la rezonanță. În cazul circuitelor de curent alternativ, acest factor este definit de raportul dintre tensiunile la bornele bobinei (U_L), respectiv a condensatorului (U_C), și tensiunea la bornele generatorului (U), prin una din expresiile:

$$Q = \left(\frac{U_L}{U} \right)_{\omega=\omega_0} \text{ sau } Q = \left(\frac{U_C}{U} \right)_{\omega=\omega_0}$$

- În cazul în care factorul de calitate are valori mari, $Q > 10$, vom spune că circuitul este selectiv.

- Dacă $Q < 1$, circuitul este neselectiv.

Înlocuind valorile lui U_L și U_C , la rezonanță se obține:

$$Q = \frac{L \omega_0}{R}; Q = \frac{1}{RC \omega_0} \text{ și respectiv } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Rezonanța circuitului RLC paralel

După cum a rezultat din diagrama fazorială (fig. 13c), în situația în care intensitățile curentilor, prin elementele reactive ale circuitului, sunt egale, tensiunea și intensitatea curentului total vor fi în fază. Condiția de realizare este ca reactanța inductivă și cea capacitivă să fie egale: $X_L = X_C$,

condiție din care se obține frecvența la rezonanță:

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Rezumat

- În circuitul de curent alternativ pur rezistiv, tensiunea electrică și intensitatea curentului electric oscilează în fază.

- Bobina este un element de circuit care se opune oricărei variații a curentului din circuit. Variația curentului va determina apariția unei tensiuni autoinduse:

$$u = -L \frac{di}{dt} \quad (L \text{ este inductanța bobinii}).$$

- Într-un circuit de curent alternativ bobina introduce o rezistență aparentă ceea ce duce la scăderea inten-

sității curentului din circuit, și-l defazează cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea tensiunii.

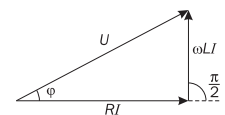
- Impedanța circuitului serie RL este:

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \text{ iar defaza-$$

jul curent – tensiune (φ) este:

$$\text{tg } \varphi = \frac{\omega L}{R}, \text{ unde:}$$

$\omega L = X_L$ poartă numele de reactanță inductivă.



• Condensatorul este un element de circuit care are rolul de a separa componenta alternativă de cea continuă a curentului electric. Pe prima o lasă să treacă, iar pe cea de-a doua nu.

• În curent alternativ, un condensator introduce o rezistență aparentă, și defazază înaintea curentul în raport cu tensiunea.

• Impedanța circuitului RC serie este:

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

unde: $\frac{1}{\omega C} = X_c$ este reactanța

capacitivă, iar $\text{tg } \varphi = \frac{1}{R\omega C}$ (φ este defazajul curent – tensiune).

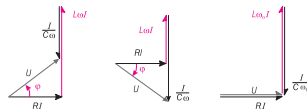
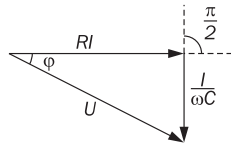
• Pentru circuitul serie RLC impedanța este:

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \text{ iar } \text{tg } \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

• La rezonanța $X_L = X_C$

rezultă $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$;

ν_0 este frecvența de rezonanță a circuitului.



• Pentru un circuit paralel RLC impedanța este:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2}}.$$

Rezonanța are loc pentru o aceeași frecvență de rezonanță ca și în cazul circuitului serie.

• Energia maximă într-o bobină parcursă de curent alternativ este:

$$W_L = \frac{L I_M^2}{2},$$

unde I_M este intensitatea maximă a curentului.

• Energia maximă într-un condensator este:

$$W_C = \frac{1}{2} C U_M^2,$$

unde U_M este tensiunea electrică maximă pe armăturile condensatorului.

• Produsul UI poartă numele de putere aparentă ($P_a = UI$) și exprimă energia transferată circuitului în unitatea de timp, de către generatorul de curent alternativ.

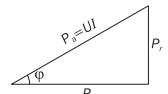
$$[P_a]_{SI} = \text{VA (voltamper)}$$

• Puterea activă (P), puterea disipată pe rezistor este:

$$P = UI \cos \varphi; [P]_{SI} = \text{W (watt)}$$

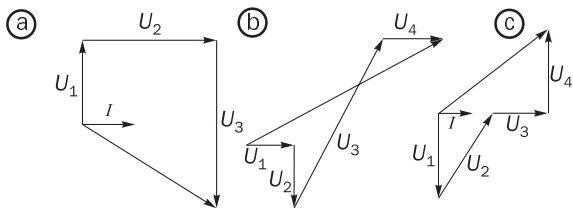
• $\cos \varphi$ poartă numele de factor de putere și arată ce fracțiune din putere este disipată prin efect Joule.

• Puterea reactivă $P_r = UI \sin \varphi$, este utilizată în bobină și condensator. $[P_r]_{SI} = \text{VAR (voltamper reactiv)}$



Verificați-vă cunoștințele

1. Stabiliți schema circuitului a căru diagramă fazorială este:



2. Unui circuit format dintr-o rezistență $R = 1 \text{ k}\Omega$ și un condensator $C = 1 \mu\text{F}$, legate în serie, i se aplică o tensiune alternativă de 220 V și frecvență de 50 Hz. Determinați: a) impedanța circuitului; b) tensiunea maximă; c) intensitatea maximă.

3. Un circuit format dintr-un rezistor cu $R = 50 \Omega$ și o bobină cu $L = 10 \text{ mH}$, legate în serie, este conectat la un generator ce produce o tensiune alternativă de 220 V, cu o frecvență de 50 Hz. Determinați: a) impedanța circuitului; b) tensiunea și intensitatea maximă; c) intensitatea efectivă.

4. Un condensator de $2 \mu\text{F}$ se conectează la un generator de curent alternativ de 220 V și frecvență variabilă. Aflați intensitatea curentului în circuit, când frecvența este: a) 50 s^{-1} ; b) 60 s^{-1} ; c) 1000 s^{-1} .

5. Având un generator de curent alternativ de 220 V și 50 Hz, determinați intensitatea curentului, dacă se conectează la o bobină de: a) 1 mH; b) 100 mH; c) 10 H.

6. O rezistență de 100Ω și o bobină de 100 mH se conectează în serie cu un generator de c.a. de 220 V și 50 Hz. Calculați: a) reactanța inductivă; b) impedanța; c) intensitatea efectivă; d) intensitatea maximă; e) defazajul dintre tensiune și intensitatea curentului.

7. Un rezistor de 60Ω , un condensator de $3 \mu\text{F}$ și o bobină de 0,4 H, legate în serie, sunt conectate la un generator de 90 V cu o frecvență de 60 Hz. Care este tensiunea pe combinația bobină-condensator? Dar pe rezistor-condensator?

8. Două bobine, cu inductanțele $L_1 = 0,2 \text{ H}$ și $L_2 = 0,3 \text{ H}$, sunt legate în serie la o rețea cu frecvența tensiunii de

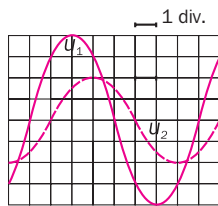
50 Hz. Curentul are intensitatea efectivă $I = 1,5$ A.

- Care este tensiunea rețelei?
- Care este tensiunea la bornele fiecărei bobine?

9. Două condensatoare legate în serie au capacitățile $C_1 = 0,3 \mu\text{F}$ și $C_2 = 0,5 \mu\text{F}$. Dacă tensiunea rețelei este $U = 120$ V, iar curentul are intensitatea $I = 12$ mA, determinați frecvența rețelei.

10. Un circuit paralel RLC este alimentat de la un generator cu tensiunea efectivă U și frecvența ν' . Intensitatea efectivă este de 5 A, iar curentul prin bobină este $I_L = 5$ A. Care este valoarea efectivă a curentului total I la o frecvență $\nu = 5\nu'$?

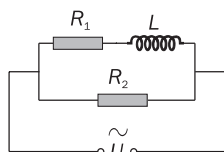
11. Pe ecranul unui osciloscop se observă forma a două tensiuni, u_1 și u_2 . Calibrarea celor două semnale este de 5 V/div, iar baza de timp este pe poziția 0,1 ms/div. Determinați amplitudinea celor două tensiuni, tensiunile efective corespunzătoare, perioada și frecvența oscilațiilor.



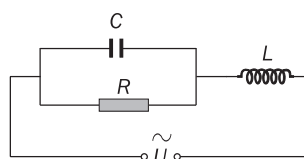
12. Un circuit paralel este format dintr-un rezistor ($R = 1$ k Ω), o bobină ($L = 25$ mH) și un condensator variabil. Frecvența generatorului este de 1 kHz.

- Care este capacitatea condensatorului C_0 la care se realizează rezonanța?
- Care este impedanța circuitului, și defazajul, în cazul în care capacitatea condensatorului devine jumătate din valoarea capacității de rezonanță?

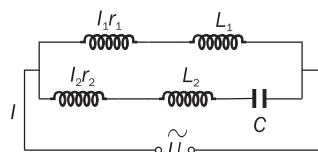
13. Calculați intensitatea curentului total absorbit de circuitul alăturat dacă sursa are tensiunea $U = 100$ V, la frecvența $\nu = 50$ Hz, iar parametrii circuitului sunt $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $L = 10$ mH.



14. În circuitul din figura de mai jos, $L = 1/\pi^2$ H, $C = 50 \mu\text{F}$, iar frecvența curentului este $\nu = 50$ Hz. Calculați valoarea rezistenței rezistorului R astfel încât curentul total să fie în fază cu tensiunea.

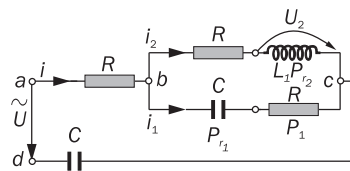


15. Se dă circuitul din figura de mai jos, la care se cunosc: $r_1 = 40 \Omega$; $r_2 = 60 \Omega$; $L_1 = 20$ mH; $L_2 = 50$ mH. Determinați capacitatea condensatorului C , dacă ecuațiile tensiunii și curentului în ramura principală sunt:



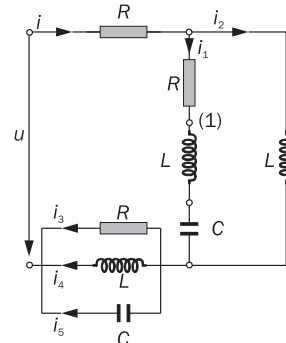
pală sunt: $u = 56,58 \sin\left(3140t + \frac{\pi}{4}\right)$, $i = 1,42 \sin 3140t$ (se lucrează cu două zecimale).

16. Se știe că circuitul reprezentat în figură are, în regim sinusoidal, $R = 2 \Omega$, $P_1 = 2$ W, $P_r = -2$ var, $U_{m2} = 2\sqrt{2}$ V. Se cer: a) P_{r2} ; b) U ; c) P , P_r ; d) $\cos \phi$, pentru întregul circuit; e) I .



17. Se dă circuitul reprezentat în figură. Alimentat în curent continuu la o tensiune $u = u_c = 100$ V, circuitul ia o putere totală $P_1 = 10$ W. Capacitatea fiecărui condensator este $C = 1 \mu\text{F}$. La frecvența $\nu_0 = \frac{1000}{2\pi}$ Hz se realizează în regim sinusoidal o rezonanță de tensiune în latura 1 și circuitul primește la borne o putere reactivă $P_r = 75$ var. Se cer pentru regimul sinusoidal:

- R ;
- X_{L0} ;
- valoarea efectivă U_0 a tensiunii la bornele circuitului;
- P_0 , puterea activă totală a circuitului;
- intensitățile curentilor și tensiunile la bornele elementelor.



18. Un rezistor de 50 Ω și un condensator de 20 μF sunt conectate în serie la un generator de tensiune alternativă cu frecvența $\nu = 55$ Hz și tensiunea efectivă de 100 V. a) Care sunt factorul de putere și puterea medie disipată în circuit? b) Dar în cazul în care condensatorul este înlocuit cu o bobină cu inductanța $L = 0,4$ H?

19. Un circuit RLC serie este format din $R = 20 \Omega$, $L = 30$ mH, $C = 2000 \mu\text{F}$. Dacă circuitul se alimentează la 220 V și 50 Hz, calculați: a) intensitatea maximă; b) factorul de putere; c) puterea activă și reactivă.

20. Într-un circuit RLC valorile efective ale intensității curentului și tensiunii sunt 5 A și respectiv 220 V, iar defazajul produs este de 45°. a) Care este rezistența totală a circuitului? b) Care este reactanța totală ($X_L - X_C$) a circuitului? c) Care este puterea disipată în circuit?

21. Un circuit paralel este format dintr-un rezistor și un condensator. Valorile efective ale tensiunii și intensității curentului sunt $U = 100$ V și $I = 1,4$ A, iar puterea activă $P = 100$ W. Determinați:

- rezistența și reactanța capacitivă a circuitului;
- intensitățile efective ale curentilor prin cele două derivații;
- factorul de putere al circuitului;
- diagrama fazorială.

Descărcarea unui condensator pe rezistor și bobină

Laborator

Materiale necesare:

- generator de curent continuu;
- condensator variabil;
- rezistori cu rezistență fixă și variabilă;
- bobină;
- osciloscop;
- întrerupătoare și fire de legătură.

A. Descărcarea unui condensator printr-un rezistor

- Se realizează montajul din figura 1a.
- Pe armăturile condensatorului se aplică un semnal dreptunghiular.
- Se culege semnalul între punctele Y_1 și Y_2 pentru a fi vizualizat pe osciloscop.
- Se urmărește la osciloscop variația tensiunii pe armăturile condensatorului. Semnalul dreptunghiular aplicat va determina încărcarea și descărcarea periodică a condensatorului prin rezistorul de rezistență R (fig. 1c).
- Se variază rezistența electrică din circuit.

Observații:

Condensatorul permite acumularea unei anumite sarcini electrice pe armăturile sale și restituirea acesteia circuitului.

Sarcina condensatorului reprezintă sarcina pozitivă acumulată pe una dintre armături. Armăturile condensatorului se încarcă cu sarcini egale, dar de semn opus:

$$Q_A = -Q_B.$$

Pentru simplitate să ne limităm la o singură descărcare a condensatorului (fig. 1c) și să considerăm circuitul simplificat din figura 2, în care condensatorul deja încărcat, se descarcă la închiderea circuitului.

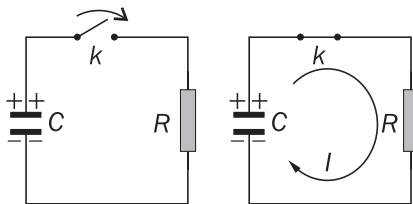


Fig. 2. Descărcarea unui condensator printr-un rezistor.

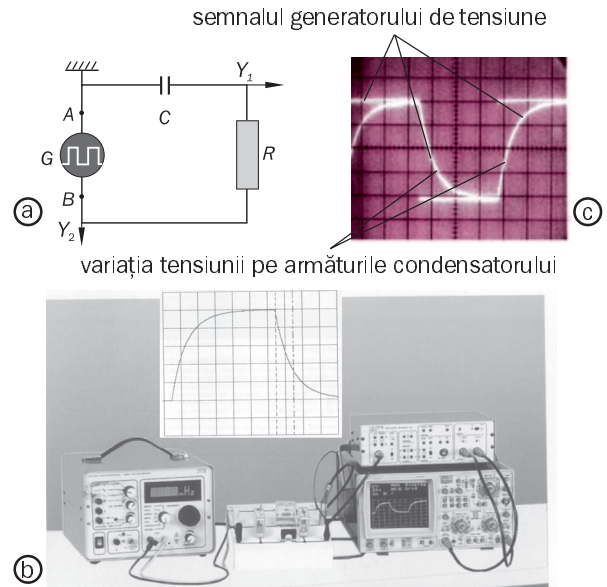


Fig. 1. Schema electrică (a) dispozitivul experimental utilizat la încărcarea/descărcarea unui condensator (b); forma semnalelor generatorului de tensiune și tensiunea de pe armăturile condensatorului (c).

La închiderea comutatorului k , condensatorul C începe descărcarea prin rezistor determinând trecerea unui curent prin acesta. După cum apare pe ecranul osciloscopului, descărcarea este de formă exponențială (fig. 1c).

Se poate spune că sarcina electrică Q pe condensator la un moment dat, în timpul descărcării acestuia, este dată de o relație de tipul:

$$Q = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}},$$

unde τ este o constantă de timp a circuitului. Pare rezonabil, din observarea dependenței descărcării de capacitatea C a condensatorului și de rezistența R a rezistorului, că această constantă de timp (τ) trebuie să depindă de cele două mărimi ($\tau = RC$). Constanta de timp τ poate fi definită ca timpul după care sarcina electrică de pe armăturile condensatorului a scăzut de ori.

În urma descărcării condensatorului energia câmpului electric dintre armăturile acestuia va fi cedată rețelei rezistorului prin efect Joule, în urma unui transfer ireversibil de căldură.

Descărcarea unui condensator printr-o bobină

Laborator

Se realizează montajul din fig. 3.

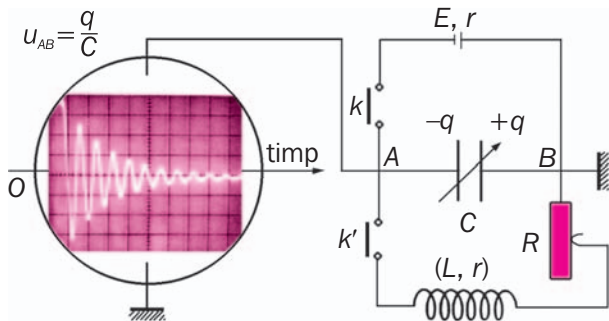


Fig. 3. Descărcarea unui condensator printr-o bobină. Schema circuitului.

- Se închide întrerupătorul k . De la generatorul de curent continuu, condensatorul se încarcă cu sarcina electrică $q = CU_{AB}$.
- Se reglează rezistența variabilă R , la zero.
- Se deschide întrerupătorul k ; se închide întrerupătorul k' . Se urmărește imaginea obținută la osciloscop. Imaginea obținută va fi asemănătoare celei prezentate în fig. 4a. Este vorba de un semnal oscilatoriu amortizat.

- Se mărește rezistența electrică a rezistorului variabil R . Se obțin la osciloscop succesiv imaginile din fig. 4b și c.

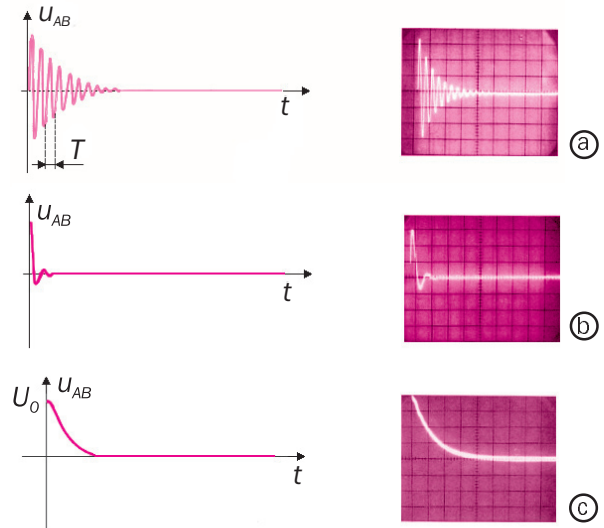


Fig. 4. La descărcarea unui condensator printr-o bobină, creșterea rezistenței interne a circuitului va determina creșterea amortizării semnalului până ce acesta trece în regim aperiodic.

Descărcarea condensatorului prin bobină, în cazul unei rezistențe mici a circuitului, nu se face ca în cazul descărcării prin rezistor printr-o simplă exponențială. În acest caz se observă amortizarea în timp a semnalului, amortizare care crește o dată cu creșterea rezistenței electrice a circuitului. Amortizarea are drept cauză pierderea de energie prin efect Joule, datorită rezistenței proprii (r) a bobinei. Mărirea rezistenței interne a circuitului (prin creșterea treptată a lui R) pune în evidență amortizarea mai rapidă a semnalului (fig. 4b) până ce acesta va trece în regim aperiodic (fig. 4c).

Oscilațiile care au loc în sistem se datorează faptului că, la descărcarea condensatorului bobina este parcursă de o sarcină variabilă care determină apariția fenomenului de autoinducție, adică se generează o tensiune electromotoare de autoinducție ce reîncarcă condensatorul. Astfel are loc o oscilație a energiei electrice din condensator și a celei magnetice din bobină dintr-o formă în alta.

Circuit LC

Condensatorul, prin încărcare, acumulează energie în câmpul electric dintre armături, manifestându-și această energie sub forma unei tensiuni electrice.

Bobina, la rândul ei acumulează energia în câmp magnetic, energie manifestată prin intermediul deplasării electronilor care formează curentul electric care o străbate. Condensatorul și bobina sunt în acest fel extremitățile unui lanț reactiv în care energia este transferată dintr-o formă în alta. Când aceste două componente sunt conectate în același circuit rezultatul tendințelor lor complementare de transfer de energie este unul particular.

Indiferent de cine va poseda inițial energie, condensatorul sau bobina cele două componente vor face schimb de energie între ele creând propria lor variație alternativă a tensiunii și curentului (tabelul 1).

Global, comportarea unui circuit LC ideal ce nu pierde energie prin efect Joule, este similară celei a unui oscilator elastic sau al unui pendul gravitațional în care are loc, în decursul oscilației, un transfer de energie din formă cinetică în formă potențială.

Oscilațiile libere care se produc într-un astfel de circuit se produc într-un interval de timp nedefinit.

Temă în clasă: Identificați pentru fiecare caz prezentat în tabelul 1 situația corespunzătoare a unui pendul gravitațional. Justificați răspunsul.

Tabel 1. Comportarea unui circuit oscilant și a unui oscilator armonic

Diagrama circuitului, tensiunea (e) / intensitatea curentului (i)	Observații	Diagrama oscilatorului armonic
<p>(a)</p>	<p>Odată încărcat condensatorul de la sursă, este eliminată sursa din circuit și închis comutatorul K. Condensatorul începe descărcarea. Tensiunea la bornele sale scade, trecerea curentului electric prin bobină determină apariția unui câmp magnetic a cărui inducție crește la o valoare maximă pe măsură ce intensitatea curentului din circuit crește. Prin bobină continuă să treacă curent până la descărcarea completă a condensatorului când tensiunea pe armăturile acestuia este nulă. (b)</p>	<p>$E_p = \max, E_C = 0$</p>
<p>(b)</p>	<p>Bobina menține prin autoinducție trecerea curentului chiar dacă la bornele ei nu mai este aplicată o tensiune. Ea va genera o tensiune electrică de autoinducție ce menține curentul pe aceeași direcție. Armăturile condensatorului se încarcă cu o polaritate inversă celei inițiale. Când energia în bobină este din nou zero condensatorul va fi încărcat la maximum. Tensiunea pe armăturile sale este maximă, dar de polaritate inversă celei inițiale. (c)</p>	<p>$E_p = 0, E_C = \max$</p>
<p>(c)</p>	<p>Descărcarea condensatorului se produce similar cazului anterior, singura modificare fiind sensul curentului din circuit. Trecerea acestuia prin bobină va determina apariția unui câmp magnetic variabil, dar de sens contrar situației precedente. Scăderea tensiunii se produce până la neutralizarea armăturilor. (d)</p>	<p>$E_p = \max, E_C = 0$</p>
<p>(d)</p>	<p>Chiar și după ce tensiunea pe condensator devine nulă, bobina este parcursă de un curent de autoinducție, în același sens cu cel determinat de descărcarea condensatorului. Aceasta duce la reîncărcarea condensatorului cu o polaritate inversă. (e)</p>	<p>$E_p = 0, E_C = \max$</p>
<p>(e)</p>	<p>Bobina acționează ca un generator mărind tensiunea pe condensator până la completa epuizare a energiei câmpului magnetic indus și dispariția acestuia. Tensiunea pe plăcile condensatorului ajunge încă o dată la valoarea sa maximă în timp ce curentul prin bobină se anulează. În acest fel s-a realizat un ciclu complet de transfer de energie între cele două componente din circuit. Întregul proces se reia.</p>	<p>$E_p = \max, E_C = 0$</p>

Din urmărirea în paralel a funcționării circuitului LC și al unui oscilator armonic rezultă o similitudine între comportarea acestor sisteme în care se produc fenomene oscilatorii. Circuitul LC poartă din această cauză numele de **circuit oscilant**. Dacă în circuit există pierderi de energie datorate interacțiunilor dintre electroni și atomii rețelei, ceea ce determină, pe parcursul fiecărei

perioade de oscilație, transferul ireversibil al unei părți din energie în căldură, în circuit se vor produce oscilații amortizate.

Dacă încărcăm un condensator cu sarcina electrică q și apoi îl cuplăm la bornele AB ale unei bobine, tensiunea pe cele două elemente de circuit va fi aceeași (U_{AB}).

Potrivit legii autoinducției, tensiunea pe bobină este:

$$u_{AB} = -L \frac{di}{dt}, \quad (1)$$

unde di este valoarea instantanee infinitezimală a intensității curentului de descărcare. Aceasta este

dată, de relația:
$$i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}. \quad (2)$$

Observație: Cu „ $\dot{}$ ” s-a notat prima derivată a mărimii respective (aici, sarcina electrică) în raport cu timpul.

Cum tensiunea pe cele două elemente ale circuitului este aceeași, se poate scrie:

$$u = \frac{q}{C}. \quad (3)$$

Din (1) și (3), rezultă:
$$\frac{q}{C} = -L \frac{d\dot{q}}{dt}. \quad (4)$$

Observație: $\frac{d\dot{q}}{dt} = \ddot{q}$ este a doua derivată a sarcinii în raport cu timpul.

Relația (4) se poate scrie:
$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (4')$$

Raportul $\frac{1}{LC}$ este un număr pozitiv (atât inductanța L a bobinei, cât și capacitatea C a condensatorului fiind pozitive), deci putem să-l scriem ca pătratul unui număr notat „ ω ”.

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0. \quad (4'')$$

Relația (4'') este echivalentă ecuației:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (5)$$

adică ecuația oscilatorului linear armonic (\ddot{x} , a doua derivată a elongației reprezintă chiar accelerația acestuia). Și în acest caz, soluțiile căutate vor fi de forma unei funcții sinus sau cosinus de tipul:

$$q = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (6)$$

Temă în clasă: Verificați dacă expresia (6) este soluție a ecuației (4'').

Concluzie. În cazul unui circuit LC ideal sarcina electrică de pe armăturile condensatorului variază periodic și neamortizat. Mărima ω poartă numele de pulsație și este dată de expresia:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2. \quad (7)$$

Din relația (7) se poate scrie frecvența oscilatorului:

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (8)$$

și perioada acestuia:
$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (9)$$

O altă mărime care oscilează în circuit este intensitatea curentului electric prin bobină. Din definiția intensității:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (10)$$

se obține, prin derivare:

$$i = -Q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = Q_m \omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (11)$$

Notând: $Q_m \omega_0 = I_m$, relația (11) devine:

$$i = I_m \sin\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (11')$$

Observație: În circuitul oscilant, între sarcina q și intensitatea i a curentului există un defazaj de $\frac{\pi}{2}$.

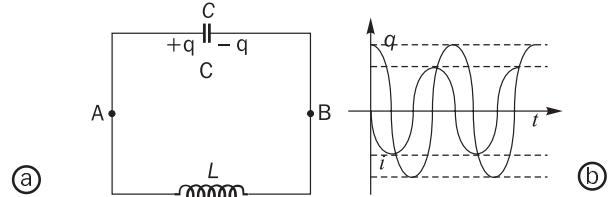


Fig. 5. Într-un circuit oscilant ideal (a), oscilațiile sarcinii electrice q de pe armăturile condensatorului și cele ale curentului i din bobină sunt neamortizate (b).

După cum s-a determinat la studiul perioadei de oscilație a pendulului gravitațional aceasta nu depinde de masa (m) a pendulului ci numai de lungimea acestuia (l). Aceasta este și cauza pentru care pendulul va continua să oscileze cu aceeași frecvență chiar dacă, în urma interacțiunilor cu mediul, amplitudinea oscilațiilor scade (fig. 6). Frecvența de oscilație este independentă de energia oscilatorului.

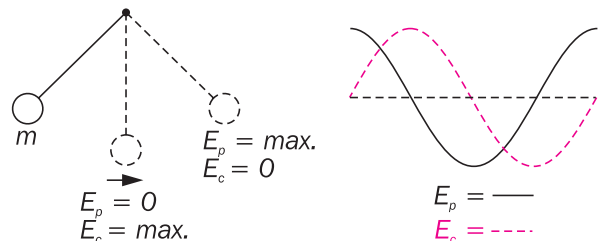


Fig. 6.

Aceeași observație este valabilă și în cazul circuitului LC. Frecvența de oscilație este strict dependentă de caracteristicile condensatorului (C) și ale bobinei (L) și nu depinde de valorile maxime ale tensiunii sau curentului din circuit. Abilitatea unui astfel de circuit de a menține o singură frecvență naturală în pofida a cât de multă sau cât de puțină energie este transferată între componentele circuitului nu este o caracteristică exclusivă a unor circuite proiectate special în acest scop. Fiecare circuit de curent alternativ în care intră o combinație de bobine și condensatoare are tendința de a manifesta această proprietate când frecvența generatorului de tensiune la care este conectat circuitul se apropie de frecvența naturală de oscilație a acestuia.

Când frecvența generatorului este identică frecvenței naturale a oscilatorului se atinge regimul de rezonanță.

Circuitul oscilant, cum am văzut, este sediul producerii unui fenomen care constă într-o deplasare a electronilor din circuit dintr-o parte în alta a poziției lor individuale de echilibru, cu transformarea energiei câmpului electric dintre armăturile condensatorului în energie a câmpului magnetic al bobinei – și reciproc.

Energia câmpului electric dintre armăturile condensatorului are, în orice moment, valoarea dată de expresia:

$$\varepsilon_e = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}. \quad (12)$$

Dacă la momentul inițial condensatorul este încărcat, atunci:

$$q = Q_m \cos \omega_0 t. \quad (13)$$

Relația (12) devine:

$$\varepsilon_e = \frac{Q_m^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t = \frac{Q_m^2}{4C} [1 + \cos 2\omega_0 t]. \quad (14)$$

În același timp, în bobină, energia instantanee a câmpului magnetic este:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L I_m^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{L I_m^2}{4} [1 - \cos 2\omega_0 t] \quad (15)$$

Reprezentând grafic (fig. 7), se observă că ambele mărimi oscilează periodic, cu perioada $T_0/2$, în opoziție de fază.

Însumând (14) cu (15), se obține energia totală din circuit:

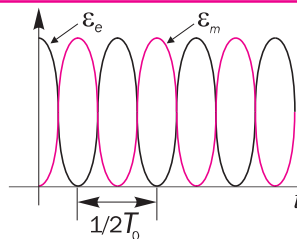


Fig. 7. Oscilațiile energiei electrice din condensator și a celei magnetice din bobină.

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_m = \frac{Q_m^2}{2C} = \frac{C U_m^2}{2} = \frac{L I_m^2}{2}. \quad (16)$$

Relația (16) reprezintă legea de conservare a energiei în circuitul oscilant.

Influența rezistenței electrice a circuitului în circuitele LC reale

De îndată ce rezistența unui circuit LC crește, calculul frecvenței de rezonanță prin relația (8) nu mai este practic corect. În tabelul 2 sunt date o serie de circuite LC cu o rezistență adăugată, care utilizează condensatoare și bobine cu aceleași caracteristici: 10 μF și respectiv 100 mH. Potrivit relației (8), frecvența de rezonanță ar trebui să fie 159,155 Hz. Urmăriți în tabel cum este atinsă frecvența maximă în cazul fiecărui tip de montaj. Tendința de modificare a punctului în care impedanța circuitului atinge valoarea sa maximă / minimă sau minimă într-un circuit LC este numită **antirezonanță**.

Tabelul 2. Influența rezistenței electrice în circuitele LC de curent alternativ – se urmărește variația frecvenței minime în raport cu frecvența calculată prin relația (8) pentru valorile date de 10 μF și respectiv 100 mH, la o valoare calculată de 159,155 Hz.

Circuit LC paralel	$i = i(v)$	Circuit LC serie	$i = i(v)$
<p>cu rezistență în serie și bobină</p>		<p>cu rezistență în paralel pe bobină</p>	
<p>cu rezistențe în serie și C</p>		<p>cu rezistență în paralel pe condensator</p>	

Concluzii:

Într-un circuit LC, paralel:

– R în serie cu bobina (L) coboară frecvența de

rezonanță;

– R în serie cu condensatorul (C) ridică frecvența de rezonanță.

A ține seama de efectul pe care rezistența electrică a circuitului LC o are asupra funcționării acestuia este important pentru că, dacă este posibilă realizarea unor condensatoare cu rezistență electrică neglijabilă, nu același lucru se întâmplă cu bobinele care au rezistențe considerabile. Mai mult, rezistența electrică a acestora tinde să crească odată cu creșterea frecvenței, pe seama unui efect, numit efect pelicular, în care curentul alternativ tinde să fie exclus din a se deplasa prin centrul conductorului, reducând astfel secțiunea activă a acestuia (secțiunea prin care trece). Astfel, bobina nu numai că are o rezistență electrică, dar aceasta este și dependentă de frecvență.

Un alt efect cauzator de probleme suplimentare este miezul de fier al bobinei în care pot apărea curenți Foucault (Eddy). Aceștia se manifestă ca o rezistență suplimentară în circuit. Efectul, deși poate fi micșorat prin proiectare și utilizarea miezurilor din foi (tole) nu poate fi complet eliminat.

Evidențierea curenților Foucault (Eddy)

Existența curenților Foucault (Eddy) poate fi ușor demonstrată prin deplasarea, într-o mișcare oscilatorie, a unei plăci metalice nemagnetice în câmp magnetic (fig. 8).

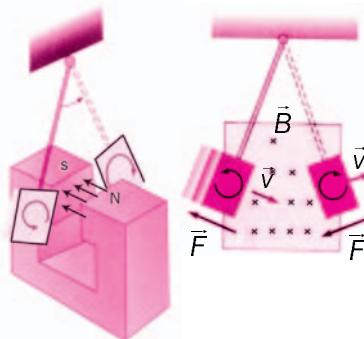


Fig. 8. Dispozitiv care demonstrează formarea curenților Foucault.

Când placa intră în câmpul magnetic, variația fluxului acestuia prin placă determină inducerea unei tensiuni electromotoare. Aceasta determină deplasarea

electronilor liberi care vor da naștere unor curenți circulatorii. Potrivit regulii Lenz acești curenți au un astfel de sens încât se opun variației cauzei care i-a produs și determină apariția unor forțe care se opun mișcării oscilatorii a plăcuței. În acest fel, în prezența câmpului magnetic, plăcuța va fi frânată mult mai rapid decât în lipsa acestuia.

Aplicații ale circuitului oscilant

Rezonanța este o proprietate foarte importantă a circuitelor de curent alternativ, cu utilizări într-o gamă largă de aplicații.

Una dintre utilizări este aceea de a stabili condițiile de frecvență stabilă în circuitele proiectate pentru producerea semnalelor alternative (fig. 9).

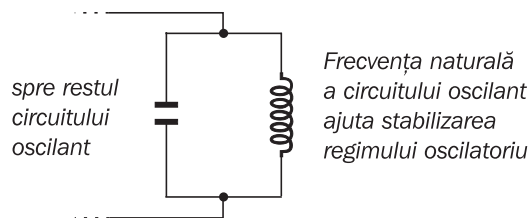
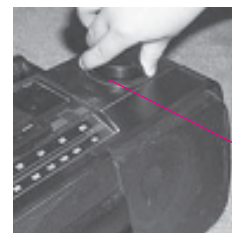


Fig. 9. Circuit de stabilizare a frecvenței.

O altă utilizare este în aplicațiile în care se dorește o creștere sau descreștere mare a impedanței la o anumită frecvență. Un circuit oscilant se poate utiliza în acest caz pentru a „blocă” o frecvență sau un interval de frecvențe, acționând ca un „filtru” care selectează anumite frecvențe. Din această cauză, astfel de circuite poartă numele de „filtre”.

Practic acesta este și modul de funcționare al selectorului de frecvențe al unui aparat de radio (fig. 10).

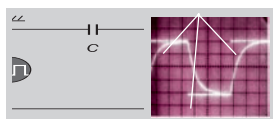


Selectorul de frecvență al unui aparat de radio.

Fig. 10.

Rezumat

- Scăderea sarcinii electrice de pe armăturile unui condensator în timpul descărcării acestuia



printr-un rezistor, este de tip exponențial: $Q = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$, ($\tau = RC$) este constanta de timp a circuitului.

- Descărcarea unui condensator printr-o bobină poate fi de tip exponențial, periodică sau aperiodică, dependent de rezistența electrică a bobinei.



În timpul descărcării are loc un transfer de energie din formă electrică în formă magnetică.

- În cazul unui circuit LC ideal ($R = 0$) mișcarea oscilatorie este dată de ecuația $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$, similară celei a oscilatorului armonic. Perioada circuitului este

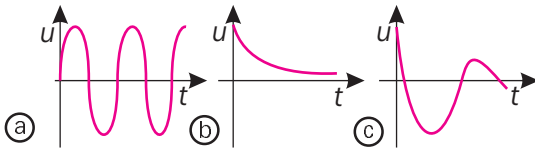
$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$, unde L și C sunt impedanța bobinei, respectiv capacitatea condensatorului.

- Efectul rezistenței electrice R a bobinei din circuitul oscilant este amortizarea oscilației. Energia oscilatorului este transformată ireversibil în căldură prin efect Joule.



Verificați-vă cunoștințele

- 1.** Care din următoarele afirmații este adevărată:
- Totdeauna, într-un circuit, descărcarea condensatorului este oscilatorie.
 - În circuitul oscilant ideal, defazajul dintre sarcina condensatorului și intensitatea curentului este $\frac{\pi}{2}$.
 - În circuitul oscilant real, energia totală din circuit se conservă.
- 2.** În figurile următoare sunt date trei imagini, privind descărcarea unui condensator dintr-un circuit oscilant.



Care din ele reprezintă:

- un circuit oscilant cu o rezistență internă mică;
 - un circuit oscilant ideal;
 - un circuit oscilant cu rezistență internă mare.
- 3.** Urmăriți tabelul 1 și discutați comportarea circuitului oscilant din punct de vedere energetic prin comparație cu un oscilator armonic.
- 4.** Cum se schimbă frecvența oscilațiilor libere într-un circuit oscilant:
- dacă mărim distanța dintre armăturile condensatorului?
 - dacă introducem în bobină un miez de fier?
- 5.** Ce inductanță trebuie să aibă un circuit oscilant al cărui condensator are capacitatea $C = 2 \mu\text{F}$ pentru ca frecvența oscilațiilor produse să fie $\nu = 10^3 \text{ Hz}$? Se consideră rezistența circuitului nulă.
- 6.** Cum se schimbă perioada și frecvența oscilațiilor libere într-un circuit oscilant dacă se micșorează inductanța de 4 ori și se mărește capacitatea de 9 ori?
- 7.** Un condensator de $2 \mu\text{F}$ se încarcă la 200 V, iar armăturile sale se leagă la o bobină cu inductanța $L = 20 \text{ mH}$. Determinați:
- frecvența proprie de oscilație a circuitului;
 - intensitatea maximă a curentului în circuit.

8. Care este perioada de oscilație a unui circuit LC format dintr-o bobină de 10 mH și un condensator de $25 \mu\text{F}$?

9. Un condensator de $50 \mu\text{F}$ se leagă în serie cu o bobină. Care este inductanța L a bobinei, pentru ca circuitul să realizeze rezonanța la o frecvență a tensiunii de 50 Hz.

10. Un condensator de capacitate $C = 2 \mu\text{F}$ este încărcat la tensiunea $U = 20 \text{ V}$. În cazul în care condensatorul se leagă la bornele unei bobine de inductanță $L = 40 \text{ mH}$ și rezistență neglijabilă:

- determinați pulsația proprie (ω_0) a circuitului;
- exprimați sarcina q de pe armăturile condensatorului și intensitatea curentului prin bobină, în funcție de timp, la momentele $t_1 = 0,5 \text{ ms}$ și $t_2 = 3 \text{ s}$;
- exprimați energiile electrică și magnetică din condensator, și respectiv din bobină, la momentele $t_1 = 0,2 \text{ ms}$; $t_2 = 10 \text{ s}$.

11. Un circuit oscilant este format dintr-un condensator de $40 \mu\text{F}$ și o bobină. Ce valoare trebuie să aibă inductanța bobinei, pentru ca frecvența proprie a circuitului să fie $\nu_0 = 330 \text{ Hz}$?

12. Dacă frecvența oscilațiilor într-un circuit oscilant este de 440 Hz, și în paralel cu condensatorul circuitului se leagă un al doilea condensator, având capacitatea $C' = 20 \mu\text{F}$, determinați capacitatea și inductanța elementelor circuitului oscilant, dacă frecvența devine 300 Hz.

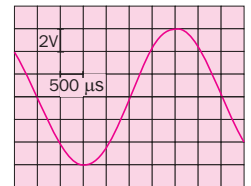
13. Imaginea pe osciloscop a tensiunii de pe armăturile unui condensator, într-un circuit oscilant, este cea dată în figură. Se dau: semnalul „bază de timp” $500 \mu\text{s/div}$ și etalonul vertical 2 V/div .

a) Care este sarcina maximă ce încarcă condensatorul, în cazul în care capacitatea acestuia este $C = 0,4 \mu\text{F}$?

b) Care este energia maximă a câmpului electric al condensatorului?

c) Care este inductanța bobinei?

d) Care este intensitatea maximă a curentului?



Mărimi caracteristice câmpului și unde electromagnetice

Studiile electricității și ale magnetismului au scos în evidență faptul că, baza producerii acestor fenomene este existența sarcinii electrice (în cazul câmpului electric) și a deplasării acesteia (în cazul câmpului magnetic). Inițial cele două câmpuri nu păreau a avea legătură unul cu altul putându-se descrie independent interacțiunile electrice de cele magnetice.

Interacțiunile electrice – câmp electric

Formalismul matematic al interacțiunii electrice a purtătorilor de sarcină a fost stabilit de Charles August de Coulomb, care a dat o interpretare cantitativă și a măsurat pentru prima dată interacțiunea dintre sarcini electrice. Relația dată de el, numită mai târziu forța coulombiană (electrostatică) dintre două sarcini electrice Q , q , aflate la distanța r una de alta, care interacționează în vid este:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Qq}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1)$$

unde ϵ_0 (permitivitatea electrică a vidului) este o mărime care caracterizează proprietățile electrice ale vidului și are valoarea ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$). Forța de interacțiune în alt mediu decât vidul este:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{Qq}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (1')$$

unde ϵ_r (permeabilitatea electrică relativă) este o mărime adimensională și pozitivă care descrie de câte ori este mai puternică forța coulombiană într-un mediu oarecare față de vid.

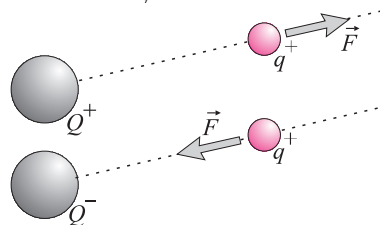


Fig. 1. Forțe coulombiene de atracție (a) și respingere (b).

Forța electrostatică, forță prin care interacționează la distanță sarcinile electrice, nu este o mărime satisfăcătoare pentru descrierea suportului acestei interacțiuni, **câmpul electric**. Principala obiecție este aceea că o mărime care caracterizează câmpul electric trebuie să depindă în exclusivitate de sarcina care produce câmpul respectiv, nu și de sarcina asupra căreia acesta acționează (sarcină de probă). O idee simplă în rezolvarea problemei a fost definirea mărimii vectoriale, numită **intensitatea câmpului electric** (\vec{E}), ca raportul dintre forța coulombiană și sarcina de probă:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \quad (2)$$

Dacă direcția acestui vector este aceeași cu a forței care o determină, sensul depinde de semnul sarcinii care creează câmpul. În mod arbitrar acesta s-a stabilit a fi orientat către sarcină dacă aceasta este negativă și dinspre sarcină dacă este pozitivă (fig. 2).

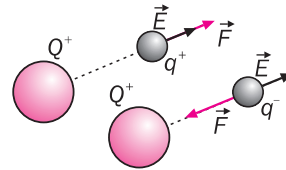


Fig. 2. Orientarea vectorului intensitate a câmpului electric.

O modalitate de vizualizare a câmpului electric, propusă tot de către Coulomb, introducea conceptul de **linie de câmp electric**, curba la care vectorul intensitate a câmpului este tangent în fiecare punct (fig. 3).

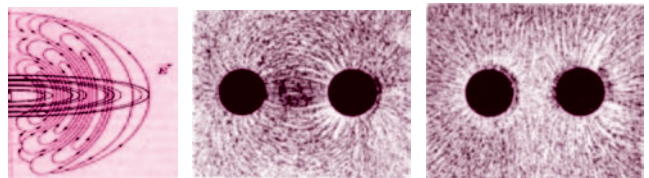


Fig. 3. Vizualizarea câmpului electric, creat la suprafața apei, de o încărcare de sarcină: firicele fine de păr, tăiate scurt, s-au presărat pe apă. a) o singură sarcină; b) două sarcini de sens contrar; c) două sarcini de același sens.

Interacțiunile magnetice – câmp magnetic

Studiile lui Cristian Ōrsted și Andre Marie Ampere au evidențiat legătura dintre sarcinile electrice în mișcare și producerea câmpului magnetic stabilind deplasarea de sarcină drept sursa acestui câmp (fig. 4).

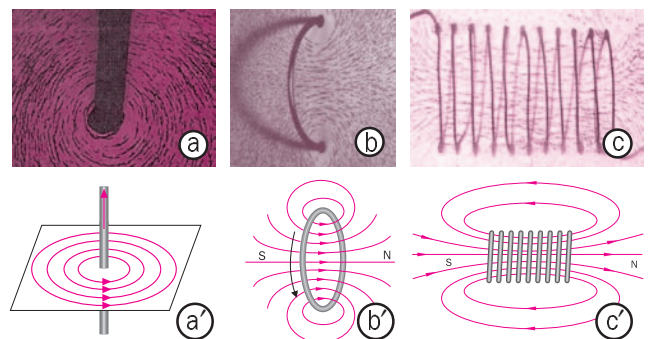


Fig. 4. Vizualizarea câmpului magnetic, creat de trecerea curentului electric printr-un conductor. S-a presărat pilitură de fier pe un carton prin care trece conductorul parcurs de curent (a, b, c).

Biot și Savart, doi fizicieni francezi, au stabilit expresia inducției magnetice (\vec{B}) a câmpului magnetic produs de deplasarea în vid, cu viteza v , a unei sarcini electrice q :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^2}, \quad (3)$$

unde r este distanța dintre poziția instantanee a sarcini electrice și punctul în care calculăm inducția câmpului. Aici mărimea $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/s}$ este *permeabilitatea magnetică a vidului*, mărime care caracterizează proprietățile magnetice ale acestuia. În raport cu vidul, un câmp magnetic în alt mediu va fi de μ_r ori mai mare, unde μ_r este permeabilitatea relativă a mediului, mărime pozitivă și adimensională.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r}{4\pi} \cdot \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^2}. \quad (3')$$

Din relația de definiție a inducției magnetice, dată de Biot și Savart, ca produs vectorial al vectorului viteză și al celui de poziție, rezultă că direcția inducției magnetice (\vec{B}) este perpendiculară pe direcția de propagare. Vectorul de poziție pleacă în acest caz radial din sarcina care creează câmpul. Vectorul intensitate a câmpului electric, \vec{E} , are aceeași direcție radială cu vectorul de poziție, ceea ce face ca vectorul inducție să fie perpendicular și pe acesta.

Concluzie. În cazul unui câmp electric și a unui magnetic creat de o sarcină electrică aflată în mișcare, vectorii intensitate a câmpului electric (\vec{E}) și inducția câmpului magnetic (\vec{B}) sunt perpendiculari pe direcția de deplasare a sarcinii (direcția vitezei).

Deși am definit mărimile care caracterizează cele două câmpuri, până acum nimic nu evidențiază că între acestea ar exista o legătură, alta decât cea dată de sarcina electrică, sau că cele două câmpuri s-ar influența reciproc. Aspectul a fost relevat de Faraday, descoperitorul fenomenului de inducție, care a arătat că *un câmp magnetic variabil în timp determină inducerea unei tensiuni electromotoare alternative sau a unui curent alternativ* după cum circuitul în care se produce este deschis sau închis.

Pe baza analizei datelor expuse mai sus, în 1865, James Clerk Maxwell, dezvoltă o ipoteză simetrică a comportării celor două câmpuri, și anume că o variație a câmpului electric determină la rândul ei o variație corespunzătoare a câmpului magnetic. Deși la data respectivă ipoteza lui Maxwell nu a putut fi probată, din cauza dificultăților de detecție ale câmpurilor magnetice slabe produse de variații ale câmpului electric, el a justificat ipoteza pe baza comportării circuitului oscilant. După cum s-a văzut în lecția anterioară, într-un astfel de circuit cele două câmpuri se generează reciproc din

propriile lor variații. Maxwell a realizat o teorie integrată a celor două câmpuri pe baza unui set de patru ecuații, care de atunci îi poartă numele. Aceste ecuații reprezintă formulări ale legilor lui: Ampere, Faraday și Gauss (una pentru câmpul electric și alta pentru cel magnetic), la care s-a adăugat expresia forței Lorentz, forță care acționează asupra unei particule purtătoare a unei sarcini electrice q ce se deplasează în câmpuri electrice și magnetice, $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Cele patru ecuații descriu câmpul electromagnetic și propagarea acestuia prin intermediul unor unde care au fost numite *electromagnetice*.

Unda electromagnetică

Am văzut în lecția anterioară că, într-un circuit oscilant, se produce un fenomen oscilatoriu care constă dintr-o deplasare a electronilor liberi din circuit de o parte și de alta a pozițiilor lor instantanee de echilibru – cu transformarea reciprocă a câmpului electric în câmp magnetic. Dacă o astfel de oscilație este făcută să se propage, spunem că s-a format o undă electromagnetică.

Experimental, undele electromagnetice au fost obținute pentru prima dată de Hertz (fig. 5).



HEINRICH HERTZ
(1857-1894)

Fig. 5. A descoperit undele radio, demonstrând modul cum acestea pot fi generate. Le-a determinat viteza, arătând că este aceeași cu viteza luminii. A evidențiat fenomenele de reflexie, refracție și difracție la undele radio.

Cu ajutorul a două circuite (emițător și receptor) formate din niște înfășurări de sârmă (bobine) la capetele cărora erau două sfere (condensatorul), Hertz a reușit să producă în înfășurarea receptorului, prin intermediul unor impulsuri de tensiune în înfășurarea emițătorului, unde electromagnetice cu o frecvență de aproximativ 100 MHz (în domeniul de radiofrecvență).

Pentru a studia procesul de formare a undelor electromagnetice, să considerăm un circuit oscilant în care, printr-un procedeu oarecare, putem menține oscilațiile electrice. Acest lucru este echivalent cu menținerea în regiunea circuitului a unui câmp electric și a unui magnetic, ambele variabile. Pentru ca propagarea să aibă loc, sistemul trebuie să fie cât mai puțin izolat de spațiul înconjurător (deschis).

Dacă luăm, de pildă, un condensator cu armăturile foarte apropiate și o bobină cu spirele înfășurate des, atunci – practic – câmpurile vor fi concentrate între

armături și în interiorul bobinei. Pentru creșterea capacității de iradiere a circuitului, trebuie să mărim distanțele între armăturile condensatorului și să realizăm o porțiune de circuit care să aibă inductanță (L), dar nu sub forma unei bobine, ci a unui circuit mai deschis (fig. 6).

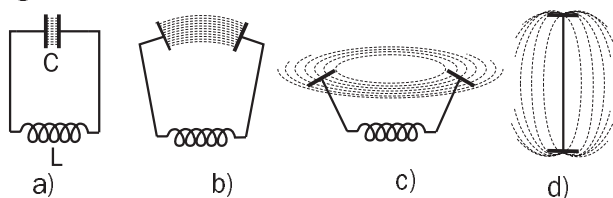


Fig. 6. Circuite oscilante cu diferite grade de deschidere.

Dacă îndepărtăm armăturile condensatorului și vom întinde într-o linie dreaptă conductorii care leagă bobina cu condensatorul, se obține un circuit oscilant deschis numit *dipol*.

Schematic, dipolul se poate reprezenta prin două sarcini egale și de semn contrar, $+q$ și $-q$, distanța dintre ele, l , în cazul discutat de noi, variind periodic. În cazul câmpului electric staționar, linia de câmp, prin convenție începe din sarcina pozitivă și se termină în sarcina negativă. Acest lucru se întâmplă și în cazul în care sarcinile care formează dipolul se află în mișcare. Să studiem grafic în ce fel apare o linie de câmp electric în jurul dipolului și forma acesteia, începând de la starea în care sarcinile $+q$, $-q$ se află la distanța l una de alta (fig. 7).

Linia de câmp este, în acest caz, abc . Pe măsură ce sarcinile se apropie, linia de câmp se închide, sub forma unei bucle. Prin mișcarea ulterioară a sarcinilor în câmp se formează o linie de câmp închisă.

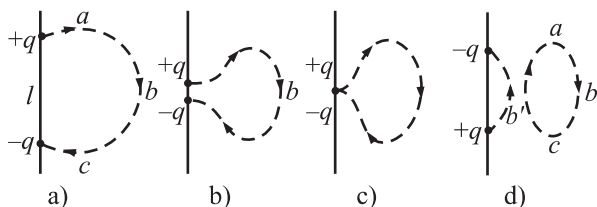


Fig. 7. Liniile de câmp în jurul dipolului, în momente succesive.

Când există un număr mare de sarcini care oscilează, în dipol va exista o suprapunere de linii de câmp, ca în fig. 8.

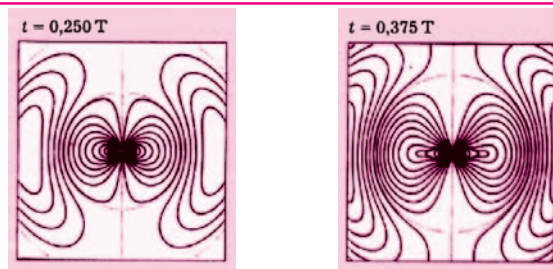
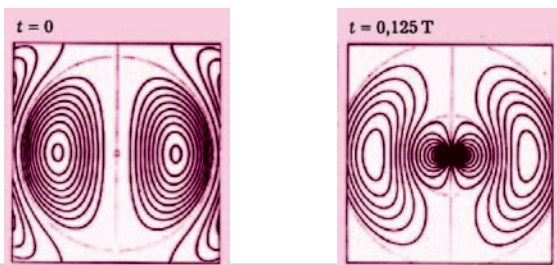


Fig. 8. Producerea liniilor de câmp în spațiul din jurul unui dipol. Vedere plană.

Producerea câmpului electric variabil va determina apariția, în jurul dipolului, a unui câmp magnetic variabil, perpendicular pe cel dintâi.

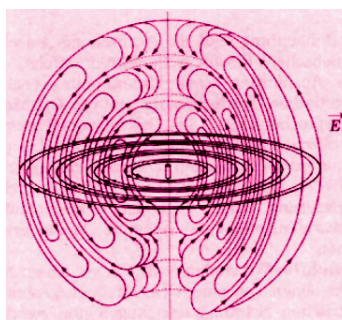


Fig. 9. La frecvențe înalte, câmpurile se detașează de dipol și se propagă în spațiu sub formă de unde electromagnetice.

Deci se poate spune că, datorită sarcinii în mișcare, în jurul dipolului se generează și se distruge periodic un câmp electric și unul magnetic (fig. 9).

Prin realizarea unui circuit oscilant deschis Hertz a delocalizat câmpurile electric și magnetic care, generându-se reciproc, se propagă în mediul înconjurător. Radiind în spațiu unde electromagnetice, energia circuitului oscilant scade, iar dacă nu este recuperată de la o sursă de energie externă, oscilația se atenuează. Compensarea pierderilor de energie poate fi obținută prin realizarea unui cuplaj inductiv (de tipul celui realizat la transformator) între circuitul oscilant deschis și circuitul oscilant al generatorului (fig. 10).

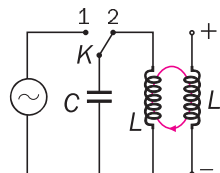


Fig. 10.

Pe poziția 1 a comutatorului K condensatorul se încarcă, iar pe poziția 2 se descarcă prin bobină, în circuitul oscilant producându-se oscilații electromagnetice. În circuitul dipolului se va induce o tensiune electromotoare alternativă cu o perioadă egală cu cea a oscilațiilor magnetice din circuitul oscilant.

Un experiment simplu poate pune în evidență principiul de emisie discutat anterior (fig. 11).

Laborator

Studiul dipolilor semiundă

Materiale necesare:

- 2 dipoli identici
- generator de înaltă frecvență
- bec cu incandescență.

• În experiment sunt utilizați doi dipoli identici (două circuite oscilante deschise), primul, cuplat la un generator de înaltă frecvență (fig. 11), va genera unde electromagnetice.

• Frecvența undelor generate poate fi modificată prin schimbarea lungimii dipolului.

• Dacă lungimea celui de-al doilea dipol este egală cu a primului, se produce fenomenul de rezonanță, caz în care becul cu incandescență conectat la cel

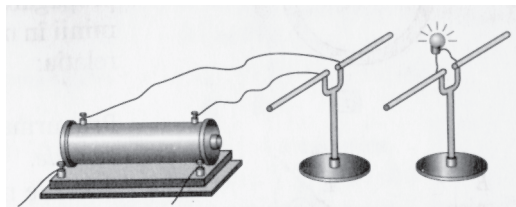


Fig. 11.

de-al doilea dipol se aprinde. La rezonanță lungimile celor doi dipoli (l) sunt egale cu jumătate din lungimea de undă λ a undelor electromagnetice generate de

primul dipol, $l = \frac{\lambda}{2}$. Acesta este și motivul pentru care dipolii descriși poartă numele de *dipoli semiundă*. Primul reprezintă antena semiundă emițătoare, iar cea de-a doua, antena semiundă receptoare.

După cum apare în reprezentările din figura 9 și din figura 12, cele două câmpuri, caracterizate de mărimile fizice vectoriale: intensitatea câmpului electric, \vec{E} , și inducția câmpului magnetic, \vec{B} , sunt perpendiculare între ele. Din această cauză, undele electromagnetice sunt unde transversale. Mai mult, când într-un punct din spațiul din jurul dipolului, câmpul electric este maxim, și cel magnetic este la rândul său maxim.

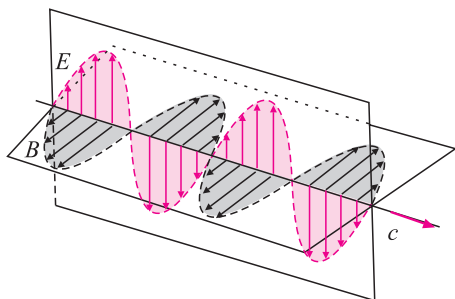


Fig. 12. Câmpurile electrice și magnetice se propagă perpendicular una față de cealaltă și cu faze egale.

Valorile momentane ale vectorilor \vec{E} și \vec{B} sunt funcții sinusoidale și oscilează în fază

$$E = E_m \sin 2\pi vt$$

$$B = B_m \sin 2\pi vt,$$

unde v este frecvența unei unde electromagnetice. Sinusoidele descrise de vectorii \vec{E} și \vec{B} corespund

lungimii de undă $\lambda = \frac{v}{\nu}$.

Maxwell a stabilit că viteza de propagare a unei unde electromagnetice în vid este dată de expresia:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}},$$

unde ϵ_0 și μ_0 sunt permitivitatea, respectiv permeabilitatea magnetică a vidului. Valoarea lui c coincide cu viteza luminii. Deci lumina este o undă electromagnetică. Într-un mediu oarecare cu permitivitatea relativă (ϵ_r) și permeabilitatea magnetică relativă (μ_r), viteza unei unde este:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}},$$

iar raportul dintre intensitatea câmpului electric și inducția magnetică a unui câmp electromagnetic în

vid este:

$$\frac{E}{B} = c.$$

Exemple

1. O undă electromagnetică se propagă într-un material de fontă, având $\epsilon_r = 10$ și $\mu_r = 1000$. Să se determine viteza de propagare și lungimea de undă a unei unde având o frecvență de 100 Hz.

Rezolvare

Viteza unei unde electromagnetice într-un mediu de permitivitate relativă ϵ_r și permeabilitate magnetică relativă μ_r este dată de relația:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{10 \cdot 1000}} = 3 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Din $v = \lambda \nu$ rezultă $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^6 \text{ m/s}}{100 \text{ Hz}} = 3 \cdot 10^4 \text{ m}$.

2. Câmpul electric maxim în vecinătatea unui emițător radio are intensitatea 10^{-3} V/m. Care este valoarea maximă a inducției B ? Cum este această valoare comparativ cu cea a câmpului magnetic terestru? Se dă inducția câmpului magnetic terestru $B_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ T.



Verificați-vă cunoștințele

- 1.** Patru sarcini electrice aflate într-un sistem de referință inercial se comportă după cum urmează: prima se află în repaus, a doua se mișcă rectiliniu uniform, a treia – se mișcă uniform accelerat, a patra efectuează oscilații armonice. Care dintre ele produce unde electromagnetice? Justificați răspunsul.
- 2.** Circuitul oscilant al unui aparat de radio este format dintr-o bobină cu inductanța $L = 5 \cdot 10^{-8}$ H și un condensator. Care trebuie să fie capacitatea condensatorului pentru ca acesta să fie acordat pe lungimea de undă de 94 m?
- 3.** Un emițător produce unde electromagnetice. Cum trebuie modificată capacitatea antenei pentru ca frecvența undelor emise să se micșoreze de două ori?
- 4.** Care este lungimea antenei semiundă, dacă frecvența oscilațiilor electromagnetice induse în aceasta este proporțională cu frecvența proprie a circuitului oscilant ale cărei caracteristici sunt: $C = 0,1$ mF; $L = 1$ mH?
- 5.** Viteza de propagare a unei unde electromagnetice este $v = 0,9$ c. Știind că frecvența undei este $\nu = 10^{12}$ Hz, calculați:
 - a) perioada și lungimea de undă a undei;
 - b) spațiul parcurs de undă în timpul $t = 3$ ms.
- 6.** Raportul dintre lungimea de undă a unei unde electromagnetice într-un mediu oarecare și cea corespunzătoare în vid este $k = 0,8$. Distanța dintre două puncte A și B ale mediului este $d = 10$ m. În cât timp parcurge unda distanța AB ?
- 7.** Pentru ce lungime de undă este adaptat un radioreceptor, dacă circuitele sale oscilante au capacitatea $C = 8$ nF și inductanța proprie $L = 2$ MH?
- 8.** Un circuit oscilant are capacitatea $C = 0,6$ mF și inductanța proprie $L = 10^{-4}$ H. Aflați lungimea de undă a radiației emise.
- 9.** Frecvența unei unde electromagnetice care se propagă din vid într-un mediu cu $\epsilon_r = 81$ și $\mu_r = 1$ este $\nu = 2$ MHz. Aflați: a) lungimea de undă a undei în mediul respectiv; b) variațiile absolută și relativă ale lungimii de undă în raport cu cea corespunzătoare în vid.

Rezolvare

Presupunând emițătorul în vid, viteza de propagare a undei este $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. Din expresia $c = E/B$ se obține $B = \frac{E}{c} = \frac{10^{-3} \text{ V/m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \simeq 3 \cdot 10^{-12}$ T.

Cum inducția câmpului magnetic terestru este $B_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ T, rezultă o inducție B cu șapte ordine de mărime mai mică.

- 10.** Amplitudinea câmpului electric al unei unde electromagnetice este $E_0 = 0,09$ V/m.
 - a) Calculați amplitudinea câmpului magnetic în vid.
 - b) Presupunând neschimbată amplitudinea câmpului electric, calculați amplitudinea câmpului magnetic într-un mediu pentru care $\epsilon_r = 81$ și $\mu_r = 1$.
- 11.** Capacitatea condensatorului unui circuit oscilant poate varia între $C_1 = 56$ pF și $C_2 = 667$ pF. Lungimea de undă a radiațiilor emise este cuprinsă între $\lambda_1 = 40$ m și $\lambda_2 = 2600$ m. Aflați intervalul de valori ale inductanței.
- 12.** Fie două circuite oscilante cu $L_1 = 4,5 \cdot 10^{-3}$ H; $C_1 = 2 \cdot 10^{-9}$ F și $L_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ H, din care primul este excitator, iar al doilea rezonator. Aflați:
 - a) capacitatea celui de-al doilea circuit, dacă cele două circuite sunt în rezonanță;
 - b) lungimea de undă și frecvența de acordare a celor două circuite.
- 13.** O antenă semiundă recepționează unde electromagnetice de o frecvență dată ν . Calculați lungimea de undă a undelor respective și lungimea proprie a antenei. Se dă $\nu = 0,95$ MHz.
- 14.** Un radioreceptor are un condensator de capacitate variabilă, cuprinsă între $C_1 = 20$ pF și $C_2 = 500$ pF. Lungimea de undă minimă recepționată este $\lambda_{\min} = 200$ m.
 - a) Ce inductanță are receptorul?
 - b) Care este lungimea de undă maximă recepționată în acest caz?
 - c) Cu cât trebuie micșorată inductanța proprie a bobinei astfel încât, folosind condensatorul cu capacitatea mică, să recepționăm unde cu frecvența $\nu = 2$ MHz?
 - d) Care este, în acest caz, lungimea de undă maximă recepționată?
- 15.** Prin bobina de inductanță L a unui circuit oscilant de radiorecepție trece un curent electric de intensitate maximă I_m . Știind că viteza de propagare a undelor electromagnetice este v , iar tensiunea electrică maximă la bornele condensatorului este U_m , arătați că lungimea de undă la care este acordat acest circuit oscilant este dată de relația $\lambda = 2\pi v L I_m / U_m$.

Undele electromagnetice pot fi clasificate atât după proprietățile lor, cât și după sursele care le produc.

În primul caz, criteriul de clasificare îl reprezintă frecvența sau lungimea de undă a unei electromagnetice. Spectrul de frecvență (lungimea de undă) variază pe o plajă largă de valori de mai multe ordine de mărime, (fig. 1 Tabelul 1).

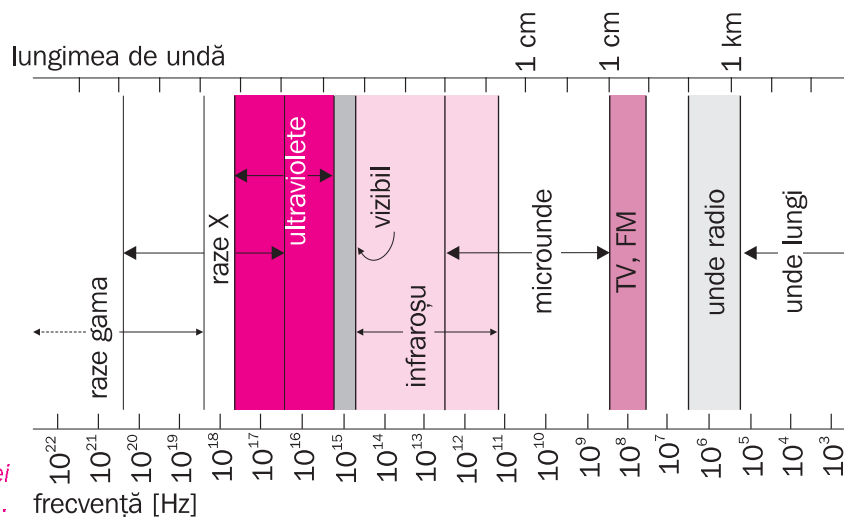


Fig. 1. Spectrul radiației electromagnetice.

Tabelul 1. Principalele domenii de frecvență (lungimi de undă) ale radiațiilor electromagnetice

Tipul radiației	Frecvența (Hz)	Lungimea de undă (m)
Unde radio (UR)	câteva zeci – 10^9	Unde lungi: $3 \cdot 10^4$ – 750; Unde medii: 750 – 50; Unde scurte: 50 – 10; Unde ultrascurte: 10 – 0,3.
Microunde (MU)	10^9 – $3 \cdot 10^{11}$	0,3 – $3 \cdot 10^{-3}$ (unde deci, centi și milimetrice)
Infraroșu (IR)	$3 \cdot 10^{11}$ – $3 \cdot 10^{14}$	10^{-3} – $7,5 \cdot 10^{-7}$ (IR apropiat cu lungimi de undă apropiate domeniului vizibil și IR îndepărtat - radiație termică).
Vizibil (VIZ)	$3 \cdot 10^{14}$ – $8 \cdot 10^{14}$	$7,5 \cdot 10^{-7}$ – $3,8 \cdot 10^{-7}$
Ultraviolet (UV)	$8 \cdot 10^{14}$ – $3 \cdot 10^{17}$	$3,8 \cdot 10^{-7}$ – $6 \cdot 10^{-10}$ UV apropiat (în imediata vecinătate a domeniului vizibil, îndepărtat și extrem (în vecinătatea radiației X).
Radiație X	$3 \cdot 10^{17}$ – $3 \cdot 10^{19}$	10^{-9} – 10^{-12} m
Radiație gama (γ)	$3 \cdot 10^{19}$ – $3 \cdot 10^{22}$	10^{-12} – 10^{-14} m

O altă posibilitate de clasificare este în funcție de sursele care produc radiația. În acest caz radiațiile electromagnetice pot proveni din surse naturale sau artificiale (surse realizate de om, special în scopul producerii unor unde electromagnetice cu anumite caracteristici).

Surse naturale

Doar în ultimele decenii omul, prin dezvoltarea tehnologiei, a fost capabil să înregistreze întregul spectru al radiației electromagnetice. În acest fel imaginea sa despre univers a căpătat o cu totul altă cuprindere. Universul conține obiecte care emit mari cantități de radiație electromagnetică cu lungimi de undă sub sau

peste cele care pot fi văzute direct de către om. Unele dintre obiectele cosmice emit preponderent în banda de radiație infraroșie, altele în vizibil, altele în ultraviolet sau alte lungimi de undă ale spectrului electromagnetic.

Razele X, de exemplu, sunt emise de găurile negre, stelele neutronice, sistemele de stele binare, exploziile unor supernove, stele, Soare și chiar unele comete. Razele gama sunt produse de zonele cele mai fierbinți ale universului, în evenimente violente precum exploziile unor supernove (o modalitate prin care moare o stea), de distrugere ale atomilor sau de evenimente mai puțin dramatice așa cum sunt transformările radioactive ale unor radioizotopi.

Poate cele mai spectaculoase descoperiri în astronomia de raze gama s-au făcut la sfârșitul anilor 1960 și începutul anilor 1970, când detectoare de la bordul sateliților Vela, la origine sateliți militari au început să înregistreze scurte emisii de raze gama din spațiul cosmic îndepărtat. Astăzi, astfel de emisii gama, au loc cel puțin o dată pe zi, cu durate de la fracțiuni de secundă la câteva minute din cele mai neașteptate direcții ale spațiului cosmic. Energiile acestor emisii în doar câteva secunde pot fi mai mari decât întreaga energie emisă de Soare în toată existența sa de circa 10 miliarde de ani! Până acum se pare că astfel de procese provin doar din afara galaxiei noastre, deși cercetătorii susțin că astfel de evenimente au avut loc cu o frecvență de circa $1/10^6$ ani și în constelația Căii Lactee.

Temă în clasă. Pe grupe realizați un studiu bibliografic asupra caracteristicilor principalelor formațiuni cosmice și a emisiilor electromagnetice ale acestora.

Cea mai importantă sursă de radiație electromagnetică pentru Pământ este Soarele.

Soarele - este o stea gazoasă cu un diametru de 10^9 diametre Pământene, cu o structură neomogenă formată din 67 de elemente chimice, preponderent fiind hidrogenul (75%), urmat de heliu, carbon, azot, sodiu, siliciu și fier. În Soare, în urma reacțiilor nucleare de fuziune, se dezvoltă temperaturi de circa $2 \cdot 10^7$ K, și presiuni de 10^8 atmosfere în centru, iar la suprafață temperatura atinge circa 6000 K.

Studiile realizate, încă din secolul al XIX-lea, asupra radiației electromagnetice au condus la formularea a patru legi referitoare la radiație:

1. Orice corp emite continuu radiație, cu condiția ca temperatura acestuia să fie mai mare de zero absolut (-273 °C).

2. Obiectele cu o temperatură mai mare emit mai multă energie pe unitatea de suprafață (legea Stefan Boltzman):

$$R = \sigma T^4,$$

unde: R este putere de emisie, T este temperatura corpului negru, iar σ este o constantă ($\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$).

Dicționar

Putere de emisie (R): Energia emisă în unitatea de timp de unitatea de suprafață a corpului emisiv, în toate direcțiile de aceeași parte a acestuia.

Corp negru: Corp care absoarbe în totalitate radiațiile care cad pe suprafața sa, indiferent de lungimea de undă a acestora sau de unghiul de incidență.

Un calcul estimativ al puterii de emisie a Soarelui comparativ cu cea a Pământului realizată pe baza legii Stefan-Boltzman conduce la valorile:

– pentru Soare:

$$R_s = (5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}) \cdot (6000 \text{ K})^4 = 73483200 \text{ W/m}^2$$

– pentru Pământ (considerând o temperatură medie pe suprafață de 300 K):

$$R_p = (5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}) (300 \text{ K})^4 = 459 \text{ W/m}^2.$$

Deci cu o temperatură de aproximativ 20 de ori mai mare ca a Pământului, Soarele emite de aproximativ 160000 de ori mai multă radiație decât acesta.

3. Cu cât este mai cald corpul (temperatura corpului este mai mare), cu atât mai scurtă va fi lungimea de undă a radiației maxime emise (legea Wien). Legea Wien este o relație matematică care face legătura dintre temperatura corpului emisiv (T) și lungimea de undă maximă a radiației emise (λ_{max}).

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{C}{T},$$

unde C este numită constanta Wien și are valoarea $C = 2898 \cdot 10^{-6} \text{ mK}$.

În cazul Soarelui, din legea Wien rezultă:

$$\lambda_{\text{maxS}} = \frac{2898 \mu \text{mK}}{6000 \text{ K}} = 0,483 \mu \text{m}$$

Iar în cazul Pământului:

$$\lambda_{\text{maxP}} = \frac{2898 \mu \text{mK}}{300 \text{ K}} = 9,66 \mu \text{m}$$

Se constată că, în timp ce maximum de emisie al radiației electromagnetice a Soarelui este în domeniul vizibil cel al Pământului este în domeniul radiației infraroșii.

4. Corpurile care sunt bune absorbante de radiație sunt și bune emițătoare. Atât Soarele cât și Pământul au o eficiență de absorbție/emisie de aproape 100%, deci pot fi asemuite unor corpuri negre.

Radiațiile electromagnetice emise de Soare cuprind întregul spectru de lungimi de undă de la undele radio la radiație X și γ (fig 2).

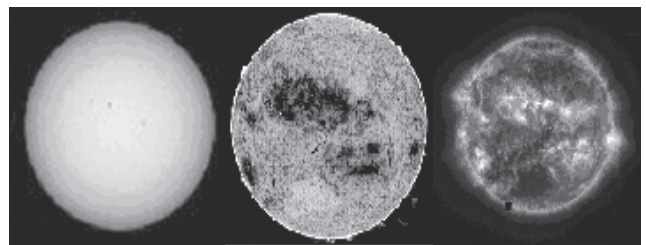


Fig 2. Imagini ale Soarelui în: vizibil (a), infraroșu (b) și ultraviolet (c).

Pământul - Deși Soarele trimite pe Pământ o mare cantitate de energie sub formă de radiație electromagnetică, păstrarea echilibrului energetic al Pământului cere ca energia emisă în spațiu de cel din urmă să fie aceeași cu cea primită de la Soare. Dacă acest lucru nu s-ar întâmpla, energia Pământului ar crește sau ar scădea afectând întreaga biosferă. Pământul și tot ceea ce se află pe el, reprezintă surse de radiație electromagnetică cu un maxim de emisie în domeniul IR.

Surse naturale terestre

Orice corp este, după cum am văzut, o sursă de radiație IR – din zona îndepărtată a acestui domeniu de frecvențe (radiație termică) (fig. 3).



Fig. 3. Imaginea unui om în IR. Emisia are o lungime de undă de circa $10 \mu\text{m}$. O astfel de imagine se obține prin colorare artificială pe computer, a zonelor cu temperaturi distincte.

Radiația gama este emisă de sursele terestre radioactive (izotopi radioactivi), combinate chimic în minerale sau în gazele atmosferice. Acestea provin din lanțurile de dezintegrare ale unor elemente grele. De exemplu, ${}_{92}\text{U}^{238}$ (uraniul –238), emite prin dezintegrare o particulă alfa (nucleu de heliu) însoțită de o radiație electromagnetică din spectrul gama cu o energie de 48 keV.

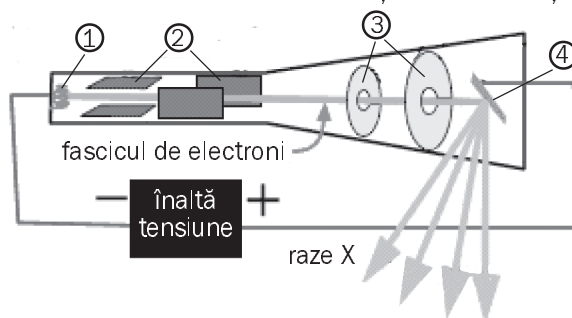
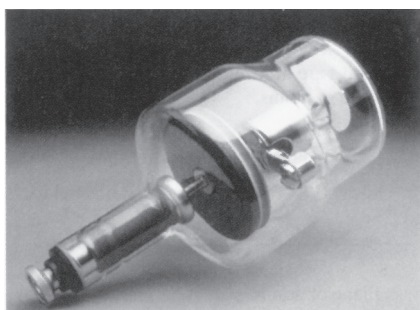


Fig. 4. Dispozitiv de producere a radiației X (a) și schema acestuia (b) (catod fierbinte la înaltă tensiune – emite electroni prin efect Joule (1); diferența de tensiune dintre catod și anod va accelera electronii care sunt deplasați pe orizontală și pe verticală de câmpurile electrice a două perechi de plăci de deflexie (2); plăci de accelerare (3); anodul este ținta metalică prin ciocnirea cu care fasciculul de electroni va determina producerea radiației X (4).

Dicționar

kiloelectron volt (keV): 10^3 eV (electron volt).

Electron volt (eV): Unitate de măsură a energiei în fizica atomică și nucleară egală cu energia la care este accelerat un electron cu sarcina $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ de o tensiune de 1 V. Relația de trecere de la eV la Joule este: $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Alți izotopi ai uraniului emit gama într-un spectru energetic cuprins între mai puțin de 1 keV și ceva mai mult de 1,14 MeV. De exemplu, nucleele radioactive ale ${}_{88}\text{Ra}^{226}$ (radu) au o emisie alfa acompaniată de o emisie gama de 200 keV. Spectrul radiațiilor gama emise sunt caracteristice elementului putând fi utilizate la detectarea prezenței elementului într-o probă radioactivă.

O serie de alte surse cu emisie electromagnetică o constituie fenomenele atmosferice (furtuni, tornade, etc. sau de altă natură).

Surse artificiale

Mediul în care trăim este invadat de radiație electromagnetică generată artificial. Undele radio și microundele sunt generate electronic de către oscilații ale electronilor în conductoare, prin modularea tensiunilor aplicate și a lungimii antenelor. Frecvența radiației este de obicei controlată utilizând frecvențele naturale ale unor circuite cu cristale de cuarț. Metoda este folosită pentru generarea undelor electromagnetice utilizate în cuptorul cu microunde (cu un dispozitiv numit magnetron), dar și la radar sau utilizarea telecomandată a unor dispozitive electronice.

Razele X - sunt produse prin accelerarea unui fascicul de electroni cu ajutorul unei tensiuni electrice înalte. Fasciculul astfel accelerat ciocnește o țintă metalică producând radiația X. Razele astfel obținute au energii determinate în întregime de tensiunea de accelerare a electronilor și de structura țintei.

Rezumat

- În funcție de lungimea de undă sau frecvența acestora radiațiile electromagnetice se clasifică în: unde radio, microunde, infraroșu, vizibil, ultraviolet, raze X sau gama.
- În funcție de sursele care produc aceste radiații acestea se clasifică în surse naturale, terestre sau extraterestre și surse artificiale.
- Indiferent de sursă, radiația emisă de un corp se supune următoarelor legi:
 1. Orice corp emite continuu radiație, cu condiția ca temperatura acestuia să fie mai mare de zero absolut ($-273\text{ }^{\circ}\text{C}$).
 2. Obiectele cu o temperatură mai mare emit mai multă energie pe unitatea de suprafață (legea Stefan-Boltzman):

$$R = \sigma T^4,$$

unde: R este putere de emisie, T este temperatura corpului negru, iar σ este o constantă ($\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$).

3. Cu cât este mai cald corpul (temperatura corpului este mai mare) cu atât mai scurtă va fi lungimea de undă a radiației maxime emise (legea Wien).

$$\lambda_{\max} = C/T,$$

unde C este numită constanta Wien și are valoarea $C = 2898 \cdot 10^{-6} \text{ mK}$.

4. Corpurile care sunt bune absorbante de radiație sunt și bune emițătoare. Un corp perfect absorbant (emițător) al radiației se cheamă corp negru.



Verificați-vă cunoștințele

- 1.** Care sunt principalele criterii de clasificare ale radiațiilor electromagnetice?
- 2.** Copiați în caiete cele două coloane (A) și (B) și uniți tipul radiației (coloana A) cu domeniul lungimii de undă al acesteia (coloana B)

A	B (m)
unde radio	$10^{-9} - 10^{-12}$
microunde	$3,8 \cdot 10^{-7} - 6 \cdot 10^{-10}$
infraroșu	$3 \cdot 10^4 - 0,3$
vizibil	$10^{-12} - 10^{-14}$
ultraviolet	$0,3 - 3 \cdot 10^{-3}$
radiație X	$7,5 \cdot 10^{-7} - 3,8 \cdot 10^{-7}$
radiație gama (γ)	$10^{-3} - 7,5 \cdot 10^{-7}$

- 3.** Copiați în caiete cele două coloane (A) și (B) și uniți tipul radiației (coloana A) cu domeniul de frecvență al acesteia (coloana B).

A	B (Hz)
unde radio	$3 \cdot 10^{11} - 3 \cdot 10^{14}$
microunde	$3 \cdot 10^{14} - 8 \cdot 10^{14}$
infraroșu	$8 \cdot 10^{14} - 3 \cdot 10^{17}$
vizibil	$3 \cdot 10^{17} - 3 \cdot 10^{19}$
ultraviolet	$10^{19} - 3 \cdot 10^{22}$
radiație X	câteva zeci - 10^9
radiație gama (γ)	$10^9 - 3 \cdot 10^{11}$

- 4.** Care sunt cele patru legi ale radiației și care este semnificația fizică a mărimilor care au fost definite pentru unele dintre acestea?

5. Descrieți modul de producere al undelor radio.

6. Numiți surse de radiație gama și modul de producere al acestora.

7. Cum sunt produse razele X?

8. Dacă puterea de emisie (R) a unui corp negru este 10^6 W/m^2 , care este temperatura suprafeței acestuia? Se dă constanta din legea Stefan-Boltzman: $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$.

9. Care este puterea de emisie (R) a unui corp negru a cărui temperatură la suprafață este de 10^3 K ? Se dă $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$.

10. Pentru corpurile din problemele **8** și **9**, determinați lungimile maxime ale radiațiilor emise. Se cunoaște constanta Wien ($C = 2898 \cdot 10^{-6} \text{ mK}$). În ce domenii de radiații se află aceste maxime?

11. Dacă radiația maximă emisă de un corp negru are o lungime de undă de $3,7 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ care este puterea de emisie (R) a corpului? Se cunosc: $C = 2898 \cdot 10^{-6} \text{ mK}$, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$.

12. Puterea de emisie a unui corp negru este 10^4 W/m^2 . Care este lungimea de undă maximă a radiației emise? Corpul emisiv este de formă sferică și are o rază de $3,2 \cdot 10^3 \text{ m}$. Care este energia emisă în unitatea de timp a acestui corp la lungimea de undă maximă a radiației emise?

Se cunosc: $C = 2898 \cdot 10^{-6} \text{ mK}$, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$.

Undele radio. Undele radio au lungimile de undă cele mai mari din cadrul spectrului electromagnetic. Aceste unde sunt purtătoare ale semnalelor radio, TV sau al telefoniei mobile. Ele și-au găsit o largă aplicabilitate în transmisia la distanță a informației - telecomunicații.

Radiocomunicația a fost realizată pentru prima oară de italianul Guglielmo Marconi în 1895. Principiul radiocomunicației este dat în figura 1 și cuprinde un sistem de emisie (a) și unul de recepție (b).

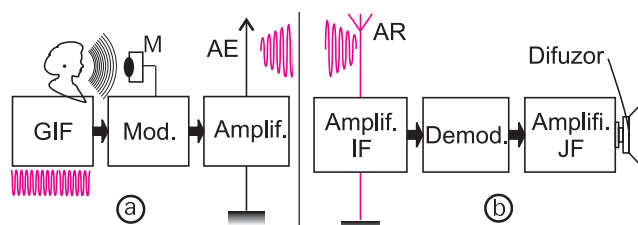


Fig. 1. Radiocomunicația – sistemul de emisie (a): microfon (M), generator de înaltă frecvență (GIF), modulator (Mod.), amplificator (Amplif.), antenă de emisie (AE); sistemul de recepție (b): antenă de recepție (AR), amplificator de înaltă frecvență (Amplif. IF), demodulator (Demod.), amplificator de joasă frecvență (Amplif. JF), difuzor.

Generatorul de înaltă frecvență produce un semnal de înaltă frecvență (fig. 2b) care constituie unda purtătoare. Acest semnal este modulată în frecvență (fig. 2d) sau în amplitudine (fig. 2c) de către modulator.

Peste acest semnal sunt suprapuse în modulator oscilațiile electromagnetice de joasă frecvență (fig. 2a)

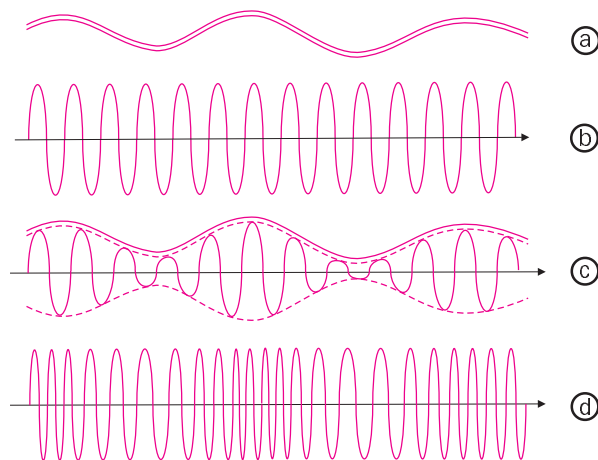


Fig. 2. Oscilație de joasă frecvență (a); undă purtătoare (b), undă modulată: în amplitudine (c); în frecvență (d).

produse de microfon. Acesta transformă unda sonoră în semnale electrice care vor constitui de fapt informația transmisă. Oscilațiile electromagnetice de înaltă frecvență având energie mare transmit la distanță unda sonoră tradusă în semnal electric de joasă frecvență. Undă de înaltă frecvență, ca urmare a rolului de transmitere a informației, poartă denumirea de *undă purtătoare*. Amplificatorul are rolul de a mări puterea oscilațiilor electromagnetice de înaltă frecvență modulate. Undele electromagnetice modulate sunt emise de antenă.

Receptorul prin antena de recepție, acordată pe frecvența emițătorului va determina în circuit apariția unor oscilații electromagnetice de aceeași frecvență cu oscilațiile electromagnetice venite de la emițător. De aici semnalul ajunge la detector care separă componenta de joasă frecvență pe care o trimite spre amplificator și de aici la difuzor. Acesta va decoda semnalul de joasă frecvență sub forma unui semnal sonor produs de vibrațiile membranei elastice a difuzorului.

Undele radio sunt transmise în câteva benzi de frecvență numite adesea unde lungi, medii, scurte și ultrascurte. Fiecare dintre aceste benzi conține un anumit domeniu de frecvențe, iar fiecărei stații de radio emisie i se atribuie o anumită frecvență din bandă.

Televiziunea – procesele fizice care concurează la funcționarea televiziunii moderne sunt: transformarea undelor electromagnetice din domeniul vizibil în semnale electrice; propagarea acestor semnale prin diferite canale de comunicație (radiație electromagnetică, cablu, rețele optice) și reconversia semnalului recepționat în imagine.

Din cele învățate la optică, formarea imaginii color pe retină este datorată celulelor fotoreceptoare (conuri – de trei tipuri distincte potrivit fotopigmentului conținut) sensibile la câte unul din cele trei domenii de frecvență ale radiației vizibile. Punctele luminoase înregistrate de celulele fotoreceptoare determină producerea unei imagini care apare continuă ca urmare a puterii limitate de discriminare a ochiului. Aceasta este și ideea producerii unor imagini de televiziune. Procesul de scanare al imaginii formate din puncte de diferite culori și de diferite intensități operează în același mod în care citim această pagină linie cu linie și literă cu literă. Fiecare pagină astfel înregistrată conține 525 de linii și se înregistrează 30 de imagini pe secundă pentru producerea senzației de mișcare.

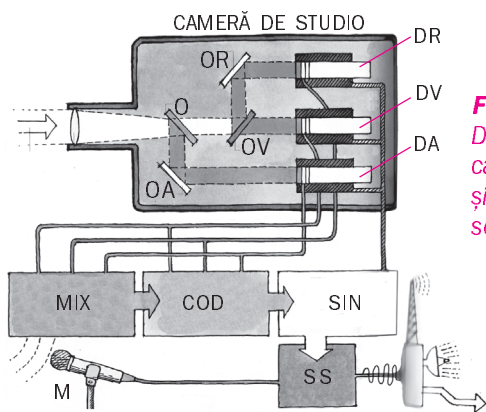


Fig. 3. Diagrama unei camere TV și a obținerii semnalului TV.

Sistemul de emisie: În principiu, lumina venită de la obiect este descompusă prin intermediul unui sistem de oglinzi (O, OR, OV, OA) în trei culori fundamentale (roșu (R), verde (V), albastru (A)) (fig. 3). Fiecare imagine formată este convertită de detectorul radiației respective (DR; DV; DA) în semnal electric. Amestecul celor trei imagini este realizat într-un mixer (MIX) de culoare care va produce un semnal al strălucirii fiecărei părți a obiectului scanat de cei trei detectori. De aici semnalul este transmis unui codificator de culoare (COD) care stabilește cantitatea din fiecare culoare care intră în fiecare punct al imaginii. Semnalul este transmis apoi unui sincronizator de semnal care are rolul de a sincroniza cei trei detectori pentru ca aceștia să scaneze simultan aceeași zonă a obiectului (SIN). În final se adaugă semnalul sonor (SS) înainte de transmiterea acestuia prin undă radio sau prin cablu.

Detectorii sunt constituiți de către un microcip conținând mii de fotodiode sensibile la lumină. În fiecare dintre aceste fotodiode lumina determină eliberarea unui număr de electroni care va produce un anumit nivel de sarcină negativă proporțional cu intensitatea luminoasă. Fiecare șir de elemente dă o singură linie din cele 525 de linii ale imaginii. Electrozii care pleacă de la aceste

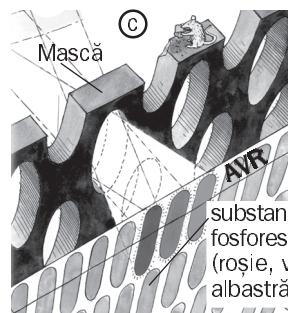
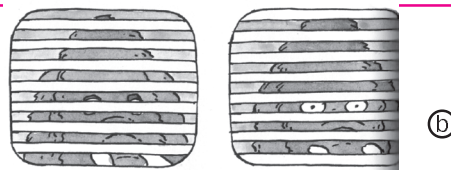
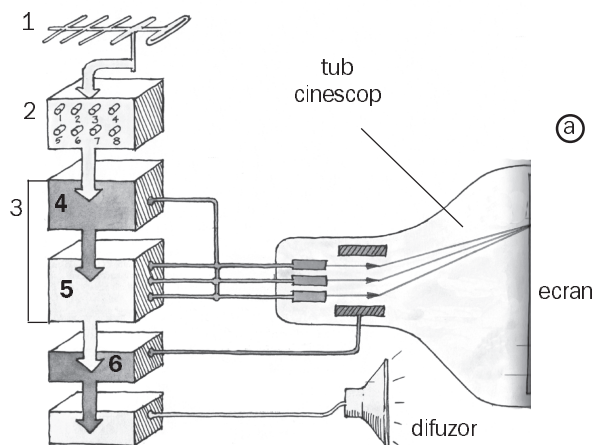


Fig. 4. Recepția semnalului și producerea imaginii în televizor (a): scanarea alternativă a liniilor impare urmată de cele pare (b); structura ecranului televizorului (c).

fotodiode vor permite transmiterea semnalului electric pentru formarea fiecărui ecran imagine.

Sistemul de recepție: Procesul de recepție comportă următoarele etape (fig. 4a):

- unda radio modulată cu semnalul video este recepționată de antenă TV(1).
- Selectorul de canale (2) are rolul de a selecta frecvența unei purtătoare a stației TV de o manieră similară celei a recepției unui post de radio.
- Semnalul electric de la antenă trece apoi printr-un lanț de detecție (3) care va realiza decodificarea semnalului din punct de vedere al intensității luminoase (4), culorii (5) și a sincronizării (6) prin separarea celor trei semnale pe care le va trimite spre ecran și a semnalului de sunet.

Fasciculele de electroni ale celor trei semnale luminoase vor scana ecranul pentru a forma imaginea. Fiecare imagine este realizată prin două scanări ale liniilor impare și a celor pare (fig. 4b).

Ecranul conține fâșii fine de substanțe diferite care, la impactul cu fasciculele de electroni, vor produce lumină verde, albastră sau roșie (fig. 4c). Acestea sunt acoperite de o mască cu goluri care permite fiecărui fascicul de electroni să lovească numai fâșia ce produce culoarea corectă. Aceasta va produce lumina colorată a cărei strălucire este proporțională cu intensitatea fasciculului de electroni. Mișcarea orizontală și verticală a fasciculelor de electroni este realizată prin intermediul unor bobine de deflexie.

Cuptorul cu microunde

La frecvențe înalte, ca în cazul celor ale microundelor, radiația electromagnetică poate induce o creștere a amplitudinii oscilațiilor atomilor sau moleculelor unei substanțe. Aceste mișcări se manifestă ca o creștere a temperaturii corpului iradiat. Cuptorul cu microunde

funcționează pe acest principiu.

Fascicolul de microunde produs de un magnetron lovește paletetele unui ventilator care va reflecta microundele în farfuria pe care se găsesc alimentele. Microundele vor lovi moleculele de apă din conținutul acestora, apă care formează mici dipoli electrici – ca urmare a diferenței de distribuție a electronilor între atomul de oxigen și cei de hidrogen – producând oscilația acestora. Oscilația extrem de rapidă pe care o imprimă moleculele de apă este evidențiată ca nivel macroscopic de o creștere a temperaturii.

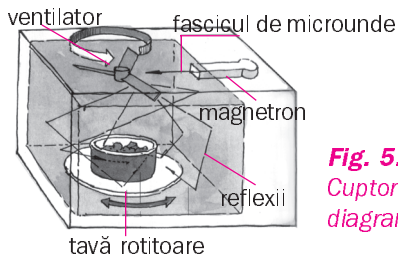


Fig. 5. Cuptor cu microunde – diagrama de funcționare.

Telecomanda

Prima telecomandă a unui televizor a apărut în 1950. Aceasta putea deschide sau închide televizorul sau comuta canalul TV, dar legătura se făcea prin cablu. Mai târziu s-a realizat prima telecomandă fără fir. Dezvoltarea sistemelor telecomandate s-a produs odată cu apariția tranzistorului și utilizarea radiației IR introduse ca sistem de telecomandă, în anii '80 ai secolului trecut, în locul ultrasunetelor.

Temă pentru acasă: Realizați un referat cu tema „Semiconductorii și principiul tranzistorului“.

Telecomanda utilizează un semnal IR pulsant care este preluat de receptor. Frecvențele radiațiilor IR utilizate sunt cuprinse între 30 kHz și 40 kHz pentru a nu interfera cu alte surse. Semnalele sunt transmise cu ajutorul unui LED cu IR (Light Emitting Diode - Diodă cu Emisie Luminescentă) în cod binar (fig. 6).



Fig. 6. Tipuri de pulsuri utilizate în transmiterea mesajelor în cod binar: semnale codate prin lungimea pulsului (a); semnale codate prin lungimea spațiilor dintre pulsuri (b); variația ordinii pulsurilor (c).

Prin grupe de astfel de semnale este codat mesajul către dispozitivul care îl recepționează, îl traduce și îi transmite execuția comenzii. Recunoașterea adresei este importantă deoarece fără aceasta semnalul ar putea fi procesat de alt receptor din zonă. Apăsarea butonului telecomenzii va trimite LED-ului, prin intermediul cipului de codificare, un mesaj de alertare a receptorului IR solicitat (fig. 7).

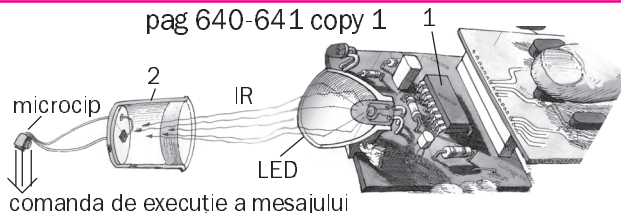


Fig. 7. Transmiterea impulsurilor IR în cod binar de către telecomandă este realizat cu ajutorul unui cip (1) care codifică semnalul. Acesta este transmis de un LED unității de recepție (2) unde o fotodiodă emite un semnal de cod către un microcip.

După acest mesaj urmează mesajul de adresă care pregătește dispozitivul de recepție pentru preluarea comenzii, setul de impulsuri în cod binar care constituie mesajul executabil. Mesajul scris de LED este transmis unității de recepție (2). Decodarea de către unitatea de recepție se bazează pe o fotodiodă sensibilă la radiația IR. Radiația în pulsuri ajunsă la fotodiodă va elibera niște electroni care vor forma un curent slab care intră într-un decodor, un microcip care decodifică mesajul recepționat.

Temă pentru acasă: Realizați un referat cu tema „Principiile de operare ale circuitelor logice – microcipul“.

Radiolocația: Radarele reprezintă instrumente cu un rol important în meteorologie, transporturi și armată. Cuvântul vine din acronimul în limba engleză „Radio Detection and Ranging”. Radarul produce un puls de energie electromagnetică care, focalizat de o antenă, este transmis în atmosferă. Obiectele aflate în calea acestui puls electromagnetic, numite ținte, împrăștie energia electromagnetică. Parte din aceasta se va întoarce la radar (fig. 8).

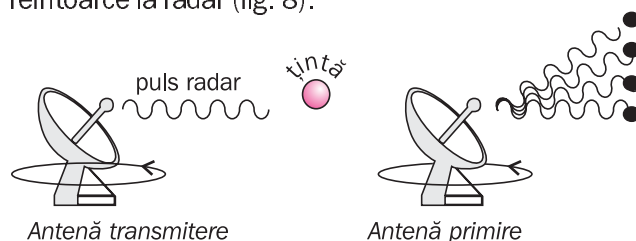


Fig. 8. Emisie (a) și recepție (b) radar.

Fiind împrăștiat în toate direcțiile, semnalul retransmis la radar de către ținte este mai slab decât semnalul inițial. El este proporțional cu mărimea țintei și numărul de ținte întâlnite (fig. 8b). Mărimea măsurată de radar este *puterea de revenire* a semnalului. O revenire mare a semnalului, în cazul utilizării radarului în meteorologie, poate însemna, de exemplu, existența în atmosferă a unei arii de precipitații bogate (reflexia semnalului radar se face în acest caz pe picăturile de

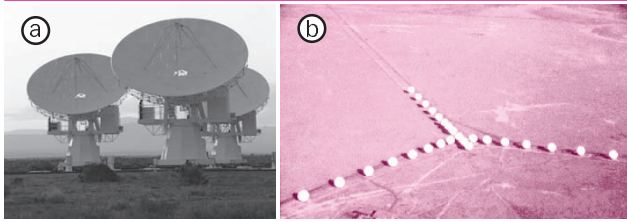


Fig. 9. Radiotelescop (a). Observatorul radio-astronomic din New Mexico - compus din 27 antene dispuse în Y pe o distanță de 36 km. Fiecare antenă are 26 m în diametru, cântărește peste 200 t și se deplasează pe linii de cale ferată. În focarul fiecărei antene se găsește un preamplificator electronic care conduce semnalul radio amplificat la un etaj de amplificare (b).

ploaie), în timp ce o revenire mică implică precipitații slabe. Majoritatea radarelor lucrează cu lungimi de undă cuprinse între 0,8 cm și 10 cm.

Radioastronomia. Captarea undelor electromagnetice se realizează cu radiotelescoape, care le focalizează prin reflexie (fig. 9a). În cazul undelor de radio-frecvență, din cauza lungimilor de undă mari, radiotelescoapele sunt cu mult mai mari decât telescoapele optice. Pentru obținerea unor imagini clare, cu o rezoluție bună, radiotelescoapele pot fi combinate în rețele, pe arii extinse funcționând astfel ca un unic radiotelescop cu o deschidere egală cu aria respectivă (fig. 9b).

În deceniul al șaselea al secolului trecut, Penzias și Willson, cercetători ai Laboratoarelor Bell (SUA), au detectat accidental, cu o antenă cu zgomot scăzut, un semnal straniu din univers, care venea din toate direcțiile cu o intensitate constantă. Dacă semnalul ar fi venit dintr-o singură direcție el ar fi fost pus pe seama unei surse de radiație aflată pe direcția respectivă. Curând oamenii de știință și-au explicat această ciudată radiație ca pe un zgomot de fond al universului produs în urma unui eveniment care se crede, ar proveni din chiar începuturile acestuia. Radiația respectivă are o lungime de undă caracteristică unei temperaturi de circa 3 K. Conversia în metrii o puteți face și voi utilizând legile radiației din lecția precedentă.

Detecția radiațiilor electromagnetice nu se poate face în totalitate de pe Pământ a cărui atmosferă este practic opacă la unele dintre lungimile de undă ale radiației electromagnetice de proveniență cosmică (fig. 10).

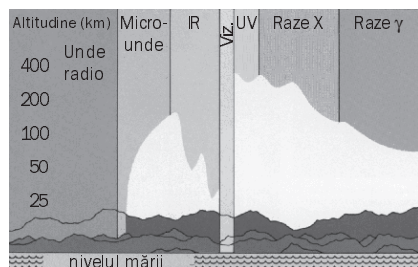


Fig. 10. Transparența atmosferei terestre la diferite domenii de frecvență ale radiației electromagnetice.

În cazul radiației ultraviolet sistemele de înregistrare sunt plasate pe sateliți (de exemplu satelitul „The International Ultraviolet Explorer” - IUE realizează observații ale universului în domeniul UV extrem).

Unele tipuri de telescoape captează unde electromagnetice în alte domenii de frecvență: infraroșu, raze X, gama, ultraviolet sau microunde (fig. 11 și 12).

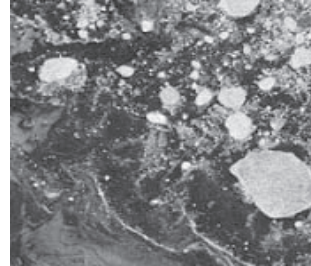


Fig. 11. Satelitul ERS-1 transmite microunde cu lungime de undă de circa 5,7 cm. Imagine a țărnelor Alaskăi.

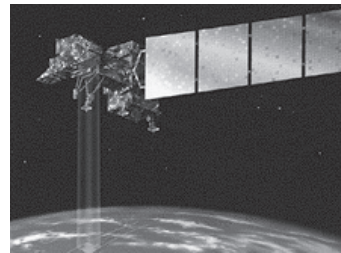


Fig. 12. Sateliți precum Landsat 7 pot înregistra radiația infraroșie emisă de Pământ.

Utilizări ale razelor X și gama - Puterea de penetrare a radiațiilor X le face ideale pentru diagnosticul medical. Pe de altă parte, energia radiațiilor X este suficientă pentru a determina ionizări ceea ce le face să prezinte risc biologic în cazul absorbției de către țesutul uman.

Razele gama datorită energiei lor extrem de mari pot ucide celulele vii, fapt pe care medicina îl utilizează în distrugerea țesuturilor tumorale cancerigene. Există mai multe posibilități de acțiune asupra țesuturilor tumorale, fie prin iradiere directă controlată de la surse de radiații gama conținând izotopi radioactivi, cum este cobaltul 60, fie prin ingestia directă a izotopilor radioactivi emițători ai radiației gama. În cazul ingestiei, de exemplu, se utilizează un radio-izotop încorporat chimic într-o moleculă solubilă pentru care o anumită parte a corpului constituie ținta predilectă. Intrată în fluxul sanguin aceasta este transportată în zona țintei. Acest tip de tratament produce distrugerii celulare atât celulelor canceroase cât și celor normale, ultimele posedă însă sisteme de reparare viabile absente în cazul celulelor tumorale ceea ce le permite, într-o oarecare măsură refacerea.

Razele gama de proveniență extraterestră pot fi detectate de instrumente situate în baloane meteorologice sau în sateliți aflați la mare altitudine, urmare a faptului că, similar radiațiilor X acestea sunt în cea mai mare parte absorbite de atmosferă.

Efecte ale radiației electromagnetice asupra omului și mediului – măsuri de protecție

Efectele care pot fi produse de radiația electromagnetică asupra mediului biologic depind de energia acestor radiații.

Radiația UV este foarte nocivă pentru viață. Deși o cantitate însemnată de radiații UV, venite de la Soare, penetrează partea superioară a atmosferei, mare parte din aceste radiații sunt absorbite prin două procese care au loc în stratosferă. Radiațiile UV cu lungimi de undă de până la 180 nm sunt absorbite de moleculele de oxigen din partea superioară a stratosferei. Acestea disociază parțial. Atomii proveniți în urma disocierii se combină cu molecule de oxigen ducând la formarea ozonului (O_3). Apare în acest fel un strat bogat în ozon între 20 și 50 km altitudine. La rândul său ozonul absoarbe radiația ultravioletă cu lungimi de undă cuprinse între 185 - 290 nm ducând din nou la formarea oxigenului molecular. Cele două transformări au rate similare de producere ceea ce permite menținerea constantă a concentrațiilor celor două componente. Importanța acestui strat bogat în ozon este absorbția radiației UV cu lungimi de undă inferioare valorii de 290 nm, radiații foarte agresive pentru lumea vie.

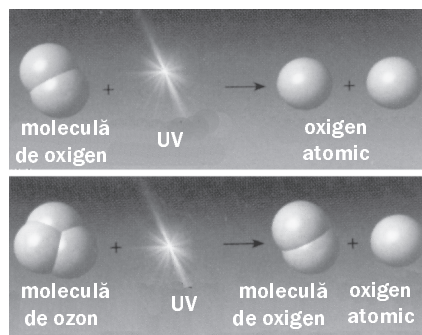


Fig. 13. Absorbția radiațiilor UV în atmosferă: a) prin intermediul ozonului și b) prin intermediul oxigenului molecular.

Radiația poate determina modificări la nivelul unor structuri biologice precum celulele în două moduri: direct (prin absorbția energiei radiației incidente) sau indirect (prin crearea de specii chimice înalt reactive care vor ataca moleculele biologice active din interiorul celulei).

Interacțiune directă. Mecanismele prin care radiația electromagnetică poate afecta direct sistemele biologice sunt:

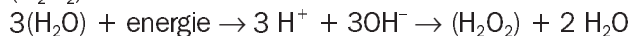
1. Termalizarea – proces prin care moleculele, pe seama energiei cedate de radiație își măresc energia cinetică. Aceasta determină la nivel macroscopic o creștere a temperaturii sistemului. Dacă temperatura devine prea mare complexele moleculare se pot scinda. Energia cinetică medie a moleculelor într-o celulă (datorită mișcării lor termice) este de circa 0,04 eV, foarte aproape de limita inferioară a energiei unora dintre legăturile moleculare ale unor molecule organice.

2. Excitația – este procesul prin care radiația incidentă cauzează eliberarea electronilor din atomi sau molecule. Acești electroni liberi sunt apoi disponibili să interacționeze cu alți atomi și molecule în sistemele iradiate. În general electronii liberi sunt capturați rapid de alți atomi, iar energia acestora se adaugă energiei termice a sistemului cu efecte minore.

3. Ionizarea – este procesul prin care, captând suficientă energie de la radiație, moleculele pot suferi ruperi ale legăturilor chimice. Acestea pot cauza modificări sau distrugerii ale complexelor moleculare. Energiile legăturilor covalente și a celor ionice dintre atomii unor molecule anorganice simple (așa cum este clorura de sodiu) sunt cuprinse între 2 și 5 eV, circa jumătate din energiile de ionizare ale unui atom. Multe molecule organice importante în biologia celulei au energii de legătură (așa numitele „legături slabe”) cuprinse între circa 0,04 și 0,3 eV.

Interacțiunea indirectă

În celulă, care are un bogat conținut de apă, sunt produse prin interacțiuni indirectă în urma reacției de hidroliză a apei specii reactive (radicali liberi) precum ionul hidroxil - OH^- sau ionul hidroniu - H_3O^+ . De obicei, acești ioni au energii scăzute și se recombina reformând molecula de apă. În cazul în care energiile sunt mai mari radicalii liberi vor forma peroxidul de hidrogen (H_2O_2).



Această moleculă este puternic reactivă, iar în interacțiune cu moleculele organice din interiorul celulei produce lanțuri de radicali organici specii extrem de reactive în mediu. Aceștia vor putea ataca ADN-ul sau alte molecule importante din celulă care reglează funcții vitale ale acesteia. Deși celulele au dezvoltat mecanisme de apărare împotriva distrugerilor provocate de radicalii liberi producerea acestora în exces poate determina distrugerii care să ducă la mutații genetice sau la moartea celulei. Interacțiunea moleculelor de apă cu radiația reprezintă doar unul din efectele distructive ale radiației asupra moleculelor, studiile biochimiei radiației dovedindu-se extrem de complexe în ceea ce privește efectele radiației asupra sistemelor biologice. Studiile arată însă că efecte majore în intervale scurte de timp sunt date de interacțiunea cu radiația electromagnetică de mare energie cum sunt radiațiile ultraviolete, razele X sau gama. Efectul este unul cumulativ în sensul că sunt necesare mai multe loviri ale țintei într-un interval de timp suficient de scurt pentru ca sistemul de apărare al celulei să fie depășit și leziunea să devină permanentă.

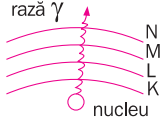
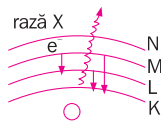
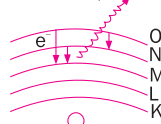
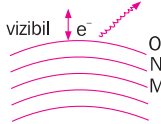
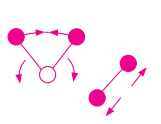
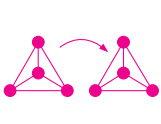
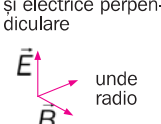


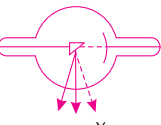

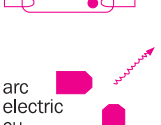




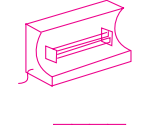
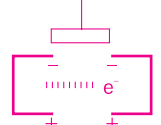

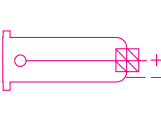
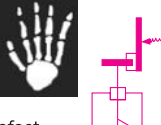

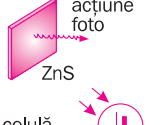

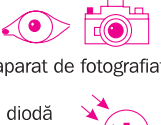

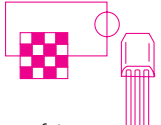

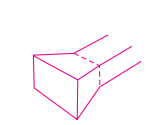


Împotriva efectelor negative ale radiațiilor electromagnetice de mare energie, ale căror efecte sunt cele

mai cunoscute la acest moment soluția adoptată de comunitatea internațională este recunoașterea unui nivel de risc asumat, maxim admisibil care a creat standarde stricte de utilizare a combustibililor din dome-

niul nuclear și a lucrului în zonele de risc. În condiții normale de expunere riscul de expunere la aceste radiații și a urmărilor lor este extrem de scăzut.

Rezumat

În tabelul 1 sunt sintetizate mecanismele fizice de producere a radiațiilor electromagnetice cu diferite lungimi de undă, instrumentele cu care acestea sunt produse și detectate, și câteva din aplicațiile lor.

	raze γ	raze X	ultraviolete	vizibil	infraroșu	radar și microunde	radio
sursă primară	modificări la nivelul nucleului rază γ 	bombardarea metalelor grele cu electroni rapizi rază X 	salturi electronice între nivelele atomice M, N și O 	vibrații ale electronilor pe orbitali exteriori ai atomilor vizibil e^- 	vibrații ale moleculelor 	inversia și rotația moleculelor 	mișcări ale electronilor și nucleelor în câmpuri magnetice și electrice perpendiculare 
producere	ciclotron  cobalt-60 	tub de raze X  raze X 	tub de descărcare  arc electric cu cărbune 	lampă cu filament  tuburi cu descărcare  flacără 	radiator electric 	kliatron 	circuite cu tranzistori 
detectie	tub Geiger 	imagine foto  efect fotoelectric 	fluorescență acțiune foto  ZnS celulă fotovoltaică 	ochi, celulă foto aparatură de fotografiat  diodă fotosensibilă 	termopilă  foto-transistor 	ghiduri de undă 	antene și diode  microfon 
aplicații	- defectoscopie - sterilizare - medicină (tratamentul cancerului)	- radiografie - radiologie - defectoscopie - studiul structurilor cristalinelor - detectarea falsurilor în artă	- tratamente dermatologice - distrugerea bacteriană - iluminare fluorescentă - alarme - numărare automată în industrie	- observarea mediului în principal prin reflexie - fotografie - descompunere în culori	- gătit, încălzit etc. - fotografie în infraroșu - fotocopiatoare (termice)	- radar - comunicații - gătit - microunde	- comunicații și navigație



Verificați-vă cunoștințele

1. Descrieți emisia/recepția undelor radio.
2. Descrieți modalitatea, producerea și transmisia semnalelor TV.
3. Pe baza cunoștințelor de clasa a IX-a, privind producerea imaginii color în ochi, realizați o analogie cu imaginea TV.
4. Descrieți funcționarea unui receptor TV.
5. Din surse variate explicați structura și funcționarea unui microcip. Exemplificați rolul acestuia în funcționarea telecomenzii.
6. Care este importanța descoperirii radiației de 3 K în explicarea istoriei universului.
7. Descrieți mecanismele de protecție ale atmosferei la radiațiile UV cu $\lambda < 295$ nm.
8. Realizați un referat cu tema „Efecte ale radiațiilor electromagnetice de mare energie”.
9. Alegeți din tabelul recapitulativ un tip de radiație și realizați un referat privind sursele, producerea, detectia și aplicațiile ale radiației respective.

- 3.1. Dispersia luminii:
*Interpretare electromagnetică
- 3.2. Interferența
- 3.2.1. Dispozitivul Young
- 3.2.2. Interferența localizată
- 3.3 *Difracția luminii. Aplicații
- 3.4 *Polarizarea luminii. Aplicații



Capitolul 3

OPTICA ONDULATORIE

3.1

Dispersia luminii. * Interpretare electromagnetică

În lecțiile anterioare am văzut că lumina este o componentă a spectrului radiației electromagnetice care, într-un domeniu de lungimi de undă cuprins între aproximativ 400 și 750 nm, poate fi recepționată de organul vizual uman, ochiul. Deci lumina nu este altceva decât un câmp electromagnetic alternativ de înaltă frecvență care, după cum s-a constatat experimental, se deplasează în vid cu o viteză $c = 2,9979 \cdot 10^8$ m/s.

Dacă în spațiul intergalactic se pare că viteza luminii, nu depinde de frecvența (sau lungimea de undă) a acesteia (1°), în mediile transparente obișnuite (cele cu care venim în contact în experimentele de laborator) acest lucru se întâmplă (2°). Adică viteza luminii se modifică în funcție de lungimea de undă.

La prima afirmație (1°) răspunsul este dat printre altele și de studiile asupra eclipselor stelelor duble îndepărtate, studii care au evidențiat că acestea nu prezintă anomalii în compoziția spectrală a luminii, la începutul sau sfârșitul unei eclipse. Dacă viteza luminii în spațiu intergalactic ar depinde de lungimea de undă a radiației, atunci începutul și sfârșitul eclipsei ar fi observat în dominanta de culoare a luminii, care are viteza mai mică sau respectiv mai mare. Cum distanțele de la Pământ la oricare sistem observabil de stele duble

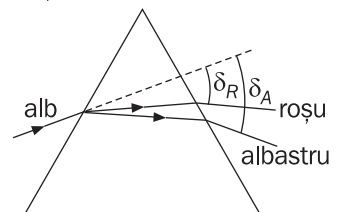
este foarte mare, orice variație oricât de mică a vitezei unei componente a luminii în raport cu alta, ar determina efecte observabile. Astfel de efecte nu au fost observate. Deci o variație a vitezei luminii în funcție de lungimea de undă în spațiul intergalactic (a cărei densitate de materie este de mai puțin de un atom pe centimetru cub de spațiu), nu a fost observată.

Cea de-a doua afirmație (2°), referitoare la dependența vitezei luminii de lungimea de undă a acesteia în mediile obișnuite, a fost constatată experimental.

Fenomenul poate fi evidențiat cu ajutorul unei prisme optice, în care lumina cu diferite lungimi de undă se comportă diferit în timpul refracției prin prismă. Pe un ecran se poate vizualiza spectrul luminii.

Indicele de refracție, după cum apare și din fig. 1, descrește cu creșterea lungimii de undă, astfel încât lumina albastră ($\lambda = 470$ nm) este refractată mai mult decât cea roșie ($\lambda = 650$ nm).

Fig. 1. Deviația luminii albastre (δ_A), de exemplu, este pentru majoritatea mediilor optice transparente mai mare decât a celei roșii (δ_R).



Este util să rememorăm din clasa a IX-a câteva rezultate obținute în studiul prisme optice.

Atunci s-a arătat că, în cazul unei prisme optice cu unghiul de refringență A , aplicând legea refracției pe cele două fețe laterale ale unghiului diedru, se poate determina indicele de refracție (n) al prisme (fig. 2) potrivit relației:

$$n = \frac{\sin \frac{A + \delta_m}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \quad (1),$$

unde δ_m reprezintă unghiul minim de deviație.

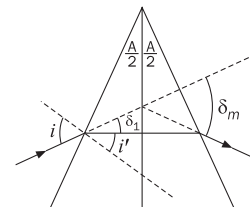


Fig. 2. Deviație minimă (δ_m) la parcursul simetric al luminii prin prismă.

Laborator

Studiul dispersiei în prisma optică

Materiale necesare:

- banc optic;
- prisme optice din diferite materiale transparente cu același unghi de refringență (A);
- prisme optice din aceleași materiale cu unghiuri de refringență diferite;
- lentile convergente (L_1, L_2);
- fantă (F);
- sursa de lumină albă (S);
- ecran (E);
- filtre de diferite culori.

A. Studiul caracteristicilor spectrelor

- Pe bancul optic se realizează montajul din figura 3.
- Se trimite un fascicul de lumină albă prin fanta F paralel cu muchia prisme.
- Se înlocuiește prisma P_1 cu prisme din același material, dar cu unghiuri refringente diferite.
- Se înlocuiește prisma P_1 cu prisme din materiale diferite, dar cu același unghi de refringență.
- Pe ecran se obține spectrul luminii albe care reprezintă o imagine a fantei F în diferite culori.

Observații:

- spectrele sunt deviate diferit (sub diverse unghiuri);
- întinderea spectrelor este diferită.

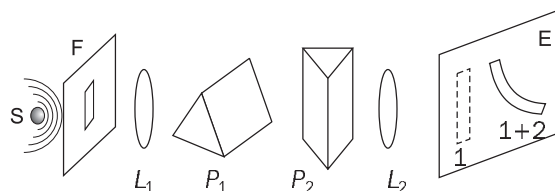


Fig. 3. Metoda prismelor încrucișate utilizată de Newton (1672).

Concluzie. Forma spectrului depinde atât de unghiul de refringență, cât și de proprietățile optice ale mediului (materialul din care este confecționată prisma).

B. Dependența indicelui de refracție de lungimea de undă.

- Se realizează montajul din figura 3, în care între sursă și fantă se introduce un filtru optic. Acesta are rolul de a selecta din întreg spectrul luminii albe doar o bandă îngustă de lungimi de undă. Se utilizează prisme al căror unghi de refringență este cunoscut.
- Se variază unghiul de incidență până se ajunge la unghiul de deviație minimă (δ_m) care se măsoară.
- Se completează tabelul:

λ	δ_m	[dat de relația (1)]

- Se calculează indicii de refracție (n).
- Banda lungimilor de undă ale filtrelor sunt date pe acestea. Pentru calcul se poate utiliza (lungimea de undă medie a domeniului respectiv).
- Se realizează graficul $n = f(\lambda)$.

Pentru prisme din diferite materiale (sticlă crown, acril, cuarț) se obțin variații ale indicelui de refracție în funcție de frecvența radiației asemănătoare celor din fig. 4.

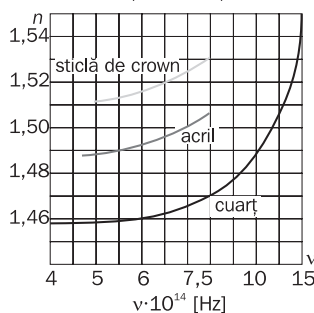


Fig. 4. Variația, în funcție de frecvența radiației incidente, a indicelui de refracție, în trei medii transparente.

În general, în mediile optice obișnuite, indicele de refracție crește cu scăderea lungimii de undă (creșterea frecvenței). Aceasta echivalează cu o deviere mai puternică prin prismă a radiației violete față de cea roșie. Există însă și medii (de exemplu, vaporii de iod) în care variația indicelui de refracție cu lungimea de undă este inversă. În prismele realizate din astfel de materiale, deviația radiației roșii este mai mare decât a celei violet. Spunem că astfel de medii prezintă o dispersie anomală.

Din numeroasele experimente realizate se știe astăzi că dependența indicelui de refracție (n) de mediul dispersiv poate fi destul de complicată.

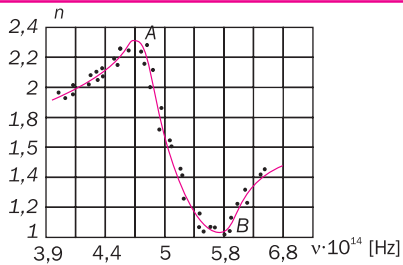


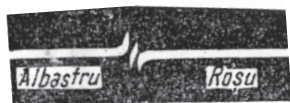
Fig. 5. Variația cu frecvența a indicelui de refracție la cianină, în regiunea benzii de absorbție.

Figura 5 reproduce, rezultatele observațiilor făcute asupra dispersiei într-o soluție de cianină. Între A și B indicele de refracție se micșorează, adică are loc un mers anomal al acestuia. Variația indicelui de refracție corespunde în general unei creșteri lente a acestuia odată cu creșterea frecvenței (scăderea lungimii de undă). Aceeași variație o prezintă și indicele de refracție al mediilor transparente (de exemplu, sticlă sau cuarț) pe toată întinderea spectrului vizibil. Pe măsură însă ce ne deplasăm în regiunile ultravioletă sau infraroșie a spectrului, indicele de refracție al acestor substanțe începe să varieze rapid.

Studiile lui Kundt asupra fenomenului de dispersie au dus la concluzia că există o legătură directă între dispersia luminii de către un mediu transparent și absorbția acesteia de către atomii mediului respectiv. Kundt a realizat un experiment de dispersie în care lumina era descompusă în spectrul său cu ajutorul unei prisme, așezate vertical. Aceasta permitea obținerea spectrului sub forma unor fâșii orizontale. În drumul razelor a așezat un bec de gaz, în a cărui flacără a produs vapori de sodiu. Pe ecran, în regiunea galbenă a spectrului, nu s-a observat numai apariția unei benzi întunecate, caracteristică pentru absorbția luminii de către vaporii de sodiu, ci și o curbare a spectrului în sensuri diferite de ambele părți ale domeniului de absorbție. În acest fenomen Kundt a recunoscut imediat efectul unei dispersii anormale. Conul de vapori de sodiu, care se înălța deasupra becului, juca rolul unei prisme cu muchie refrigerentă orizontală, încrucișată cu prima prismă de sticlă, așezată vertical.

În cazul unei densități mici a vaporilor se observă existența a două regiuni de dispersie anormale corespunzătoare celor două linii de absorbție care apar în spectrele sodiului (fig. 6).

Fig. 6. Dispersie anomală în vaporii de sodiu: în cazul unei presiuni mici a vaporilor, cele două linii de absorbție ale sodiului apar separat.



*Interpretarea electromagnetică a dispersiei

Printre concluziile teoriei lui Maxwell, discutate în capitolul precedent, a fost și stabilirea expresiei vitezei de propagare a câmpului electromagnetic în vid:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \quad (2)$$

unde ϵ_0 este permitivitatea electrică a vidului, iar μ_0 permeabilitatea lui magnetică. Pe de altă parte, în studiul opticii geometrice s-a definit indicele de refracție n al unui mediu ca raportul vitezelor de propagare a câmpului electromagnetic în vid (c) și în mediul respectiv (v):

$$n = \frac{c}{v}. \quad (3)$$

Cum viteza de propagare a câmpului electromagnetic într-un mediu oarecare este, tot din teoria lui Maxwell, dată de:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} \quad (4)$$

rezultă că indicele de refracție n al unui mediu se poate calcula cu relația:

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}, \quad (5)$$

unde ϵ_r este permitivitatea electrică relativă, iar μ_r este permeabilitatea magnetică relativă a mediului respectiv.

Relația (5) este verificată pentru unele gaze (azot, hidrogen, heliu), dar pentru o serie de alte substanțe, ca sticla, apa, alcoolii, relația nu se verifică.

O altă neconcordanță derivă și din faptul că, în timp ce potrivit relației (5) indicele de refracție nu depinde de frecvența radiației, în cele discutate în paragraful anterior s-a văzut că dispersia reprezintă tocmai variația indicelui de refracție cu frecvența (lungimea de undă) radiației.

Rezolvarea problemei dispersiei se bazează pe interacțiunea dintre lumină și substanță. Una dintre primele teorii acceptate a fost „teoria electronică a dispersiei”.

Potrivit acestei teorii esența interacțiunii dintre lumină și substanță se reduce la interferența dintre unda incidentă (primară) și undele secundare apărute prin oscilații ale electronilor și ionilor substanței, ca urmare a acțiunii câmpului electromagnetic al undei primare.

Interacțiunea dintre un atom și unda de lumină, poate fi redată destul de bine dacă atomul este privit ca un ansamblu de oscilatori armonici. În acest model se consideră că electronul este menținut în atom datorită unei forțe *cvasi-elastice* $-kr$, unde k este constanta corespunzătoare legăturii elastice, iar r este distanța electronului față de centrul de oscilație.

Ecuția de mișcare a electronului, de masă m deplasat din poziția de echilibru și supus acțiunii acestei

forțe intra atomice este

$$m\ddot{r} = -kr. \quad (6)$$

După cum se observă, ecuația este a unui oscilator de

pulsatie
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (7)$$

unde ω_0 depinde de natura atomului care determină valoarea constantei k .

Oscilația electronului din atom în acest model nu are un caracter riguros armonic și trebuie privită ca o oscilație *amortizată*. Amortizarea se datorează pierderii energiei de vibrație de către atom prin radiație sau interacțiune cu alți atomi, cu trecerea energiei în alte forme (de exemplu căldură).

Amortizarea poate fi asimilată unei forțe de frânare, proporționale cu viteza de mișcare a electronului $\frac{dr}{dt} = \dot{r}$.

Se poate considera această *forță de frânare*, de tipul $G = -g\frac{dr}{dt} = -g\dot{r}$, unde coeficientul g depinde de natura atomului.

Sub acțiunea luminii care se propagă în mediu, oscilațiile electronului vor fi forțate. Componenta magnetică a câmpului exercită doar o mică influență, acesta acționând doar asupra sarcinii în mișcare. Din această cauză, putem limita modelul doar la considerarea acțiunii câmpului electric al unde. Se admite, în felul acesta, că acțiunea unde de lumină este determinată de intensitatea câmpului electric (\vec{E}) al acesteia. Deci asupra electronului se exercită o forță de tipul:

$$\begin{aligned} F_e &= eE, \quad \text{unde} \\ E &= E_0 \cos \omega t \end{aligned} \quad (8)$$

reprezintă **intensitatea câmpului electric al unde**. Afirmatia este corectă doar în cazul când poate fi neglijată acțiunea moleculelor înconjurătoare, ipoteză valabilă în gazele *rarefiate*, unde distanța dintre molecule este mare. În cazul gazelor la presiune ridicată, al lichidelor sau al corpurilor solide trebuie să se țină seama de interacțiunea dintre molecule. În ipotezele de mai sus, ecuația (6) devine:

$$m\ddot{r} = eE - kr - g\dot{r}, \quad (9)$$

relație ce poartă numele de *ecuația dispersiei*. Dacă $g = 0$ (adică forța de rezistență se poate neglija) relația se simplifică devenind

$$m\ddot{r} = eE - m\omega_0^2 r. \quad (10)$$

Înlocuind E din expresia (8) în (10) și împărțind cu

m rezultă:
$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = \frac{e}{m} E_0 \sin \omega t, \quad (11)$$

unde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ este pulsația proprie a electronului.

Soluția ecuației este de forma:

$$r = A \sin \omega t \quad (12)$$

cu

$$A = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (13)$$

Temă în clasă: Verificați dacă relația (12) cu amplitudinea dată de relația (13) este soluția ecuației (11).

Sub influența câmpului electric, deplasarea sarcinilor din poziția de echilibru transformă atomul într-un dipol al cărui moment electric (\vec{P}) este: $P = re$. Dacă în unitatea de volum a mediului se găsesc N atomi, momentul electric al unității de volum devine

$$P = NP = Ner. \quad (14)$$

Înlocuind în (14) relațiile (12) și (13) se obține:

$$P = Ner = N \frac{e^2}{m} E_0 \frac{\sin \omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (15)$$

Similar inducției câmpului magnetic poate fi definită o mărime fizică, numită *inducția câmpului electric* \vec{D} , dată de expresia:

$$D = \epsilon E = E + 4\pi P', \quad (16)$$

unde E este intensitatea câmpului electric, iar P' este momentul electric al unității de volum. Înlocuind (15)

în (16) și ținând cont că $\epsilon \simeq n^2$ în ipoteza unui efect slab al câmpului magnetic ($\mu_r = 1$) rezultă

$$n^2 = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = 1 + \frac{Ne^2}{m(v_0^2 - v^2)}. \quad (17)$$

Conform relației (17), indicele de refracție depinde de frecvența ν a câmpului exterior, deci relația, în ipotezele simplificatoare adoptate mai sus, descrie fenomenul de dispersie.

Dacă se ține cont de forța de rezistență care condiționează amortizarea, dependența indicelui de refracție în funcție de frecvență va fi de tipul celei din figura 7.

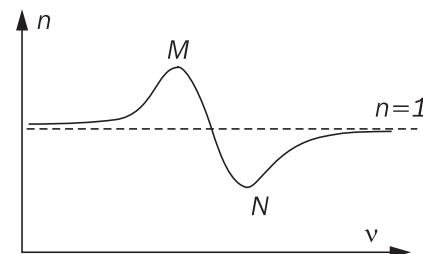


Fig. 7.
Curbă de dispersie.

Se observă asemănarea cu forma experimentală a acestei variații (fig. 5). Aceasta și reprezintă unul dintre argumente în favoarea teoriei.

Dacă se ia în considerare faptul că în substanță pot exista câteva specii de sarcini electrice e_i , de mase

m_i , capabile să oscileze cu frecvențe proprii ν_{0i} ; expresia (18) devine:

$$n^2 = 1 + \sum_i \frac{N_i e_i^2}{m_i (\nu_{0i}^2 - \nu^2)}, \quad (18)$$

Reprezentarea grafică a indicelui de refracție în funcție de frecvență $n = n(\nu)$, numită și curbă de dispersie, va fi de tipul celei din fig. 8.

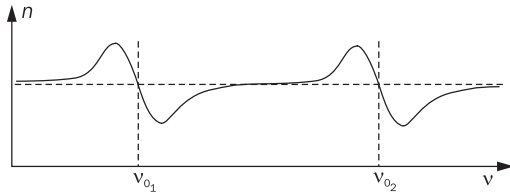


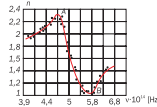
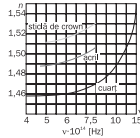
Fig. 8. Curbă de dispersie în cazul existenței câtorva benzi de absorbție.

Observație: Cunoscând din mersul curbei de dispersie valoarea lui ω_0 putem determina care componente electrice ale atomului ($\frac{e}{m}$) participă la fenomenul optic. Cercetările arată că în regiunea frecvențelor înalte (lumină vizibilă și ultravioletă) valoarea lui $\frac{e}{m}$ corespunde datelor pentru electron, iar în regiunea frecvențelor joase (lumină infraroșie) valoarea $\frac{e}{m}$ corespunde ionilor substanței studiate.

Teoria a fost ulterior dezvoltată prin luarea în considerare a acțiunii moleculelor mediului, regăsindu-se pe cale teoretică și alte rezultate experimentale.

Rezumat

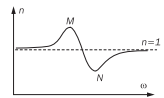
- Dispersia este fenomenul de variație a indicelui de refracție a mediului în funcție de lungimea de undă (frecvența) radiației electromagnetice.
- Mediile pot prezenta o variație normală sau anomală a indicelui de refracție (regiunea AB).
- În teoria electronică a dispersiei interacțiunea dintre lumină și substanță este redusă la o interferență dintre unda incidentă primară și undele secundare apărute



prin oscilațiile electronilor și ionilor, ca urmare a câmpului electromagnetic. Mediul este văzut ca un ansamblu de oscilatori cvasi-armonici asupra cărora acționează o forță de tip elastic ($-kr$), una de frecare ($-g\dot{r}$) și forța electrică a câmpului electromagnetic. Rezolvarea ecuației unui astfel de oscilator:

$$m\ddot{r} = eE - kr - g\dot{r},$$

conduce la o curbă de dispersie similară celei experimentale, ceea ce a acordat credibilitate modelului.



Verificați-vă cunoștințele

1. Dați un exemplu care conduce la ideea că, în vid, viteza luminii nu depinde de lungimea de undă a acesteia. Argumentați.
2. Care dintre afirmațiile următoare, referitoare la dispersia luminii, este adevărată într-un mediu?
 - a) Viteza luminii depinde de lungimea de undă a radiației.
 - b) Indicele de refracție crește cu creșterea lungimii de undă.
 - c) Indicele de refracție scade cu creșterea lungimii de undă.
 - d) Indicele de refracție este constant indiferent de lungimea de undă.
3. Cum definiți un mediu dispersiv normal? Dar unul anomal? Dați exemple.
4. Descrieți o metodă experimentală de determinare a indicelui de refracție a unui mediu transparent.

5. Indicele de refracție pentru lumină violet, într-un anumit material transparent, este 1,66, iar pentru cea roșie, 1,62. Care este dispersia unghiulară a luminii vizibile ce trece printr-o prismă echilaterală cu unghi de refringentă de 60° , dacă unghiul de incidență este 50° ?
6. Descrieți experimentul lui Kundt, prin care acesta a identificat existența unei legături între dispersia și absorbția radiației într-un mediu transparent.
7. Care sunt ipotezele modelului electromagnetic al dispersiei? Care sunt forțele ce acționează asupra oscilatorilor din mediu? Care sunt rezultatele teoretice cu acoperire experimentală? Dezvoltați exprimarea matematică a teoriei.

Am discutat în lecția 1.3.5. că termenul „interferență” se referă la situația în care două sau mai multe unde se suprapun în spațiu. Când se produce, fenomenul este respectat principiul de superpoziție, potrivit căruia rezultanta deplasării unui punct în orice moment, ca rezultat al suprapunerii mai multor unde, este dat de adunarea deplasărilor individuale produse de fiecare dintre unde ca și cum acestea ar acționa independent.

În acest caz, termenul de „deplasare” este utilizat în sens larg. El poate avea înțelesul de deplasare a suprafeței de o parte sau alta a poziției sale de echilibru, pentru undele de la suprafața apei, un exces sau un deficit de presiune – în cazul unei sonore care se propagă printr-un mediu elastic etc. În cazul undelor luminoase (componentă a spectrului electromagnetic), termenul „deplasare” are înțelesul de variație a componentei electrice sau magnetice a câmpului electromagnetic.

În optica geometrică (clasa a IX-a) se afirmă principiul *independenței fasciculelor de lumină*, potrivit căruia fasciculele de lumină nu interacționează între ele. În unele situații chiar așa stau lucrurile (fig. 1).



Fig. 1. Fasciculele de lumină se suprapun fără a produce fenomene de interferență – reprezentare a principiului independenței fasciculelor de lumină.

În alte situații undele luminoase produc interferențe. Pentru aceasta, este însă nevoie ca acestea să îndeplinească o condiție specială numită *condiție de coerență*.

A. Coerența

Spre deosebire de undele mecanice, la care rezultatul interferenței se poate observa, urmărind amplitudinea rezultantă (fig. 2), în cazul luminii, rezultatul interferenței se poate aprecia doar prin intermediul intensității luminoase.

Să considerăm două unde luminoase, ale căror componente instantanee ale câmpurilor lor electrice sunt date de expresiile:

$$E_1 = E_{01} \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (1)$$

$$E_2 = E_{02} \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (2)$$

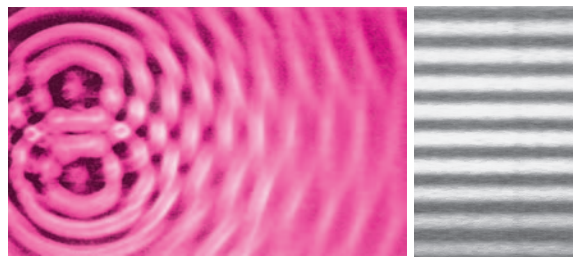


Fig. 2. Interferența a două unde circulare, la suprafața apei (a); interferența luminii (b).

Prin compunerea celor două unde armonice va rezulta tot o undă armonică:

$$E = E_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad (3)$$

unde:
$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (4)$$

și
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E_{01} \sin \varphi_1 + E_{02} \sin \varphi_2}{E_{01} \cos \varphi_1 + E_{02} \cos \varphi_2} \quad (5)$$

Potrivit relației (4), pătratul amplitudinii unei vibrații rezultante este diferit de suma pătratelor amplitudinilor vibrațiilor componente sau, cu alte cuvinte, energia vibrației rezultante (proporțională cu pătratul amplitudinii) este diferită de suma energiilor vibrațiilor inițiale.

Ea poate avea orice valoare cuprinsă în intervalul dat de limitele:

$$E_0^2 = (E_{01} - E_{02})^2 \quad (6)$$

și
$$E_0^2 = (E_{01} + E_{02})^2 \quad (7)$$

când $(\varphi_1 - \varphi_2)$ este cuprins între π și 0.

Practic însă, niciodată nu vom întâlni vibrații rigurose armonice, care să dureze un timp nedefinit și să-și păstreze amplitudinea constantă. De obicei, vibrațiile într-un izvor de lumină se întrerup și reîncep aleator (după cum se produc emisiile atomilor sau moleculelor excitate ale izvorului de lumină). Într-un astfel de caz, și intensitatea I a luminii observate variază în timp. Pentru că aceste variații sunt foarte rapide, iar observatorul are o anumită perioadă de reacție, acesta va recepționa doar o anumită valoare medie în timp a intensității.

Dacă diferența fazelor inițiale ale undelor care se compun variază arbitrar, ea poate lua, cu probabilitate egală, atât valori pozitive, cât și negative. În acest fel, valoarea medie într-un interval de timp suficient de lung se anulează. Aceasta determină anularea termenului ondulatoriu din relația (4), caz în care intensitatea medie (\bar{I}) proporțională cu pătratul amplitudinii (E_0^2) devine suma intensităților luminii provenite de la cele două surse ($\bar{I} = I_1 + I_2$).

Concluzie: În cazul unei variații complet întâmplătoare a defazajelor (diferențe de fază variabile), intensitatea radiației rezultante, se obține din însumarea simplă a intensităților radiațiilor componentelor. În acest caz nu apare fenomenul de interferență, iar radiațiile poartă numele de radiații *necoerente*.

În general, izvoarele naturale de lumină sunt surse necoerente, deoarece:

- a) dezexcităriile atomilor sunt aleatorii;
- b) emisia radiantă a atomilor se amortizează prin pierderile de energie radiantă;
- c) mișcarea haotică a atomilor în sursă determină o variație haotică a frecvențelor radiațiilor emise;
- d) ciocnirea atomilor conduce la întreruperea bruscă a emisieii radiației de către atom.

Pentru ca interferența să aibă loc, termenul $2E_{01}E_{02} \cos\Delta(\varphi_1 - \varphi_2)$ din relația (4) trebuie să nu se anuleze în timp. Dacă acest lucru se întâmplă se spune că sursele sunt *coerente*.

Dicționar

Surse coerente: Surse ale căror amplitudini ale radiațiilor emise variază proporțional una în raport cu cealaltă, iar diferența de fază este constantă în timp.

În cazul expresiei (4), condiția de coerență este respectată, dacă:

$$E_{01}(t) = C_1 E_0(t) \quad (8)$$

$$E_{02}(t) = C_2 E_0(t), \quad (9)$$

unde C_1 și C_2 sunt constante, iar:

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \Delta\varphi = \text{const.} \quad (10)$$

Să considerăm două izvoare de lumină (I_1, I_2), care emit unde coerente cu aceeași frecvență, date de expresiile (8) și (9). Pentru simplitate, vom considera că amplitudinile lor sunt egale:

$E_{01} = E_{02} = E$, iar vectorii intensitate electrică \vec{E} au aceeași orientare (aceeași polarizare - vezi pag. 128)

Aceasta înseamnă că sursele sunt identice și se neglijează diferența de amplitudine cauzată de parcurerile inegale ale celor două unde de la surse la punctul din spațiu în care este observată suprapunerea (P).

Dacă notăm cu φ diferența de fază a undelor care sosesc în punctul P, intensitățile componentelor electrice ale câmpurilor care sosesc în acest punct vor fi:

$$E_1 = E \cos(\omega t + \varphi) \quad (11)$$

$$E_2 = E \cos \omega t \quad (12)$$

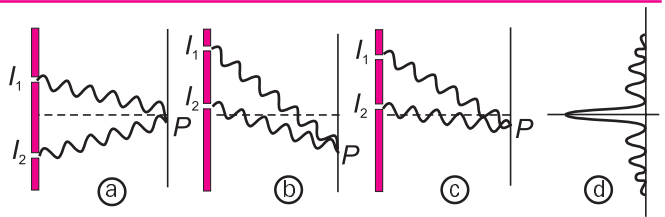


Fig. 2. Combi-na-ția diferi-tă a undelor de lumină provenite de la cele două surse I_1 și I_2 va determina în diferite puncte ob-ținerea unor iluminări maxime (a, b) sau minime (c). Distribu-ția intensi-tății luminoase pe întreg intervalul poate fi cea din (d).

Pentru adunarea celor două funcții sinusoidale se poate utiliza metoda fazorială (fig. 3).

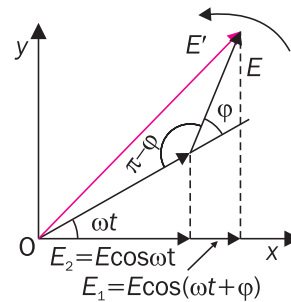


Fig. 3.

În figură, E_1 și E_2 reprezintă componentele pe direcția Ox a vectorilor electrice ale celor două unde. Suma acestor proiecții dă în orice moment valoarea totală a amplitudinii (E') în punctul P.

Potrivit figurii, E' este dată de relația:

$$\begin{aligned} E'^2 &= E^2 + E^2 - 2E^2 \cos(\pi - \varphi) = 2E^2 + 2E^2 \cos \varphi = \\ &= 2E^2(1 + \cos \varphi) = 4E^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \quad (13) \end{aligned}$$

Se observă că amplitudinea unei rezultate prin interferență în punctul arbitrar P din spațiu variază în funcție de φ . Când cele două unde sunt în fază ($\varphi = 0$) se obține $E' = 2E$, iar când sunt în opoziție de fază ($\varphi = \pi$) se

obține $\cos \frac{\varphi}{2} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$, deci $E' = 0$.

Concluzie: Interferența a două unde sinusoidale, având aceeași frecvență și amplitudine și o diferență de fază constantă produce în spațiu o undă sinusoidală cu aceeași frecvență. Amplitudinea acesteia variază între zero și dublul amplitudinii uneia dintre unde și este dependentă de diferența de fază φ cu care ajung cele două unde în fiecare punct din spațiu.

Se știe că intensitatea luminii este proporțională cu pătratul amplitudinii, deci:

$$I = CE'^2 \quad (14)$$

unde C este o constantă.

Înlocuind (13) în (14) rezultă că:

$$I = 4CE^2 \left| \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right| = 4I_0 \left| \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right|, \quad (15)$$

unde cu I_0 am notat intensitatea luminoasă produsă individual de fiecare dintre cele două surse luminoase considerate. Potrivit rezultatelor de până acum, în ipoteza în care se neglijează diferența de amplitudine cauzată de parcursul diferit al radiațiilor la un punct arbitrar din spațiu în care se cercetează interferența, distribuția intensității pe un ecran este dată în figura 4a.

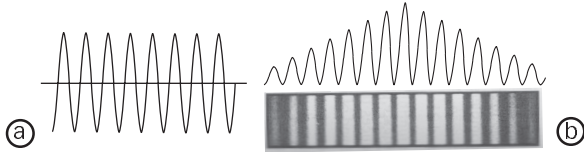


Fig. 4. Distribuția de energie într-un plan al spațiului de interferență (a), în ipoteza neglijării scăderii amplitudinii unde cu distanța și ținând cont de scăderea amplitudinii unde cu distanța (b).

Intensitatea maximă luminoasă este $I = 4I_0$, deci fiecare dintre cele două surse identice are o contribuție la intensitate egală cu $2I_0$. Nulurile care separă maximele de interferență au intensitatea luminoasă, egală cu zero. În acest fel interferența nu va modifica energia luminoasă care vine de la surse, ci doar va realiza o redistribuire a acesteia producând o figură de interferență cu zone luminate și întunecate (franje de interferență).

Ținând cont că amplitudinea unei unde scade cu deplasarea ne așteptăm ca pe ecranul pe care vom observa figura de interferență acest lucru să fie evidențiat de o scădere a intensității luminoase pe măsură ce distanța de la surse la ecran crește. În acest caz ne așteptăm ca o distribuție reală a intensităților luminoase să nu mai producă maxime de intensitate constantă $I = 4I_0$, ci ca intensitatea acestora să scadă cu creșterea distanței față de surse (fig. 4b).

Se constată deci, că în câmpul de interferență sunt puncte în care intensitatea luminoasă este maximă sau nulă. Legat de geometria experimentului se pune problema identificării condiției obținerii într-un anumit loc a unui maxim sau nul de interferență. Aceste condiții ne așteptăm să țină seama de distanțele de la surse la punctul în care se consideră fenomenul de interferență. Notăm cu d_1 și d_2 aceste distanțe (fig. 5).

Știm că defazajul φ este proporțional cu diferența de drum de la cele două surse la punctul P . Când aceasta este de o lungime de undă, diferența este de o perioadă, iar $\varphi = 2\pi$ (rad). Când diferența va fi o jumătate de lungime de undă, $\varphi = \pi$ rad, și așa mai departe. Se poate spune că între defazajul φ și diferența dintre drumurile străbătute de cele două unde (d_1 și d_2) de la

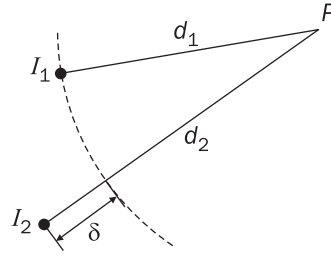


Fig. 5. Diagramă fazorială a interferenței într-un punct P a două unde cu aceeași amplitudine E și diferență de fază φ .

surse la punctul P este valabilă relația:

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{d_2 - d_1}{\lambda}. \quad (16)$$

În acest fel o diferență de drum ($d_2 - d_1$) va determina o diferență de fază

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) = k(d_2 - d_1), \quad (17)$$

unde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ este numărul de undă definit în una din lecțiile anterioare.

Relația (15) devin în acest caz:

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi}{\lambda}(d_2 - d_1). \quad (18)$$

Din relația 18 se pot stabili condițiile de maxim și nul ale intensității luminoase, punând condițiile funcției

$$\cos^2 \frac{\pi}{\lambda}(d_2 - d_1).$$

• Se obțin maxime când:

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) &= 1, \text{ adică } \frac{\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) = k\pi \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta &= d_2 - d_1 = k\lambda = 2k \frac{\lambda}{2}, k \in \mathbf{Z}. \end{aligned} \quad (19)$$

Deci diferența de drum este un număr par de semilungimi de undă și se obțin nuluri când:

$$\cos^2 \frac{\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) = 0.$$

$$\text{adică: } \frac{\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) = (2k - 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta = d_2 - d_1 = (2k - 1) \frac{\lambda}{2}, k \in \mathbf{Z} - \{0\}, \quad (20)$$

deci diferența de drum este un număr impar de semilungimi de undă.

În acest fel, punctul P va fi un punct luminos sau unul întunecat, după cum este respectată condiția (19) sau (20).

Observație:

Relația (18) este valabilă în cazul în care mediul de propagare a luminii este vidul. Pentru alte medii trebuie să se țină seamă de variația lungimii de undă în mediul respectiv, deci de indicele de refracție al mediului.

Pentru aceasta, în relația (18) se va înlocui diferența de drum geometric ($d_2 - d_1$) cu o diferență de drum optic $n(d_2 - d_1)$.

În acest caz relația (18) devine:

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{n\pi}{\lambda} (d_2 - d_1). \quad (18')$$

Dicționar

Drum optic: Produsul dintre drumul geometric parcurs de lumină într-un mediu și indicele de refracție al mediului respectiv.

Rezumat

- Lumina produce fenomene de interferență dacă provine din surse coerente.
- Două surse de lumină sunt coerente dacă satisfac simultan condițiile:

(a) amplitudinile undelor variază proporțional una în raport cu cealaltă;

(b) diferența de fază este constantă în timp.

- Pentru două surse coerente, monocromatice care produc radiații luminoase de aceeași frecvență și amplitudine și ai căror vectori electrici oscilează în același plan,

$$E_1 = E \cos(\omega t + \varphi) \text{ și } E_2 = E \cos \omega t,$$

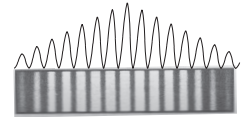
- Amplitudinea unei rezultante într-un punct din spațiu

este dată de: $E' = 2E \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right|$.

- Intensitatea luminoasă în același punct este:

$$I = CE'^2 = 4I_0 \left| \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right|.$$

- Apar în spațiu maxime și nului de interferență a căror distribuție într-un plan al spațiului de interferență variază cu distanța la surse. Scăderea intensității maximelor se datorează diferenței de drum străbătute de undele ce produc interferența.



- Se obține maxim când diferența de drum este un număr par de semilungimi de undă. Se obține nul de interferență pentru o diferență de drum egală cu un număr impar de semilungimi de undă.



Verificați-vă cunoștințele

1. Care dintre următoarele afirmații, privind fenomenul de interferență a luminii, este adevărată?

- Se referă la suprapunerea în același spațiu a cel puțin două unde luminoase.
- Nu respectă principiul „superpoziției”.
- Respectă principiul „independenței fasciculelor de lumină”.
- Se produce în cazul unor surse coerente.

2. Care dintre afirmațiile următoare constituie cauze ale necoerenței unor izvoare de lumină:

- dezexcitarea atomilor masei este aleatorie;
- emisia radiantă a atomilor nu se amortizează;
- mișcarea haotică a atomilor din sursă;
- ciocnirea atomilor din sursă determină amortizarea emisiei atomului.

3. Care dintre următoarele afirmații caracterizează sursa coerentă:

- sursele emit radiații cu aceeași amplitudine;
- amplitudinile radiațiilor emise de sursă sunt proporționale;
- defazajul radiațiilor este nul;
- defazajul radiațiilor este constant.

4. Găsiți expresia amplitudinii interferenței într-un punct pentru undele coerente: $E_1 = E \cos(\omega t + \varphi)$ și $E_2 = E \cos \omega t$. Între ce limite poate varia această amplitudine? Care sunt, în aceste cazuri, expresiile intensităților luminoase?

5. Interpretați distribuțiile intensităților luminoase din figurile alăturate. Care este cauza diferenței acestor distribuții?



6. În cazul interferenței a două unde luminoase în vid, stabiliți condițiile de: a) maxim și b) nul de interferență. Ce devin aceste condiții într-un mediu al cărui indice de refracție este n ?

7. Care este diferența de drum dintre două surse luminoase ce emit radiații coerente cu lungimea de undă $\lambda = 550$ nm, în cazul în care pe ecran s-a format o bandă luminoasă de ordinul $k = 5$?

Cum se modifică această distanță dacă sistemul se scufundă într-un mediu cu indicele de refracție $n = 1,8$?

8. Lungimea de undă a cărei radiație venită de la două surse coerente identice este 600 nm. Pentru maximum $k = 2$, care este diferența de drum dintre maxim și cele două surse?

Prima experiență de interferență a luminii a fost realizată la începutul secolului al XIX-lea, de fizicianul englez Thomas Young (fig. 1). Dispozitivul său consta



THOMAS YOUNG
(1773 - 1829)

Fig. 1. Descoperitor al fenomenului de interferență a luminii, care l-a ajutat să enunțe caracterul ondulatoriu al acesteia. A fost primul care a reușit să ofere o explicație fiziologică a senzației de culoare. Are contribuții la teoriile capilarității și elasticității.

dintr-o sursă de lumină în fața căreia se află un paravan cu două fante dreptunghiulare, S_1 și S_2 . Pe un ecran, se obține figura de interferență (fig. 2).

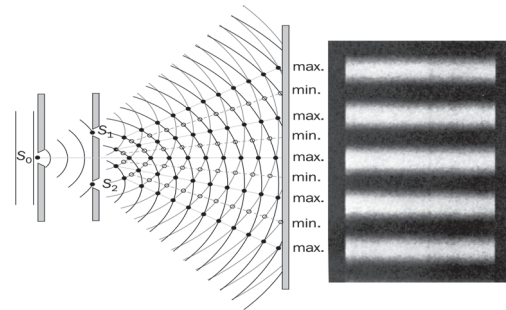


Fig. 2. Diagrama schematică a dispozitivului Young (a) – fantele acționează ca surse secundare de unde coerente ce produc o figură de interferență pe ecranul E. Sistemul de franje de interferență în cazul unor fante dreptunghiulare arată ca în (b) – desenele nu sunt realizate la scară.

Laborator

Interferența luminii cu dispozitivul Young

Materiale necesare:

- banc optic (1)
- sursă de lumină (2) sau laser
- filtru monocromatic (3)
- ecran cu 2 fante (4)
- lentilă convergentă (5)
- ecran (6)

• Utilizând o sursă obișnuită de lumină (un bec), se realizează pe bancul optic dispozitivul experimental din fig. 2. Prin ajustarea distanței dintre fante și ecran se obține figura de interferență.

• În cazul în care se dispune de o sursă monocromatică LASER, o variantă experimentală poate utiliza un sistem de două oglinzi dintre care una semitransparentă (OS_1) care va scinda fasciculul provenit de la sursă în două, după care acestea vor fi proiectate pe

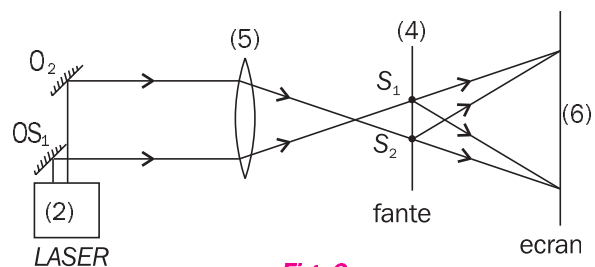


Fig. 3.

fante prin intermediul unei lentile (fig. 3).

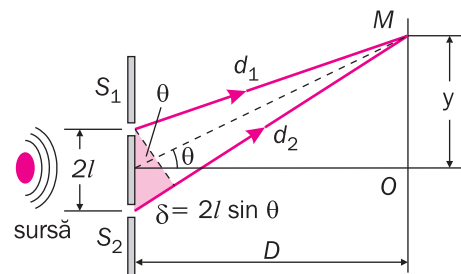
În oricare dintre variantele experimentale:

- Se ajustează componentele bancului optic pentru ca fantele să fie iluminate complet de lumina provenită de la lentilă.
- Se observă figura de interferență pe ecranul situat la mare distanță.
- Dacă se înlocuiește ecranul cu cele două fante cu un altul cu fantele situate la o altă depărtare una de alta, se obține o nouă figură de interferență.
- Se măsoară distanța de la fante la ecran și se verifică relațiile interferenței cu dispozitivul Young.

Să urmărim cum se produce fenomenul de interferență în dispozitivul Young (fig. 4).

Cele două fante, S_1 și S_2 , se comportă ca două surse de lumină identice coerente ceea ce determină interferența luminii emise de ele.

Fig. 4. Reprezentarea schematică a dispozitivului Young pentru calculul diferenței de drum.



Punctul M se află pe ecranul amplasat la distanța D față de planul celor două fante, S_1 și S_2 . Fantele sunt la distanța $2l$ una de alta, iar distanțele de la acestea la punctul M sunt d_1 și respectiv d_2 . Intensitatea luminoasă în punctul M este rezultatul în acest punct a intensității luminii venite de la cele două fante. Aceasta se poate calcula cu relația:

$$I = I_0^2 \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} (d_2 - d_1).$$

Diferența drumului parcurs de cele două unde este:

$$\delta = d_2 - d_1 = 2l \sin \theta$$

Relația presupune faptul că cele două unde sunt aproape paralele, ceea ce este adevărat, din punct de vedere experimental, prin alegerea lui $D \gg l$.

Dacă fantele dispozitivului Young au formă dreptunghiulară, figura de interferență care apare prezintă alternativ benzi luminoase și întunecate (fig. 2b). Aceste benzi poartă denumirea de franje de interferență.

În aproximarea $D \gg l$ se poate scrie:

$$\sin \theta \cong \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{D}$$

Aplicând condițiile de maxim și nul stabilite în lecția anterioară (relațiile 19 și 20) se obține:

$$y_{\max, k} = \frac{k \lambda D}{2l};$$

$$y_{\min, k} = \frac{2k - 1}{2} \cdot \frac{\lambda D}{2l}$$

unde k , numit și ordinul franjei, ia valori întregi: $k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$. În acest fel se pot determina localizările franjelor luminoase ($y_{\max, k}; k = \overline{0, k}$) și a celor întunecate ($y_{\min, j}; j = \overline{1, k}$).

Maximul central obținut este maximul luminos de ordinul zero. De o parte și de alta a acestuia vor fi nuluri întunecate de ordinul 1 ($k = \pm 1$), urmate de maximele luminoase de ordinul 1 ($k = \pm 1$), și așa mai departe.

Distanța dintre două franje consecutive de același tip poartă numele de interfranjă, iar valoarea ei este dată de:

$$i = y_{\max, (k+1)} - y_{\max, k} = \frac{\lambda D}{2l}$$

Exemple

1. În urma unei experiențe de interferență, s-au făcut următoarele măsurători:

- distanța dintre 11 franje luminoase consecutive: 10 mm;
- distanța dintre fante $2l = 1,5$ mm;

– distanța dintre planul fantelor și ecran $D = 2,8$ m. Calculați lungimea de undă a radiației ($\lambda = ?$).

Rezolvare

11 franje înseamnă 10 interfranje, deci $i = 1$ mm.

$$i = \frac{\lambda D}{2l} \Rightarrow \lambda = \frac{2li}{D} = 0,54 \cdot 10^{-6} \text{ m.}$$

Deci $\lambda = 540$ nm.

2. Un dispozitiv Young (fig. 4) prezintă următoarele caracteristici: $D = 1,2$ m; $2l = 0,03$ mm. Dacă franja luminoasă de ordinul doi este poziționată la 4,5 cm distanță față de franja centrală, determinați:

- a) lungimea de undă a radiației monocromatice utilizate;
- b) interfranja.

Rezolvare

a) Utilizând relația ce determină poziția franjei maximului de ordin $k = 2$:

$$\lambda = \frac{2ly_{2\max}}{2D} = 560 \text{ nm.}$$

b) Interfranja este:

$$i = \frac{\lambda D}{2l} = 2,2 \text{ cm.}$$

După cum s-a arătat, nu se pot obține franje de interferență de la izvoare diferite, datorită faptului că acestea nu pot respecta condiția de coerență. Procedeu de obținere a undelor coerente utilizat de Young, pleacă de la ideea divizării, printr-o metodă oarecare a unui izvor luminos în două părți – a căror radiații coerente să fie suprapuse într-o anumită zonă din spațiu. Pentru obținerea experimentală a două surse coerente există două posibilități:

1. formarea a două imagini ale aceluiași izvor luminos (dispozitivul Young);
2. utilizarea ca surse coerente a izvorului luminos însuși și a unei imagini a acestuia.

Următoarele dispozitive interferențiale utilizează una sau alta dintre cele două metode.

A. Oglinzile Fresnel

Oglinzile Fresnel reprezintă un dispozitiv format din două oglinzi plane care fac între ele un unghi de aproape 180° .

În aceste oglinzi se vor forma imaginile I' și I'' ale unui izvor luminos I , reprezentat de o fantă iluminată, paralelă cu muchia comună a oglinzilor. Un ecran protector E' nu va permite luminii să ajungă direct de la sursă în câmpul de interferență (reprezentat hașurat în fig. 5).

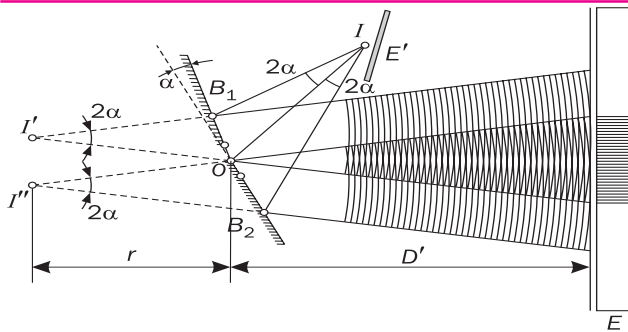


Fig. 5. Oglinzile Fresnel și evidențierea câmpului de interferență.

Dacă izvorul I și imaginile acestuia I' și I'' se găsesc la distanța r față de muchia comună O a oglinzilor, iar ecranul E pe care sunt observate franjele de interferență se află la distanța D' , relația de calcul al interfranței, poate fi dedusă plecând de la relația interfranței stabilită în cazul dispozitivului Young:

$$i = \frac{\lambda D}{l} = \frac{\lambda(D' + r)}{2\alpha r}$$

Cu α s-a notat unghiul format de una dintre oglinzi cu direcția celei de-a doua. În condițiile descrise, franjele de interferență vor avea aspectul unor benzi paralele luminate și întunecate.

B. Biprisma Fresnel

Biprisma Fresnel este un dispozitiv format din două prisme, cu unghiurile A , A' mici, așezate ca în fig. 6. Prin devierea razelor de lumină, în fiecare prismă apar două surse virtuale, coerente, care dau pe ecranul E imaginea de interferență.

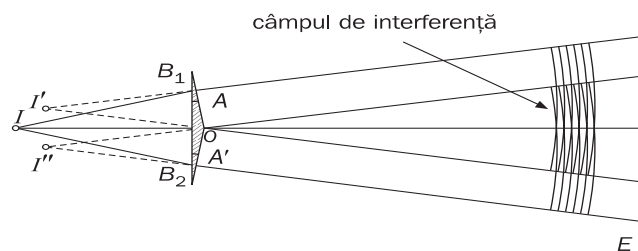


Fig. 6. Biprisma Fresnel. Prin alegerea unor unghiuri A și A' ale prisme mici, imaginile I' și I'' ale izvorului I vor fi apropiate una de alta.

Determinarea maximelor și minimelor de interferență se face similar dispozitivului Young, ținându-se cont că D este în acest caz distanța de la sursele virtuale la ecran.

C. Bilentilele Billet

Dispozitivul este format din cele două jumătăți ale unei lentile, înclinată puțin una față de alta (fig. 7). Acestea vor da două imagini reale, I' și I'' , ale sursei I . Măsurând distanța $2l$ dintre cele două imagini ale

izvorului I , distanța D până la ecranul E pe care se obține figura de interferență și interfranța i , pentru determinarea lungimii de undă a luminii produse de sursa I se poate utiliza expresia: $i = \frac{\lambda D}{l}$.

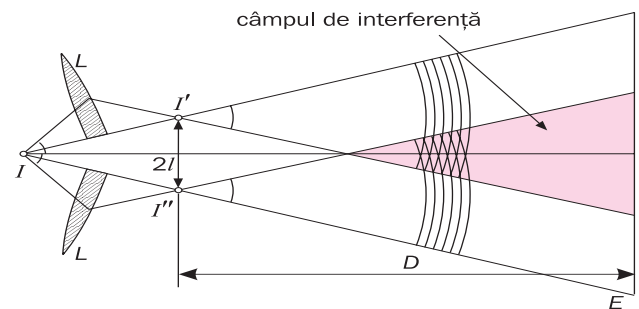


Fig. 7. Bilentilele Billet și zona de interferență a dispozitivului.

D. Oglinda Lloyd

În acest dispozitiv, ca izvoare coerente sunt utilizate sursa de lumină (o fantă dreptunghiulară) și imaginea sa într-o oglindă (fig. 8).

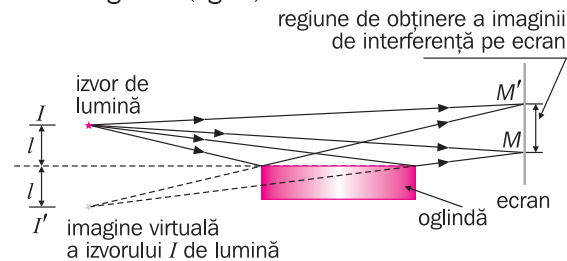


Fig. 8. Oglinda Lloyd.

La reflexia pe oglindă care are un indice de refracție mai mare decât cel al aerului, în care se află izvorul de lumină, se produce o pierdere a unei semilungimi de undă. Ca urmare a acestei pierderi, va apare o deplasare a figurii de interferență cu o jumătate de interfranță.

Exemplu

Într-o experiență de interferență se utilizează oglinda Lloyd (fig. 8). Franjele de interferență sunt observate pe un ecran E aflat la distanța $D = 1$ m de sursă. Interfranța are valoarea $i = 0,25$ mm pentru o poziție a sursei situată la distanța l față de planul oglinzii. Dacă aceasta se îndepărtează de planul oglinzii cu $\Delta l = 0,6$ mm, interfranța devine aproximativ $0,16$ mm. Care este lungimea de undă (λ) a luminii care dă figura de interferență?

Rezolvare

Considerând pierderea de o semilungime de undă $\frac{\lambda}{2}$ la reflexia pe oglindă, diferența de drum dintre razele ce

produc interferența într-un punct M' , de coordonată x ,

$$\text{va fi: } \delta = I'M' - \frac{\lambda}{2} - IM' = \frac{2Ix}{D} - \frac{\lambda}{2}.$$

Interfranța va avea valoarea:
$$i = \frac{\lambda D}{2l}$$

Îndepărtarea cu Δl a izvorului de lumină determină

o modificare a interfranței, care devine:

$$i' = \frac{\lambda D}{2(l + \Delta l)},$$

Înlocuind pe l între cele două relații se obține:

$$\lambda = \frac{2i'\Delta l}{D\left(1 - \frac{i'}{i}\right)} = 533 \text{ nm}.$$

Rezumat

• Dispozitivul Young produce maxime de interferență pe un ecran la distanțele

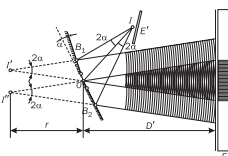
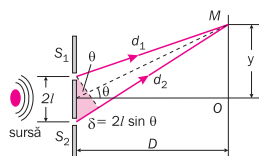
$$y_{\text{max},k} = \frac{k\lambda D}{2l} \text{ și nului la } y_{\text{nu},k} = \frac{2k-1}{2} \cdot \frac{\lambda D}{2l}.$$

Interfranța în ambele cazuri este dată de $i = \frac{\lambda D}{2l}$.

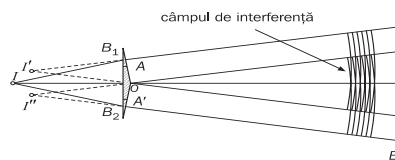
• Oglinzile Fresnel dau o interfranță

$$i = \frac{\lambda(D+r)}{2\alpha r}$$

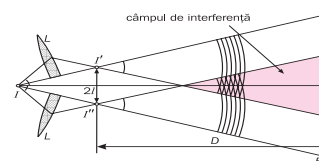
unde α este unghiul dintre oglinzi, iar r distanțele de la izvor l și imaginile acestuia.



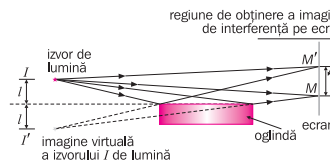
• Biprisma Fresnel este o prismă dublă cu unghiuri mici prin care sursa de lumină l va produce două imagini virtuale.



• Bilentile Billet – este un dispozitiv format din două jumătăți de lentile înclinare care produc două imagini reale ale sursei.



• Oglinda Lloyd utilizează ca surse coerente o sursă de lumină și imaginea acesteia într-o oglindă.



Verificați-vă cunoștințele

1. Care din următoarele afirmații sunt corecte, în cazul suprapunerii a două unde coerente?

a) se produc maxime de interferență, dacă:

$$\cos^2 \frac{\pi}{\delta} (d_2 - d_1) = 1;$$

b) se produc nului de interferență dacă $\delta = k\lambda$;

c) interfranța are valoarea: $\frac{\lambda D}{4l}$.

2. Un ecran în care s-au practicat două fante dreptunghiulare s-a pus în fața unui bec, într-o cameră întunecoasă, iar între bec și fantă s-a pus un filtru roșu. Pe un perete situat de cealaltă parte a fantelor s-a obținut o imagine a acestor fante.

a) Ce proprietate a undelor demonstrează acest experiment? b) De ce s-au obținut câteva benzi luminoase? c) Care este cauza benzilor întunecate? d) Ce măsurători trebuie făcute pentru a determina lungimea de undă a radiației? Cu ce relație se va calcula aceasta? e) Lumina albastră are o lungime de undă mai mică decât cea roșie.

Ce se întâmplă cu distanța dintre maxime, dacă se pune un filtru albastru în locul celui roșu? f) Ce se întâmplă cu grosimea interfranțelor dacă distanța dintre fante se micșorează?

3. Un ecran conține două fante aflate la distanța d una de alta. Dacă pe fante cade un fascicul de lumină cu lungimea de undă $\lambda = 500 \text{ nm}$, sub un unghi $\theta_1 = 45^\circ$, să se determine unghiul θ_2 sub care se vede maximum de ordin $k = 5$.

4. Dacă dispozitivul lui Young din problema precedentă se scufundă în apă, cum se va modifica figura de interferență?

5. Undele TV și radio reflectate de munții din apropierea unei stații de emisie, sau de avioane, pot interfera cu semnalele directe provenite de la antena de emisie. Stabiliți ce fel de interferență va avea loc în cazul în care frecvența radiației este de 75 MHz și se întâlnesc unda directă venită de la stație și unda reflectată de un avion situat la 1118 m deasupra receptorului.

6. Printr-un dispozitiv Young având spațiul dintre fante $2l = 1$ mm, iar ecranul poziționat la distanța $D = 2$ m față de acestea, se trimit succesiv radiațiile cu lungimile de undă $\lambda_1 = 450$ nm și $\lambda_2 = 620$ nm.

Determinați, pentru cele două radiații:

- locul unde apar franjele luminoase de ordinul 3;
- interfranja;
- care trebuie să fie lungimea de undă a radiației λ_2 pentru ca maximum de ordinul 3 al acesteia să se suprapună peste maximum de ordinul 5 al celei dintâi (λ_1)?

7. Dacă într-un dispozitiv Young se utilizează lumină albă, cum credeți că vor arăta franjele de interferență formate?

8. Un fascicul conținând lungimile de undă λ_1 și λ_2 este incident pe un dispozitiv Young. În figura de interferență, a patra franjă luminoasă a luminii cu lungimea de undă λ_1 se suprapune peste a cincea franjă luminoasă a luminii cu lungimea de undă λ_2 . Dacă λ_1 este 540 nm, care este valoarea lui λ_2 ?

9. Cu ajutorul unui dispozitiv Young se realizează interferența luminii monocromatice cu lungimea de undă $\lambda = 600$ nm. Ecranul pe care se observă figura de interferență se află situat la distanța $D = 2,5$ m de fante. Sursa se află pe mediatoarea segmentului, lângă cele două fante.

- Care este distanța dintre fante, dacă interfranja obținută este $i = 1$ mm?
- Cum se modifică poziția maximumului central, dacă în fața uneia dintre fante se pune o plăcuță de sticlă de grosime $l = 0,02$ mm, cu un indice de refracție $n = 1,6$?
- Cum se modifică poziția maximumului central dacă, în absența plăcuței de sticlă, se mută sursa pe distanța $y = 1$ cm, paralel cu fantele, spre una dintre acestea?

10. Două surse punctiforme monocromatice coerente, I_1, I_2 , sunt așezate pe axa optică a unei lentile subțiri L cu distanța focală f . Știind că defazarea dintre undele celor două izvoare este φ , să se determine, referitor la figura

de interferență care se obține pe un ecran E situat la distanța D de lentilă:

- distanța până la axa optică a lentilei pentru punctele în care se obțin maxime de interferență;
- care este valoarea φ a defazajului dintre undele emise de cele două izvoare pentru ca, în centrul ecranului, să se obțină un maxim de interferență.

11. Care este lungimea de undă (λ) a luminii utilizate pentru obținerea unei figuri de interferență cu oglinzile lui Fresnel, dacă unghiul dintre oglinzi este $\alpha = 0,001$ radiani, distanța de la izvoarele I', I'' (fig. 1) este $r = 80$ cm, iar franjele sunt observate pe un ecran aflat la o distanță, față de izvoarele $I', I'', D = 2,2$ m? Interfranja măsurată pe ecran este $i = 0,7$ mm.

12. Utilizând bilentilele Billet cu o distanță focală $f = 0,5$ m (fig. 3), asupra cărora cade un fascicul de lumină monocromatică cu lungimea de undă $\lambda = 500$ nm, lentile aflate la o distanță $d = 1$ mm una față de alta, se obține, pe un ecran situat la distanța D față de imaginile izvorului de lumină prin cele două lentile, o figură de interferență. Dacă izvorul este situat pe axul optic principal, să se determine:

- distanța dintre imaginile I' și I'' ale izvorului de lumină;
- interfranja i ;
- lărgimea câmpului de interferență;
- numărul franjelor luminoase observate pe ecran.

13. Un experiment de interferență utilizează o biprismă Fresnel. Dispozitivul este iluminat cu ajutorul unei surse punctiforme monocromatice de lungime de undă $\lambda = 550$ nm, aflată în planul de simetrie al biprismei, la distanța $D = 8$ m față de ecran. Dacă unghiurile ascuțite ale biprismei sunt $A = A' = 10'$ iar distanța de la sursa de lumină la biprisma cu indicele de refracție $n = 1,5$ este $d = 80$ cm, să se determine:

- distanța dintre imaginile I', I'' ale izvorului de lumină;
- valoarea interfranței i ;
- lărgimea câmpului de interferență.

3.2.2. Interferența localizată. Aplicații

A. Pelicule subțiri (lama cu fețe plane paralele)

Figuri de interferență pot fi adesea văzute, în pelicule subțiri precum bulele de săpun sau petele de ulei din bălțile formate după ploaie.

Laborator

Vizualizarea figurii de interferență în placa cu fețe plan paralele

Materiale necesare:

- lentile divergente și convergente;
- dispozitiv de colimare;
- placă cu fețe plan paralele;
- ecran;
- banc optic;
- sursă LASER.

- Se realizează dispozitivul experimental din figura 1.

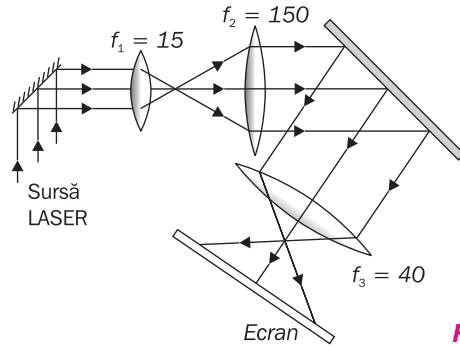


Fig. 1.

- Pe ecran se observă figura de interferență formată din franje luminoase și întunecate de egală grosime.

Pentru a explica formarea figurii de interferență din experimentul anterior să considerăm o peliculă subțire, cu grosime uniformă d , situată în aer. Asupra acesteia cade lumină, la incidență foarte apropiată de cea normală, lumina reflectată de cele două fețe (superioară și inferioară) ale peliculei (fig. 2a).

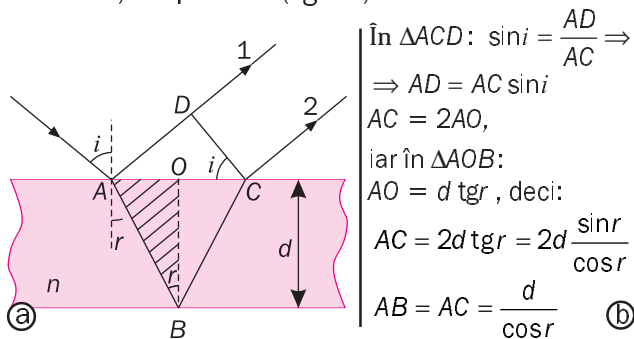


Fig. 2. Diagrama parcursului razelor de lumină într-o peliculă subțire, de grosime d și indice de refracție n , situată în aer.

Diferența de drum optic dintre cele două unde reflectate pe suprafața superioară a peliculei (1) și pe cea inferioară a acesteia (2), după cum apare în diagrama din fig. 2, este:

$$\delta = n(AB + BC) - \left(AD - \frac{\lambda}{2}\right) \quad (1)$$

Segmentele AB , BC și AD se pot exprima în funcție de unghiul de incidență i , unghiul de refracție r și grosimea d a peliculei (fig. 2b), rezultând, după aplicarea legii lui Snell, expresia:

$$\delta = 2nd \cos r + \frac{\lambda}{2}. \quad (2)$$

La incidența normală, relația (3) devine:

$$\delta = 2nd + \frac{\lambda}{2}. \quad (3)$$

Razele de lumină reflectate, fiind paralele între ele, vor da figuri de interferență la infinit. Ele pot fi observate cu ochiul liber acomodat pentru vederea la distanță.

Potrivit celor discutate în cadrul temei anterioare, se vor obține maxime de interferență dacă:

$$\delta = 2n \frac{\lambda}{2}. \quad (4)$$

și nului de interferență în cazul:

$$\delta = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (5)$$

Înlocuind condițiile (4) și (5) în relația (2), se vor obține grosimile peliculelor pentru care interferența este constructivă și cele pentru care aceasta este distructivă.

Temă în clasă. Utilizând relațiile (4) și (5) determinați grosimile peliculelor pentru care se obține o interferență constructivă, respectiv distructivă.

Exemplu

Celulele solare sunt dispozitive care transformă energia luminoasă în energie electrică. În construcția lor se utilizează semiconductoare, cum ar fi siliciul. Adesea, ele se acoperă cu o peliculă nereflectorizantă

(de exemplu, pelicula de monoxid de siliciu, SiO), pentru a reduce la minimum pierderile prin reflexie (strat anti-reflex). Considerând că indicele de refracție al acestei pelicule este $n = 1,45$, să se determine grosimea minimă a stratului anti-reflex pentru radiația verde de 550 nm.

Rezolvare

Respectând condiția de interferență distructivă și ținând cont că, în acest caz, pierderea de o semilungime de undă are loc atât pe fața superioară cât și pe cea inferioară a stratului de SiO, se va obține interferența distructivă pentru:

$$d = \frac{\lambda}{4n} \approx 94 \text{ nm}.$$

B. Pana optică

În cazul în care grosimea peliculei subțiri variază liniar se obține ceea ce se numește o pană optică (fig. 3).

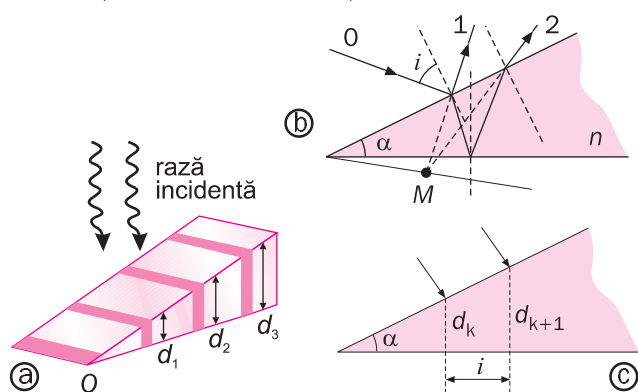


Fig. 3. Franje de interferență într-o pană optică (a); diagrama mersului razelor de lumină într-o pană optică (b) și interfranja (c).

Dacă asupra unei pene optice, cu indicele de refracție n , cade un fascicul de lumină cu lungimea de undă λ , razele coerente (1) și (2) reflectate pe cele două suprafețe ale penei vor interfera în punctul M, la intersecția prelungirilor acestora. Toate punctele de interferență datorate unor raze paralele cu raza (0) se vor afla într-un plan ce trece prin vârful V al penei.

La incidență normală pe fața superioară a penei optice, al cărei unghi (α) este foarte mic (de ordinul minutelor de arc), planul de focalizare a franjelor se va afla practic pe suprafața penei. Se obțin, în acest caz, franje localizate, datorate grosimii penei în punctul respectiv (franje de egală grosime).

Dacă pana optică este plasată în aer, pentru o anumită grosime d_k condiția de maxim este:

$$2nd_k + \frac{\lambda}{2} = 2k \frac{\lambda}{2} \quad (7)$$

pentru maximum de ordin k și:

$$2nd_{k+1} + \frac{\lambda}{2} = 2(k+1) \frac{\lambda}{2} \quad (8)$$

pentru maximum de ordin $k+1$.

Făcând diferența rezultă (fig. 3c):

$$d_{k+1} - d_k = \frac{\lambda}{2n} = \alpha i \quad (9)$$

de unde interfranja (i) este:

$$i = \frac{\lambda}{2\alpha n}. \quad (10)$$

În mod similar, utilizând relația de calcul a minimelor se determină minimumul de interferență.

Exemplu

Un fascicul de lumină cu $\lambda = 550 \text{ nm}$ cade, sub un unghi de incidență normală, pe o pană optică având indicele de refracție $n = 1,5$, și formează 10 franje luminoase și nouă întunecate. Cu cât a variat grosimea penei pe acest interval?

Rezolvare

Dacă notăm cu Δd variația de grosime a penei pe intervalul în care apar franjele de interferență și notăm cu x lungimea figurii de interferență ($x = 9i$).

putem scrie că: $\text{tg } \alpha = \frac{\Delta d}{x} = \frac{\Delta d}{9i}$,

unde: $i = \frac{\lambda}{2n\alpha}$.

Înlocuind și aproximând $\text{tg } \alpha \approx \alpha$, se obține:

$$\Delta d = \frac{9\lambda}{2n} = 1,65 \mu\text{m}.$$

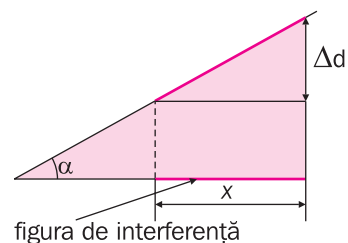


figura de interferență

Pe principiul penei optice (de data aceasta, o pană de aer) se obțin figurile de interferență cunoscute sub numele de inelele lui Newton. La obținerea lor este necesară o lentilă plan-convexă (fig. 4a). Interferența se obține din suprapunerea razelor reflectate pe suprafața de sprijin a lentilei și pe fața inferioară a acesteia.

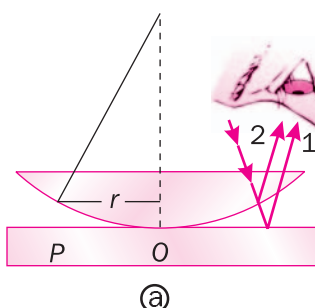
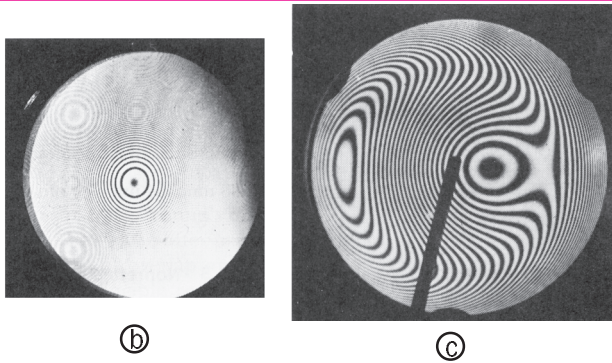


Fig. 4. Razele reflectate de suprafața de sprijin a lentilei și suprafața sa inferioară (a) determină o figură de interferență cunoscută sub numele de inelele lui Newton (b). Distorsiuni ale inelelor semnifică existența unor imperfecțiuni în construcția lentilei (c).



În cazul acesta, figura de interferență este formată din inele întunecate alternând cu cele luminoase. Acestea reprezintă localizările interferenței distructive și, respectiv, constructive (fig. 4b). În centrul figurii se va obține un nul de interferență, o figură asimetrică de interferență (fig. 4c) va evidenția existența unor imperfecțiuni ale lentilei respective, fiind astfel un mijloc de control al calității acesteia.

Interferometrul Michelson

Inventat de fizicianul american A. A. Michelson, interferometrul este un dispozitiv care împarte un fascicul de lumină în două, pentru a le recombina apoi, și a obține o figură de interferență (fig. 5).

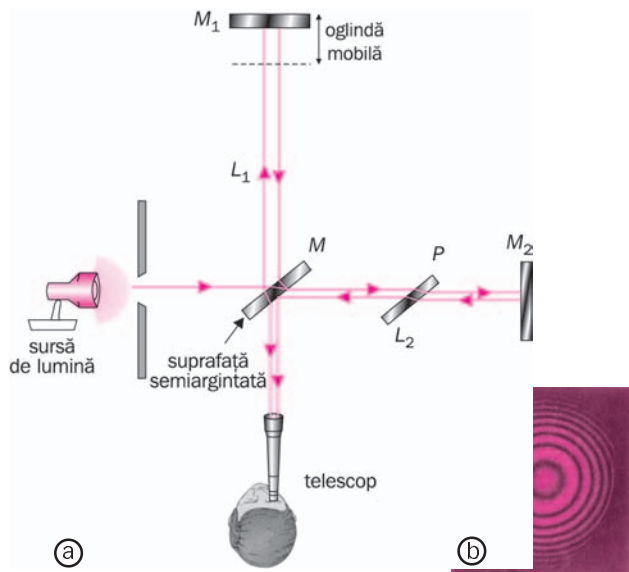


Fig. 5. Schema interferometrului Michelson și imaginea franjelor de interferență produse (b).

Împărțirea fascicolului produs de o sursă monocromatică în două este realizată cu ajutorul unei oglinzi semitransparente (M), înclinată la 45° față de direcția incidentă. Unul dintre acestea se reflectă pe oglinda M_1 , iar celălalt pe oglinda M_2 , după ce a trecut printr-o lamelă transparentă de sticlă, P. Lamela P are aceeași grosime și același indice de refracție cu oglinda

semitransparentă M și are rolul de a egaliza drumurile optice parcurse prin sticlă de cele două fascicule perpendiculare. Figura de interferență este determinată de diferența de drum optic străbătută de cele două raze.

La deplasarea oglinzii mobile M_1 , prin telescop se va putea urmări apariția minimelor sau a maximelor de interferență. Cele două unde coerente se vor deplasa în interferometru pe distanțele $2L_1$ și respectiv $2L_2$, determinând o diferență de drum $\delta = 2L_2 - 2L_1$. Condiția pentru producerea interferenței constructive $\delta = k\lambda$ devine în acest caz:

$$\delta = L_2 - L_1 = k \frac{\lambda}{2}, \text{ unde } k = 0, 1, 2, \dots$$

Interferometrul Michelson poate fi utilizat la măsurarea indicilor de refracție, a gazelor, în funcție de lungimea de undă a radiației. Pentru aceasta se plasează în drumul unuia dintre fasciculele de lumină (pe unul dintre brațele interferometrului) o celulă de grosime d conținând gazul de studiat. Lumina va trece prin această celulă de două ori (dus-întors).

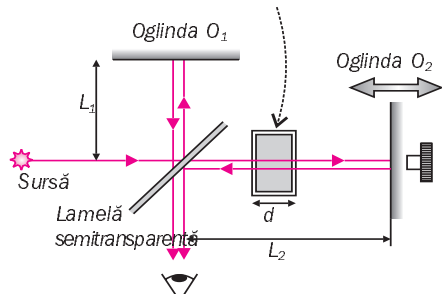


Fig. 6. Utilizarea interferometrului Michelson la măsurarea indicilor de refracție.

Principiul de măsurare utilizează ca referință o celulă identică vidată. În cazul celei vidate numărul de lungimi de undă pe care radiația monocromatică respectivă le parcurge în celulă este:

$$m_1 = \frac{2d}{\lambda_{vid}},$$

unde 2 apare din cauza trecerii dus-întors a radiației prin celula umplută cu gaz la presiunea de 1 atm. Lumina se deplasează în gaz cu o viteză ceva mai mică potrivit indicelui de refracție $n = \frac{c}{v}$ al gazului. În acest caz numărul de lungimi de undă din celula cu gaz este:

$$m_2 = \frac{2d}{\lambda} = \frac{2d}{\lambda_{vid}},$$

de unde rezultă $\Delta m = m_2 - m_1 = (n - 1) \frac{2d}{\lambda_{vid}}$.

Fiecare creștere cu o unitate a lungimii de undă va duce la suplimentarea cu încă o franjă luminoasă a figurii de interferență, astfel încât indicele de refracție se poate determina prin simpla numărare a franjelor.

Dacă dispozitivul lui Michelson și Morley utiliza doar două raze care interferă în cazul unei lame cu fețe plan

paralele, trebuie să se țină seama de reflexia multiplă, deoarece toate fasciculele coerente secundare vor fi paralele între ele și vor interfera dând franje de egală înclinare localizate la infinit. În cazul în care placa plan paralelă îndeplinește condițiile necesare unei egalități aproximative a intensității luminoase reflectate cu cea refractată în urma interferenței unui număr mare de raze apropiate ca intensitate, figura de interferență se schimbă. În locul unei treceri lente de la maxim la minim, ca în cazul interferometrului Michelson, se obține o descreștere bruscă a intensității între acestea (fig. 7).

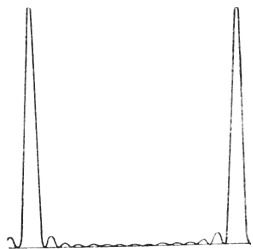


Fig. 7.
Distribuția iluminării în cazul interferenței multiple.

O serie de aplicații ale metodelor interferențiale vizează:

- 1) măsurarea precisă a distanțelor (cu o eroare de sub 1‰);
- 2) controlul calității suprafețelor polizate (oglinzi, lentile) ale sistemelor optice (fig. 4c).
- 3) măsurarea precisă a unghiurilor: Michelson a utilizat observațiile interferometrice pentru aprecierea distanțelor unghiulare dintre stelele duble, a diametrului unghiular stelar sau în determinarea dimensiunilor particulelor submicroscopice.

Aparatura actuală în domeniu nu realizează doar măsurători de mare precizie, ci construiește pe computer, în două sau trei dimensiuni, imaginea mărită a suprafeței evidențiind imperfecțiunile acesteia (fig. 7a, b).

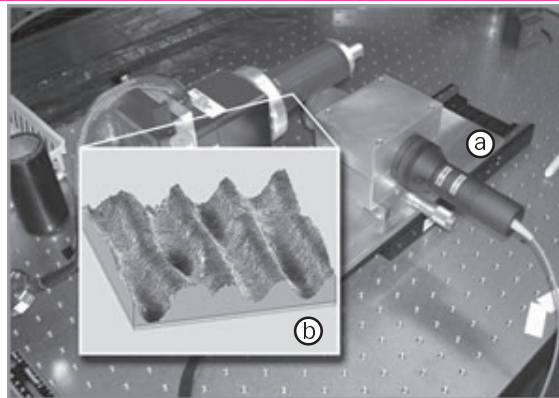


Fig. 8. Controlul optic al suprafețelor – dispozitiv (a) și imaginea pe computer a suprafeței (b).

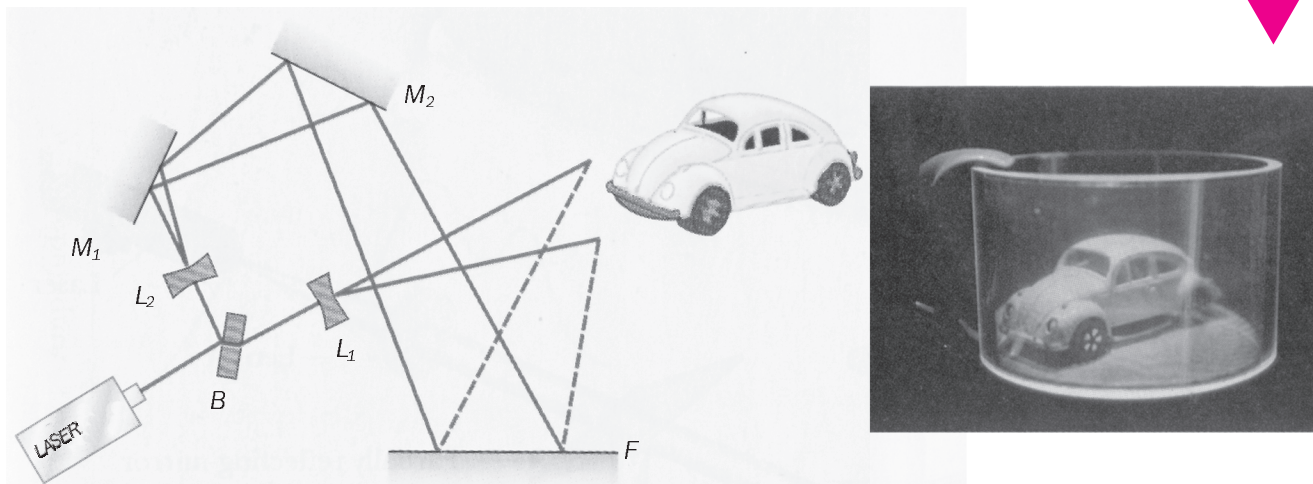
4) Holograma este o aplicație în care se produc imagini tridimensionale ale unui obiect.

Dispozitivul utilizează o rază laser care este împărțită în două de o oglindă semiargintată (fig. 9). Una dintre raze, reflectată de obiect, va fi înregistrată de un film fotografic obișnuit. Cea de-a doua, reflectată de oglinzile M_1 și M_2 , va ajunge pe film producând o imagine de interferență foarte complicată.

Această imagine se poate produce doar dacă diferența de fază dintre cele două raze este constantă în timpul expunerii filmului. Holograma va înregistra nu numai intensitatea luminii împrăștiată de obiect, ci și diferența de fază dintre cele două fascicule laser.

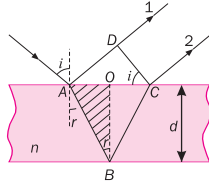
Holograma este cel mai bine vizualizată cu ajutorul unei radiații coerente ce va străbate filmul dezvoltat în timp ce este privit din direcția din care vine fasciculul.

Fig. 9. Aranjament experimental pentru producerea unei holograme (a) hologramă realizată pe film cilindric.



Rezumat

- Interferența localizată poate fi produsă în dispozitive simple precum lama cu fețe plan paralele (figura de interferență este localizată la infinit) sau lama optică (figura de interferență se află localizată pe fața lamei).
- Diferența de drum optic, în cazul lamei cu fețe plan paralele, este dată de relația $\delta = 2nd \cos r + \frac{\lambda}{2}$ care determină, în incidență normală a luminii, maxime



pentru $\delta = 2k \frac{\lambda}{2}$ și minime pentru $\delta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$, unde $k = 1, 2, \dots$

- În cazul penei optice, din aplicarea condiției de maxim/minim pentru două maxime/minime consecutive, se obține interfranța $i = \frac{\lambda}{2\alpha n}$, unde α este unghiul penei, iar n indicele de refracție relativ al penei în raport cu mediul.
- Printre aplicațiile cele mai importante ale interferenței se numără controlul planeității suprafețelor și măsurarea precisă a corpurilor care poate utiliza un interferometru Michelson.



Verificați-vă cunoștințele

1. Să se determine distanța dintre inelele Newton cu numerele 10 și 11, dacă distanța dintre inelele lui Newton cu numerele 2 și 3 (numărarea se face începând de la centru) este de 1 mm, iar inelele se observă în lumină reflectată (fig. 4).
2. Considerând o peliculă subțire cu indicele de refracție $n = 1,36$, aflată în aer, să se determine care este grosimea minimă a acesteia, pentru a produce interferență constructivă, dacă este iluminată cu o radiație cu lungimea de undă $\lambda = 580$ nm.
3. Straturile antireflex de pe suprafața lentilelor care formează obiectivul aparatului de fotografiat previn reflexiile interne, ce pot provoca voalarea imaginii. Care este grosimea minimă a unui astfel de strat de fluorură de magneziu ($n = 1,38$), aplicată pe o lentilă cu indice de refracție $n = 1,66$, care va provoca interferența distructivă a unei radiații cu lungimea de undă $\lambda = 550$ nm?
4. Un strat subțire de iodură de metil ($n = 1,756$) este așezat între două plăci paralele de sticlă. Care trebuie să fie grosimea stratului pentru ca sistemul să fie puternic reflectorizant, la incidența normală a unei radiații cu lungimea de undă $\lambda = 600$ nm?
5. O lentilă plan-convexă este așezată cu partea bombată pe un plan orizontal și iluminată deasupra cu o radiație monocromatică cu $\lambda = 550$ nm (fig. 4). Cât de gros trebuie să fie stratul de aer la cel de-al 20-lea inel luminos (numărat de la centru), dacă acesta este ultimul inel care se formează?
6. Două plăci de sticlă cu $n = 1,5$ formează o pană optică de aer, prin introducerea la unul dintre capete a unei foi de hârtie de $5 \cdot 10^{-3}$ cm grosime. Dacă pana este ilumina-

tă la incidență normală cu o radiație monocromatică cu lungimea de undă $\lambda = 500$ nm, să se determine numărul de franje întunecate de interferență, care se formează.

7. O pană de sticlă cu indice de refracție $n = 1,61$ este acoperită cu o peliculă subțire de ulei ($n = 1,2$). Iluminând cu o radiație monocromatică de 500 nm, se obține o interferență distructivă, iar cu o radiație monocromatică de 750 nm, o interferență constructivă – la aceeași distanță față de vârful penei. Determinați grosimea stratului de ulei.

8. Un interferometru Michelson utilizează o radiație roșie cu lungimea de undă 656,45 nm. Câte franje luminoase sunt observate dacă oglinda M_2 se deplasează pe distanța de 1 cm?

9. Un interferometru Michelson, ce operează la o lungime de undă de 600 nm, are o celulă de sticlă cu grosimea de 2 cm pe unul dintre brațe. Cu celula vidată se obține în centru un maxim de interferență. Dacă se introduce aer la presiunea de 1 atm și indicele de refracție $n = 1,00028$, câte maxime de interferență vor fi observate?

10. Un strat de ulei, cu grosimea de 200 nm plutește pe un strat de apă de 400 nm, care se află pe o oglindă metalică. Indicii de refracție sunt $n_{\text{ulei}} = 1,24$ și $n_{\text{apă}} = 1,33$. Un fascicul de lumină cade perpendicular pe suprafața uleiului. Care sunt lungimile de undă ale spectrului vizibil al radiației electromagnetice pentru care lumina reflectată de partea superioară a peliculei de ulei interfere distructiv cu lumina reflectată de oglindă.

11. Realizați un referat privind dezvoltarea dispozitivelor interferențiale cu interferența localizată și a aplicațiilor acestora.

Explicarea interferenței luminii a constituit dovada naturii ondulatorii a proceselor luminoase. O confirmare în plus a venit prin interpretarea din punct de vedere ondulatoriu a difracției luminii. Aceasta fusese semnalată de Grimaldi (1660), dar studiile ale fenomenului au fost reluate o sută de ani mai târziu, de Augustin Fresnel (1788-1829).

Dicționar

Difracția = fenomenul de ocolire aparentă a unui obstacol de către o undă, când dimensiunea obstacolului are același ordin de mărime cu lungimea de undă a unei incidente.

Fenomenul l-ați întâlnit la undele produse la suprafața apei dintr-un bazin, când acestea trec dintr-o parte în alta printr-o fantă cu dimensiuni variabile (fig. 1).

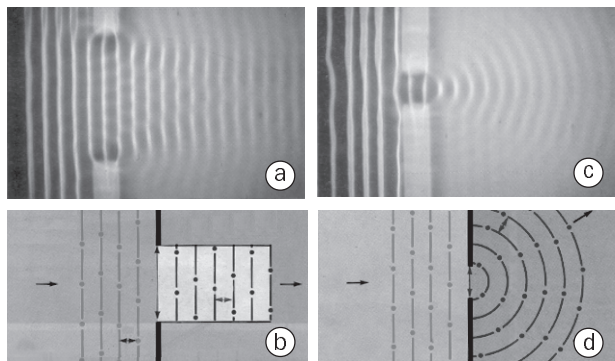


Fig. 1. Modificarea dimensiunilor fantei variabile dintre bazine va determina modificarea formei undelor produse în cel de-al doilea bazin.

În cazul în care unda incidentă are viteza v , frecvența ν și lungimea de undă λ , ea dă naștere, după trecerea prin fantă, unei unde difractate, cu proprietățile:

- unda are aceeași frecvență cu unda incidentă;
- unda are aceeași viteză, în cazul în care mediul de propagare este același;
- unda are aceeași lungime de undă.

Același fenomen apare și în cazul luminii. De data aceasta însă, fanta prin care trebuie să treacă lumina pentru a produce fenomenul de difracție trebuie să fie mult mai îngustă decât cea necesară în cazul apei, pentru că și lungimea de undă a radiației luminoase este mult mai mică.

În general, fenomenul de difracție poate fi evidențiat ori de câte ori în fața luminii există un obstacol cu dimensiuni comparabile cu lungimea de undă a radiației respective. Iată, de pildă, cum arată figura de difracție

formată în jurul umbrei unei lame de ras iluminate prin gura unui ac de cusut. Deși ne-am fi așteptat să existe un contur net al umbrei, se constată formarea, în imediata apropiere a obstacolului – a unor franje luminoase și întunecate, alternative, intensitatea acestora scăzând o dată cu depărtarea față de zona umbrată. Mai mult încă, așa cum se evidențiază și în fig. 2b, zona umbrată nu mai este clar delimitată, intensitatea luminoasă scăzând progresiv. Este ca și cum lumina a ocolit obiectul opac, iluminând în spatele lui – de unde și definiția dată fenomenului de difracție.

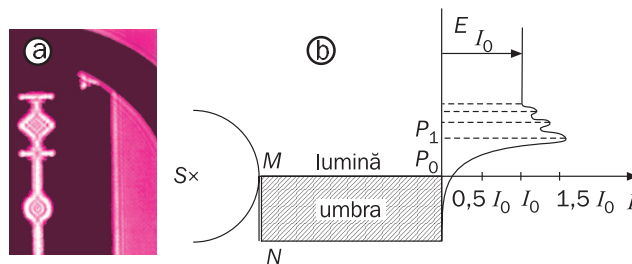


Fig. 2. Difracția produsă de o lamă (a). Distribuția intensităților franjelor luminoase de difracție (b).

A. Difracție printr-o fantă îngustă

Să presupunem că un fascicul paralel de lumină monocromatică cade pe un paravan opac în care este practică o fantă îngustă. Potrivit opticii geometrice, ar trebui ca fasciculul transmis pe un ecran situat la oarecare distanță față de fantă să aibă aceeași secțiune ca și fanta. Se observă însă cu totul altceva, și anume o bandă centrală luminoasă – care poate fi chiar mai lată decât fanta – mărginită de benzi întunecate și luminoase dispuse alternativ, ultimele fiind de intensitate din ce în ce mai mică.

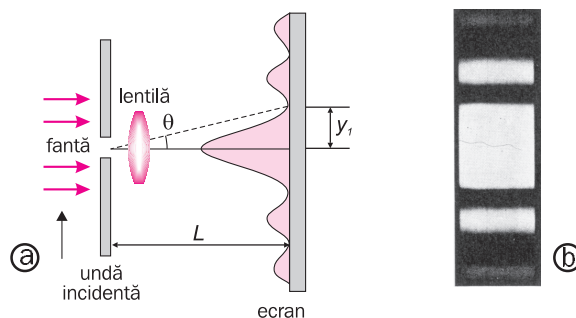


Fig. 3. Difracție pe o fantă îngustă. După difracție, lumina paralelă este focalizată pe ecran prin intermediul unei lentile convergente obținându-se o distribuție a intensității luminoase a cărei reprezentare apare în partea dreaptă (a); forma franjelor de difracție (b).

Până acum nu am luat în considerare deschiderea fantei, considerând-o practic punctiformă. Cum influențează însă grosimea fantei figura de difracție care se obține? Să studiem fenomenul urmărind fig. 4.

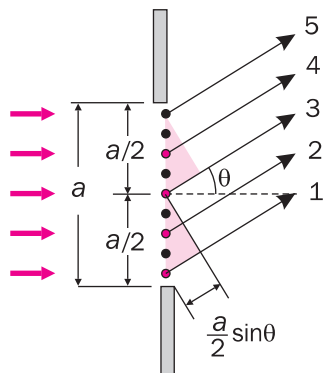


Fig. 4. Difracția luminii pe o fantă de grosime a . Fiecare porțiune a fantei acționează ca o sursă secundară.

Potrivit principiului Huygens, fiecare porțiune a fantei se comportă ca un izvor de lumină. În acest fel, lumina dintr-o porțiune a fantei va interfera cu lumina dintr-o altă porțiune a fantei, iar rezultatul pe ecran al acestei interferențe va depinde de unghiul θ .

Pentru analiza figurii de interferență, să împărțim fanta în jumătate și să considerăm undele 1 și 3, care își au originea în partea de jos și, respectiv, în centrul fantei. Unda 1 de pe direcția indicată în figură se va deplasa mai mult decât unda 3, cu o diferență de drum:

$$\delta = \frac{a}{2} \sin \theta$$

În același fel și diferența de drum între unda 3 și unda 5 este tot $\frac{a}{2} \sin \theta$. Dacă această diferență de drum este egală cu o jumătate de lungime de undă (corespunzătoare unei diferențe de fază de 180°), cele două unde vor produce o interferență distructivă, dând naștere în punctul respectiv unui nul.

Deci se poate spune că se va obține o interferență distructivă dacă $\frac{a}{2} \sin \theta = \frac{\lambda}{2}$ sau $\sin \theta = \frac{\lambda}{a}$.

Dacă fanta va fi divizată în patru părți egale și vom utiliza același raționament, vom constata că pe ecran vor fi franje întunecate dacă:

$$\sin \theta = \frac{2\lambda}{a}$$

Divizând fanta în șase părți egale vom obține, în urma unui raționament identic, franjele de difracție întunecate, date de condiția:

$$\sin \theta = \frac{3\lambda}{a}$$

În general, potrivit acestui raționament, se poate arăta că nulurile de difracție prin fantă îndeplinesc condiția:

$$\sin \theta = k \frac{\lambda}{a}, \text{ unde } k = 0; \pm 1; \pm 2, \dots$$

la mijlocul distanței dintre aceste franje aflându-se franje luminoase.

Exemplu

O radiație monocromatică cu lungimea de undă $\lambda = 580 \text{ nm}$ cade la incidență normală pe o fantă cu deschiderea $a = 0,3 \text{ mm}$. Ecranul este situat la o distanță de 2 m de fantă. Găsiți pozițiile primelor franje întunecate și grosimea franjei luminoase centrale.

Rezolvare

a) Primele franje întunecate situate de o parte și alta a franjei luminoase centrale corespund lui $k = 1$.

$$\text{Din relația } \sin \theta = \pm \frac{\lambda}{a} = \pm \frac{5,8 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{0,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = \pm 1,9 \cdot 10^{-3}.$$

$$\text{Din figura 3a se observă că } \text{tg} \theta = \frac{y_1}{L}.$$

Cum θ este foarte mic, se poate face aproximația

$$\sin \theta = \text{tg} \theta = \frac{y_1}{L}, \text{ de unde rezultă:}$$

$$y_1 \approx L \sin \theta = \pm L \frac{\lambda}{a} = \pm 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ m} = \pm 3,9 \text{ mm}.$$

b) Grosimea franjei centrale luminoase va fi:

$$d = 2|y_1| = 7,8 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 7,8 \text{ mm}.$$

Observație: Grosimea franjei este mult mai mare decât cea a fantei.

B. Rețeaua plană de difracție

Dacă, în loc de una sau două fante, avem un număr mare de fante paralele, toate de aceeași mărime, situate la distanțe egale, spunem că avem o rețea de difracție. O astfel de rețea (fig. 5) a fost construită pentru prima dată de Fraunhofer. Deși rețeaua din figura 5 conține doar cinci fante, în realitate aceste rețele sunt constituite din până la câteva mii de fante pe centimetrul liniar, ajungându-se ca distanța dintre ele să nu fie mai mare de 0,002 mm.

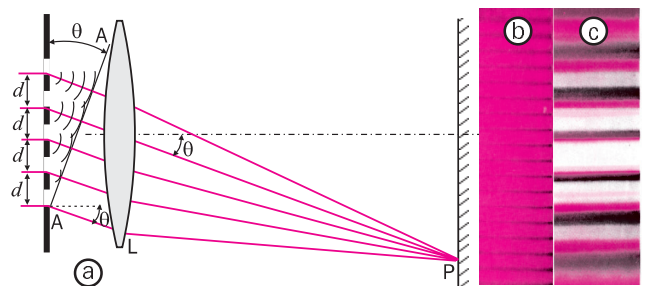


Fig. 5. Rețeaua de difracție(a); figuri de difracție în lumină roșie și albă (b și c).

Dacă o rețea este formată din N trăsături pe o lungime L , atunci numărul de trăsături pe unitatea de lungime este $n = \frac{N}{L}$, iar distanța dintre două trăsături

este $l = \frac{L}{N}$. Aceasta poartă numele de *constanta rețelei*.

Construcția unei astfel de fante se realizează prin zgârieri fine realizate pe un suport transparent, iar tehnologiile utilizate depind de constanta rețelei dorite.

Considerăm un fascicul paralel de lumină monocromatică care cade pe o rețea (fig. 6):

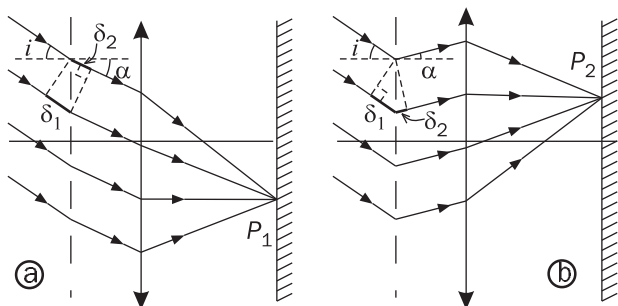


Fig. 6. Difracția pe rețea, pentru poziții diferite ale unui punct de pe ecranul pe care se obține figura de difracție.

Potrivit figurilor (a) și (b), undele paralele strânse de lentilă într-un același punct produc o anumită intensitate luminoasă. Diferența de drum dintre oricare două unde care trec prin fante vecine este:

$$\delta = l(\sin i \pm \sin \alpha)$$

Aceste unde determină într-un punct de pe ecran un maxim, dacă este îndeplinită condiția de maxim ($\delta = k\lambda$). Se obține:

$$l(\sin i \pm \sin \alpha) = k\lambda$$

Identic, se obține condiția de minim de difracție pentru:

$$\delta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$$

Dacă, în loc să folosim o sursă monocromatică, se face difracție în lumină albă, maximele de diferite ordine se vor obține sub unghiuri diferite, pentru diferitele lungimi de undă λ , în timp ce maximul de ordinul zero va apărea în lumină albă, deoarece este rezultat prin suprapunerea tuturor lungimilor de undă componente (fig. 5.c).

Exemplu

Un fascicul de lumină monocromatică cade perpendicular pe o rețea de difracție cu $N = 500$ trăsături/mm. Care este lungimea de undă a radiației (λ_1) dacă maximul de difracție de ordinul doi se obține sub un unghi $\theta = 30^\circ$? Care este numărul total al maximelor de

difracție date de rețea pentru o radiație cu lungimea de undă $\lambda_2 = 450$ nm?

Rezolvare

a) Maximul de difracție de ordinul k se obține pentru

unghiul θ dacă: $\frac{1}{N} \sin \theta = k\lambda$,

unde n este constanta rețelei. În cazul nostru,

$$\lambda_1 = \frac{\sin \theta}{kN} = \frac{\sin 30^\circ}{2 \cdot 500 \cdot 10^3} = 500 \text{ nm}.$$

b) Din aceeași relație, considerând $\lambda_2 = 450$ nm, se poate scrie

$$k_{\max} = \frac{\sin \theta_{\max}}{\lambda_2 N} = \frac{\sin 90^\circ}{\lambda_2 N} = \frac{1}{500 \cdot 10^3 \cdot 4,5 \cdot 10^{-4}} = 4,4.$$

Considerând doar partea întreagă vor rezulta doar patru maxime de difracție de o parte și alta a maximului central.

Aplicație – Rezoluția sistemelor optice

Sistemele optice utilizate la obținerea imaginilor unor corpuri (lupă, microscop, telescop, aparat de filmat sau fotografiat) nu pot obține ca distincte imaginile unor puncte oricât de apropiate. Acest lucru se datorează naturii ondulatorii a luminii, respectiv fenomenului de difracție produs de aceasta.

Să considerăm două surse necoerente, situate la distanță mare de o fantă având deschiderea l . Sursele pot fi considerate punctuale. Dacă nu s-ar produce fenomenul de difracție, ele ar putea fi observate pe un paravan (fig. 7. c) ca două imagini distincte. Datorită difracției însă, imaginea surselor este formată dintr-o regiune centrală luminoasă, înconjurată de franje întunecate și luminate (alternative), cu intensități din ce în ce mai mici. Pe ecran se vor vedea figurile de difracție.

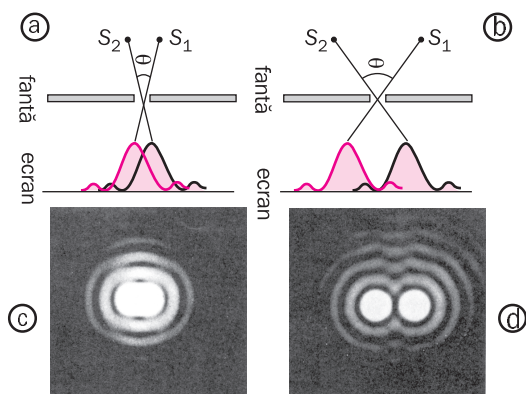


Fig. 7. Lumina provenită de la două surse aflate la o distanță mare față de o fantă produce, în urma trecerii prin aceasta, imagini de difracție pe un ecran (a, b), care au un grad mai ridicat (c) sau mai scăzut de suprapunere (d).

Pentru ca imaginile să fie văzute ca distincte, trebuie să fie satisfăcută condiția de rezoluție numită și *criteriul*

lui Rayleigh. Acest criteriu spune că: **dacă maximul central al figurii de difracție a uneia dintre surse se suprapune peste primul minim al figurii de difracție a celei de-a doua surse, imaginile pot fi considerate ca distincte.** Pe baza criteriului lui Rayleigh se poate determina separarea unghiulară minimă θ_m între două surse, față de o fantă, astfel încât imaginile lor să apară încă distincte. Pentru aceasta, să ne amintim că, în cazul difracției pe o fantă, primul minim apare când unghiul satisface condiția:

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{l}, \text{ unde } l \text{ este deschiderea fantei.}$$


Verificați-vă cunoștințele

1. Stabiliți, în cazul difracției, care din următoarele afirmații sunt corecte: a) se produce ori de câte ori obstacolul are același ordin de mărime cu lungimea de undă a radiației; b) reprezintă ocolirea aparentă a unui obstacol când acesta este mai mare decât inversul frecvenței undei respective; c) nu modifică frecvența radiației luminoase dar modifică viteza acesteia.
2. Precizați dacă, în următoarele cazuri, apar fenomene de difracție: a) umbra lăsată de deschiderea unei uși, când această întredeschidere este foarte mică iar înălțimea ușii este foarte mare; b) umbra lăsată de un firicel de praf pe fundul unui vas smălțuit cu alb, dacă în el se află apă; c) pata de lumină ce reprezintă imaginea filamentului unui bec al unei lămpi de birou, când sub aceasta se află o oglindă.
3. Lumina cu lungimea de undă $\lambda = 660 \text{ nm}$ cade perpendicular pe o fantă cu deschiderea $0,3 \text{ nm}$, formând o figură de difracție pe un ecran situat la distanța de 2 m de fantă. a) Care este poziția franjelor întunecate situate în imediata vecinătate a maximului luminos central? b) Care este grosimea maximului central?
4. Un ecran este plasat la distanța $d = 80 \text{ cm}$ de o fantă îngustă, practică într-un paravan, fantă iluminată cu o radiație cu $\lambda = 620 \text{ nm}$. Dacă distanța dintre prima și a treia franjă întunecată obținută este 3 mm , care este grosimea fantei?
5. Arătați că, dacă lumina cade sub un unghi β asupra unei fante, într-un experiment de difracție, condiția de interferență distructivă se modifică, fiind dată de relația:
$$\sin\theta = k \left(\frac{\lambda}{a} \right) - \sin\beta$$
 unde a este constanta rețelei.
6. Lumina cu lungimea de undă $\lambda = 550 \text{ nm}$ iluminează o fantă cu grosimea de $0,6 \text{ mm}$. La ce distanță trebuie plasat un ecran pentru ca prima franjă întunecată să se obțină la 1 mm de maximul central? Care este grosimea maximului central?

Pentru că $\lambda \ll l$ în majoritatea cazurilor, se poate face aproximarea: $\sin\theta \approx \theta$, de unde rezultă că unghiul limită (în radiani) este $\theta = \frac{\lambda}{l}$.

În cazul diaframelor circulare, care se întâlnesc la multe sisteme optice, o analiză similară evidențiază că separarea unghiulară minimă este dată de: $\theta_m = 1,22 \frac{\lambda}{D}$ în care D este diametrul deschiderii diafragmei.

7. Între farurile unui automobil care se apropie este o distanță de $1,2 \text{ m}$. Care este distanța maximă la care ochiul le poate observa ca distincte? Se presupune diametrul pupilei de 5 mm și $\lambda = 550 \text{ nm}$. Rezoluția este determinată doar de efectele de difracție, nu și de structura retinei.
8. Pe o rețea de difracție, cu constanta $a = 0,004 \text{ nm}$, cade normal un fascicul de lumină monocromatică cu lungimea de undă λ . Care este valoarea lui λ dacă unghiul dintre maximele de ordine 1 și 3 este 3° ?
9. O rețea de difracție cu 2500 linii/cm este utilizată pentru observarea liniilor spectrale ale sodiului. Determinați separarea unghiulară a liniilor galbene ale sodiului de $588,995 \text{ nm}$ și respectiv $589,592 \text{ nm}$.
10. O rețea de difracție este calibrată utilizând linia de $546,1 \text{ nm}$ a vaporilor de mercur. Linia de ordinul unu apare sub un unghi de 21° . Care este numărul de linii pe fiecare centimetru al rețelei?
11. O rețea de difracție are 4000 linii/cm. Dacă ea este iluminată de soare, iar spectrul acestuia se obține pe un ecran sub ce unghi față de linia centrală, se obține linia albastră de 400 nm ? Dar cea roșie de 650 nm ?
12. Lumina vizibilă cuprinsă între 400 și 700 nm cade pe o rețea de difracție. Se observă maximul central de difracție, dar nu se observă spectrul de ordinul doi sau mai mare. Care este distanța maximă dintre liniile rețelei?
13. Fasciculul unui laser trece printr-o rețea de difracție pentru a produce la o distanță de 2 m , pe un perete figura de difracție. Fasciculul este produs de un laser heliuneon cu o lungime de undă $\lambda = 694,3 \text{ nm}$. Dacă sunt 2000 trăsături/cm:
 - a) care este distanța pe perete dintre maximul central (de ordin zero) și maximul de ordin 7?
 - b) cât de mult se modifică răspunsul dacă utilizați aproximația $\sin\theta \approx \theta$?
14. Consultând surse de informație variate, realizați un referat cu tema: „Istoria difracției”.

Un fascicul de lumină obișnuit este format dintr-un număr mare de unde emise de atomii sau moleculele sursei. Fiecare atom va produce o undă cu o anumită orientare \vec{E} , corespunzătoare direcției de vibrație a atomului. Cum în sursa de lumină este posibilă oricare direcție de vibrație, unda electromagnetică rezultată va fi dată de suprapunerea tuturor undelor produse de fiecare dintre atomii sursei. Rezultatul este obținerea luminii nepolarizate, reprezentată schematic în figura 1a.

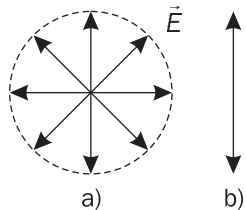


Fig. 1.
Unda nepolarizată obținută prin suprapunerea undelor provenite de la toți atomii sursei (a) și unda polarizată liniar (b).

Toate direcțiile vectorului intensitate a câmpului electric sunt la fel de probabile și determină un plan perpendicular pe direcția de propagare a undei, dar în orice moment și în orice punct al direcției de propagare a undei va exista doar un singur câmp electric rezultat. Dacă însă direcția de vibrație a câmpului electric se păstrează, rezultă o undă polarizată liniar.

Dicționar

Undă polarizată liniar: Undă în care în orice moment, într-un anumit punct al direcției de propagare, vectorul intensitate a câmpului electric vibrează după o aceeași direcție.

Pentru o undă polarizată, planul format de direcția vectorului intensitate a câmpului electric \vec{E} și direcția de propagare se numește **plan de polarizare**.

Practic, se poate obține lumină polarizată din lumină nepolarizată, prin înlăturarea din unda nepolarizată a tuturor componentelor, exceptând una, al cărei vector al intensității câmpului electric oscilează într-un singur plan. Trei sunt procedeele de obținere a luminii polarizate: **absorbție selectivă, reflexie și difuzie**.

A. * Polarizarea prin absorbție selectivă

O metodă de polarizare a luminii este aceea în care se utilizează un material cu următoarele proprietăți:

- transmite undele a căror intensitate a câmpului electric \vec{E} vibrează într-un plan pe o anumită direcție;
- absoarbe undele a căror intensitate a câmpului electric \vec{E} vibrează, în același plan, pe o direcție perpendiculară pe prima.

În 1932, un astfel de material, numit *polaroid*, a fost descoperit de E. H. Land. Materialul este format din lanțuri lungi de carbon, întinse în procesul de fabricație până când se produce o aliniere a moleculelor. După imersia într-o soluție cu conținut de iod, aceste molecule devin bune conducătoare de electricitate. Conducția are loc, în primul rând, datorită electronilor de valență ai carbonului, care se pot deplasa de-a lungul lanțului. Din această cauză, moleculele absorb lumina al cărei vector intensitate a câmpului electric este paralel cu lanțurile și transmit lumina al cărei vector câmp electric este perpendicular pe acestea. Direcția perpendiculară pe lanțurile moleculare reprezintă direcția de transmisie.

Ce se întâmplă însă cu intensitatea luminii care trece printr-un material polarizant (fig. 2)?

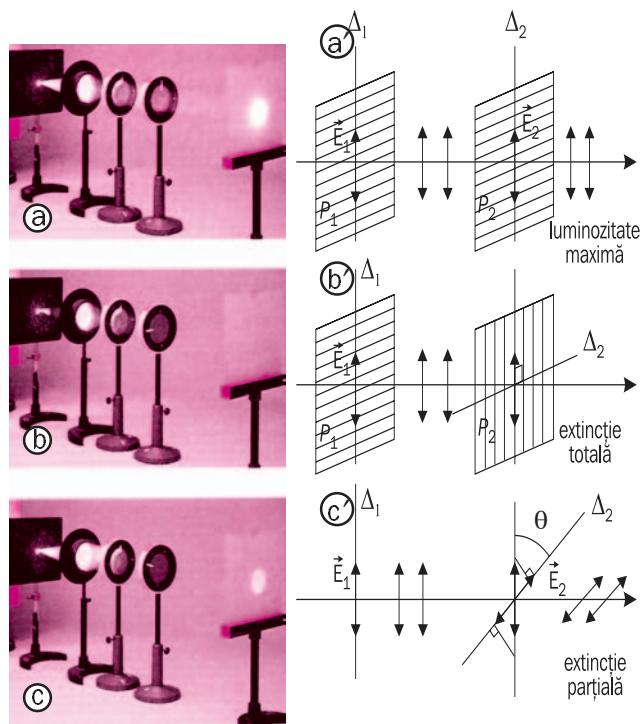


Fig. 2. Când două foițe polarizante (polarizor - 1 și analizor - 2) au axe de transmisie Δ_1 , Δ_2 înclinate sub un unghi θ , doar componenta paralelă cu axa analizorului va ajunge la observator (c). Axe paralele – intensitatea este maximă (a), axe perpendiculare – extincție totală (b).

Intensitatea luminii transmise printr-un astfel de material este dată de legea lui Malus.

$$I = I_0 \cos^2 \theta, \quad (1)$$

unde I_0 este intensitatea undei incidente, iar θ este unghiul dintre axele de transmisie ale analizorului și polarizorului.

Observație: Potrivit legii lui Malus intensitatea este maximă când $\theta = 0$ sau 180° , deci când axele de transmisie ale analizatorului și polarizorului sunt paralele, și nulă când acestea sunt perpendiculare.

B. *Polarizarea prin reflexie

La trecerea luminii dintr-un mediu transparent în altul printr-o suprafață de separație, unda incidentă se împarte în două: o undă reflectată și una refractată. Direcțiile celor două unde sunt date de legile reflexiei și refracției, însă, pentru descrierea completă a comportării luminii la suprafața de separație a celor două medii transparente, trebuie determinate intensitățile celor două unde și stările lor de polarizare.

Când lumina nepolarizată este reflectată de către o suprafață, lumina reflectată poate fi nepolarizată (în cazul unghiurilor de incidență de 0 și 90°), polarizată parțial pentru valori intermediare sau complet polarizată (fig. 3b).

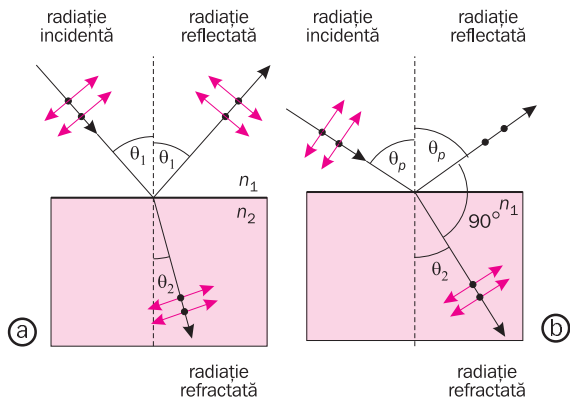


Fig. 3. Lumina reflectată de suprafața de separație a două medii este polarizată parțial față de lumina incidentă (nepolarizată) (a). Pentru un anumit unghi, lumina reflectată va fi total polarizată (b).

Considerând un fascicul de lumină nepolarizată incidentă la suprafața de separație a celor două medii, acesta poate fi descris de vectorul intensitate a câmpului electric (\vec{E}). În figură s-a reprezentat prin puncte componenta vectorului paralelă cu planul de separație și cu săgeți componenta perpendiculară pe prima. Ambele componente sunt perpendiculare pe direcția de propagare. S-a constatat că, la reflexie, componenta paralelă se reflectă mai puternic decât cea perpendiculară, ceea ce determină o anumită polarizare a fascicului. Și fasciculul refractat este la rândul său polarizat, dar într-o măsură mai mică.

Dacă variem unghiul de incidență θ_1 până când unghiul dintre raza reflectată și cea refractată devine 90° , se constată polarizarea totală a luminii reflectate, în timp ce lumina refractată va fi doar parțial polarizată. Unghiul de incidență la care se produce polarizarea totală a luminii reflectate se numește **unghi de polarizare** θ_p .

Utilizând figura 3b, se constată că:

$$\theta_2 = 90^\circ - \theta_p.$$

Considerând că reflexia se produce la suprafața de separație a aerului ($n_1 = 1$) cu a altui mediu transparent, cu indice de refracție $n_2 = n$, legea lui Snell se scrie:

$$n = \frac{\sin \theta_p}{\sin \theta_2} = \frac{\sin \theta_p}{\sin (90^\circ - \theta_p)} = \frac{\sin \theta_p}{\cos \theta_p} = \operatorname{tg} \theta_p \quad (4)$$

Expresia $n = \operatorname{tg} \theta_p$ poartă numele de **legea lui Brewster**, iar θ_p este adesea numit și **unghi Brewster**.

Deoarece indicele de refracție al unei substanțe variază cu lungimea de undă, și unghiul Brewster va depinde de lungimea de undă (frecvența radiației).

Laborator

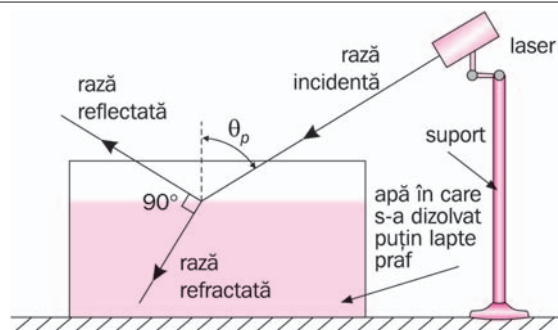
Determinarea unghiului Brewster

Materiale necesare:

- acvariu de sticlă, cu apă;
- lapte praf;
- laser He-Ne;
- polarizor;
- suport pentru laser.

• În acvariul de sticlă se pune apă amestecată cu puțin lapte praf. Acesta are rolul de a face vizibilă raza refractată.

• Se aranjează laserul astfel încât fasciculul acestuia să cadă pe suprafața apei sub un unghi egal cu



unghiul Brewster (la suprafața aer-apă, acesta este de aproximativ 53°).

• În întuneric perfect se cere deasupra dispozitivului praf de cretă. Se vor observa razele reflectată și refractată și unghiul de 90° dintre acestea.

Polarizarea prin reflexie este un fenomen des întâlnit. Lumina soarelui reflectată de apă, zăpadă sau sticlă va fi parțial polarizată. Dacă suprafața este orizontală va exista o componentă orizontală, a vectorului intensitate a câmpului electric, foarte puternică. Ochelarii cu lentile din materiale polarizante reduc această componentă a luminii, deoarece axele de transmisie ale lentilelor sunt orientate vertical.

C. *Polarizarea prin împrăștiere

Lumina incidentă pe un sistem de particule, cum sunt cele ale unui gaz, este după cum știm parțial absorbită de către electronii acestuia, care-și vor intensifica mișcarea de vibrație. Aceste variații acționează similar, dar de o manieră mai complexă decât cele produse într-o antenă. Componenta orizontală a vectorului electric din unda incidentă imprimă sarcinii o vibrație după direcția orizontală, iar cea verticală – o vibrație după direcția verticală. În acest fel, după fiecare din cele două direcții, unda împrăștiată de electron va avea o anumită polarizare (fig. 4).

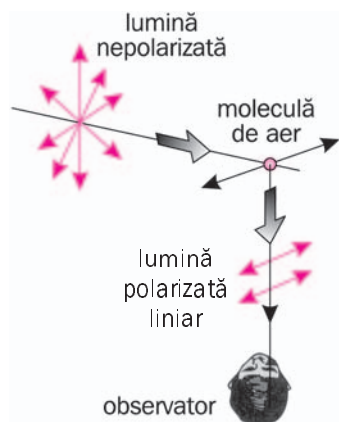


Fig. 4. Lumina nepolarizată a Soarelui este împrăștiată de moleculele din aer. Lumina văzută de un observator aflat în unghi drept față de direcția razelor este polarizată liniar, datorită componenteii orizontale a vibrației moleculelor.

Probabilitatea de interacție a luminii cu moleculele, la trecerea prin atmosferă, s-a calculat că variază invers proporțional cu puterea a patra a lungimii de undă $\left(\frac{1}{\lambda^4}\right)$. În acest fel, lumina violet cu $\lambda = 400$ nm va avea o probabilitate de împrăștiere de aproape zece ori mai mare decât cea a luminii roșii cu $\lambda = 700$ nm. La amiază, lumina Soarelui trece printr-un strat de atmosferă relativ îngust. O fracțiune mică din lumină va fi împrăștiată, de moleculele din atmosferă, iar culoarea soarelui va fi alb-gălbuie, datorită reprezentării în proporții relativ egale a tuturor lungimilor de undă din spectru. Culoarea cerului va apărea albastră, datorită împrăștierii mai mari a radiației albastre a spectrului în raport cu celelalte culori. La apus sau la răsărit, grosimea de atmosferă parcursă de razele Soarelui este mai mare (ajungând de la aproximativ 5 ori grosimea atmosferei la paralela de 30° , la aproximativ 11 ori la poli). Pe acest

parcurs, lumina albastră din spectru este împrăștiată cu probabilitate mai mare, astfel încât culoarea luminii Soarelui ajunsă la ochii noștri, va fi deplasată spre zona roșie a spectrului.

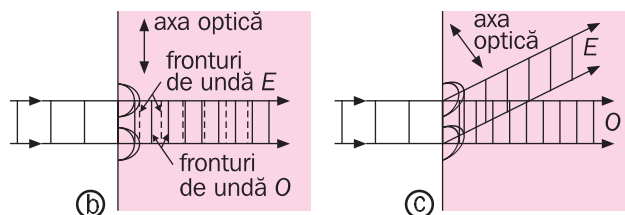
Aplicații. *Cristale birefringente

Legendele islandeze despre călătoriile vikingilor, conduși de Leif Erickson (cel Norocos), de pe coasta Norvegiei spre Islanda (pe care au și descoperit-o) și mai departe, până pe coastele continentului american (cca 700-1000 î.Cr.) povestesc despre o misterioasă piatră a Soarelui, cu ajutorul căreia aceștia se orientau pe vremea rea, dacă reușeau să vadă o „rază de lumină”. Această piatră ar putea fi cordieritul, un cristal ce-și schimbă culoarea când este rotit în lumină polarizată, sau calcitul optic numit și spat de Islanda, având comportări asemănătoare. Cunoașterea de către vikingi a luminii polarizate și utilizarea acesteia în navigație nu a fost dovedită direct, dar o astfel de posibilitate există.

Experimente privind comportarea unui cristal de spat de Islanda sunt menționate abia în 1669, de către matematicianul danez Bartholinus. Spatul de Islanda, ca și alte corpuri transparente studiate mai târziu, deși omogen chimic, este anizotrop, adică viteza unei luminoase în interiorul său nu este aceeași după orice direcție. Într-un astfel de cristal, numit și „birefringent”, de pe fiecare suprafață de undă se propagă două seturi de unde Huygens secundare, unele sferice, iar altele elipsoidale (fig. 5b). Ele vor fi tangente în lungul unei direcții numită axă optică a cristalului. Rezultatul trecerii luminii printr-un astfel de cristal birefringent va fi separarea luminii în două fascicule: unul, ale cărui raze sunt tangente la undele secundare sferice (raze ordinare) și altul ale cărui raze sunt tangente la undele secundare elipsoidale (raze extraordinare) (fig. 5c).



Fig. 5. Într-un cristal birefringent (a), un fascicul de lumină este împărțit în două: unul tangent la undele sferice (b), iar celălalt tangent la undele elipsoidale (c).



Dacă se rotește cristalul luând ca ax de rotație raza incidentă, raza ordinară rămâne fixă, iar cea extraordi-

nară se va roti în jurul acesteia. În aceste cristale, legea lui Snell este valabilă numai pentru raza ordinară, nu și pentru cea extraordinară, întrucât cea din urmă diferă în funcție de direcție. La rândul său, indicele de refracție va depinde de direcție (tabelul 1).

Tabelul 1. Indici de refracție ai unor cristale birefringente, pentru lumină cu $\lambda = 589 \text{ nm}$.

cristal	n_o	n_E
calcit	1,65	1,48
cuarț	1,54	1,55
turmalină	1,64	1,62

Aici n_o și n_E reprezintă indicii de refracție ai razelor ordinară și respectiv extraordinară.

Una din principalele utilizări ale acestor materiale este aceea de polarizori. Aceasta se bazează pe proprietatea că undele ordinare și extraordinare din aceste cristale birefringente sunt polarizate liniar în direcții perpendiculare una față de alta. Prin separarea celor două fascicule se produce un fascicul liniar polarizat. Astfel de polarizori din cristale birefringente, constituiți sub formă de prisme, au purtat numele descoperitorilor lor: Nicol, Glan; Ahrens și alții (fig. 6).

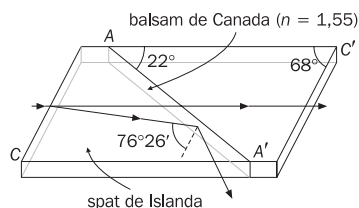


Fig. 6. Prisma polarizantă a lui Nicol (nicolul), tăiată dintr-un cristal de spat de Islanda și lipită cu balsam de Canada, va separa raza ordinară absorbită.

Nu întotdeauna într-un cristal birefringent razele ordinară și extraordinară se vor separa. Dacă fețele cristalului sunt tăiate perpendicular pe axa optică, iar lumina are incidență normală pe una dintre aceste fețe, străbătând cristalul pe direcția axei optice, cele două raze nu se separă (fig. 5b).

Materiale optic active și cristale lichide

Multe aplicații practice ale luminii polarizate implică utilizarea unor materiale optic active.

Dicționar

Material optic activ: Material care rotește planul de polarizare al luminii transmise.

Dacă planul de polarizare este rotit spre dreapta privind în lungul direcției de propagare, materialul se numește **dextrogir**, iar dacă este rotit spre stânga, **levogir**. Efectul pe care îl poate avea un astfel de material este redat în fig. 7.

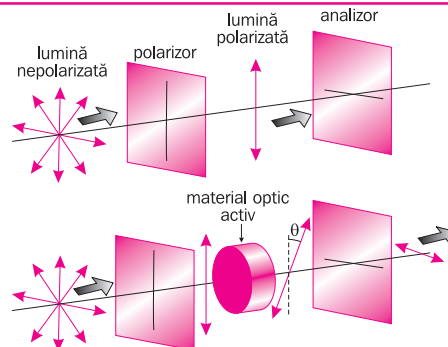


Fig. 7. Dacă lumina nepolarizată trece printr-un sistem de polarizori format din polarizor și analizor – ale căror axe de polarizare sunt perpendiculare, din sistem nu iese lumină (a). Introducerea unui material optic activ – va roti fasciculul liniar polarizat de primul polarizor, iar o parte din lumină va ieși prin analizor (b).

Activitatea optică a unor materiale este datorată formei moleculelor acestora. Unele proteine, de exemplu, sunt optic active datorită formei lor spiralate, alte materiale – precum sticla sau plasticul – pot deveni optic active dacă sunt supuse la tensiuni. Când lumina polarizată trece printr-o astfel de placă de plastic, nesupusă la tensiuni, și apoi printr-un analizor cu axa de polarizare perpendiculară pe cea a polarizorului, lumina polarizată nu va putea fi transmisă. Dacă însă plasticul va fi supus unor tensiuni, regiunile tensionate mai puternic vor roti lumina polarizată cu unghiuri mai mari de rotație. Ca urmare, în analizor apar benzi luminoase și întunecate ale luminii transmise, benzi de culori diferite (fig. 8).



Fig. 8. Distribuția tensiunilor într-un material plastic. Benzile colorate sunt obținute când acesta este pus între două plăci polarizatoare având axe perpendiculare.

O aplicație a acestui procedeu de evidențiere a tensiunilor este utilizată în construcții la urmărirea pe modele a zonelor de solicitare maximă

Un efect similar al rotației planului de polarizare este utilizat la ecranele unor calculatoare de buzunar, ceasuri de mână și alte dispozitive cu afișaj, prin intermediul **cristalelor lichide**.

Dicționar

Cristale lichide: Substanțe ale căror molecule au tendința de orientare după o anumită axă, spre deosebire de cele din lichide, complet dezordonate, sau din solide, care au un grad înalt de ordonare (fig. 9).

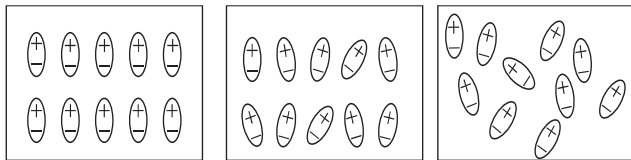


Fig. 9. Comparație între gradele de ordonare a stărilor solidă, cristal lichid și lichidă

Forțele care mențin moleculele cristalului lichid aliniate sunt de natură electrostatică, din cauza distribuției spațiale a sarcinilor electrice din moleculă. Acestea dau moleculei un caracter de dipol electric, ceea ce permite orientarea moleculei după o anumită direcție, numită *axă directoare a cristalului*. Intervenția unui câmp electric extern va produce rotația moleculelor (fig. 10).

Cristalul lichid, datorită naturii sale anizotrope, este un material birefringent, având din această cauză indici de refracție diferiți pentru raza ordinară și cea extraordinară. Ca urmare, și vitezele de deplasare ale celor două unde refractate vor fi diferite. Aceasta, va determina în cristalul lichid o rotire a planului de polarizare a luminii. Cristalul lichid din dispozitivele de afișaj (fig. 10b) se pune în celule formate din două plăci de sticlă conectate la sursa de tensiune. Dispozitivul este plasat între două plăci polarizante, cu axe de polarizare perpendiculare, iar în fața analizorului se pune o suprafață reflectantă. În absența tensiunii pe celula cristalului lichid, lumina polarizată paralel cu direcția axei directoare a cristalului va fi rotită cu 90° (datorită grosimii alese, pentru pelicula de cristal lichid), putând

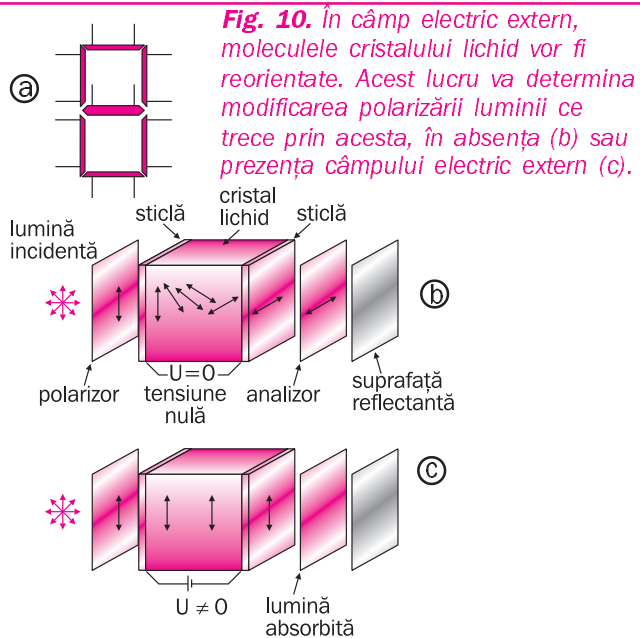
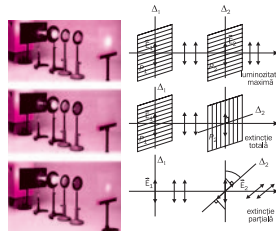


Fig. 10. În câmp electric extern, moleculele cristalului lichid vor fi reorientate. Acest lucru va determina modificarea polarizării luminii ce trece prin acesta, în absența (b) sau prezența câmpului electric extern (c).

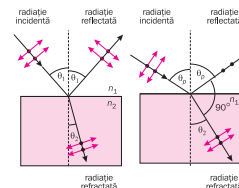
ieși prin analizor. La aplicarea tensiunii electrice, moleculele cristalului lichid se vor roti pe direcția câmpului electric aplicat. În acest fel, nu se va produce rotirea planului de polarizare, iar lumina va fi total absorbită de analizor. Astfel, modificarea, la anumite intervale de timp, a orientării moleculelor în celulele cristalului lichid, va permite iluminarea, sau nu, a suprafeței reflectorizante și afișarea semnelor alfanumerice, într-o structură de bază, formată din șapte segmente (fig. 10a).

Rezumat

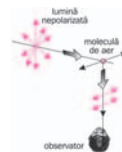
- Unda polarizată este unda în care în orice moment, într-un anumit punct al direcției de propagare, vectorul intensitate a câmpului electric vibrează după o aceeași direcție.
- Lumina polarizată se poate obține prin: absorbția selectivă, reflexie sau difuzie.
- Absorbția selectivă stă la baza construcției lentilelor polarizatoare, având ca bază lanțuri lungi de carbon, bune conductoare de electricitate. Moleculele absorb lumina al cărui vector intensitate a câmpului electric este paralel cu lanțurile moleculare și o transmit pe cea perpendiculară.



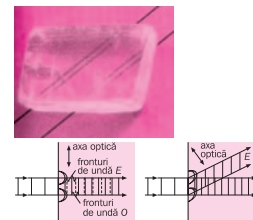
- În cazul reflexiei luminii, pe o suprafață între 0° și 90° lumina va fi parțial polarizată cu o polarizare maximă pentru unghiul dat de relația Brewster: $n = \text{tg} \theta_p$.



- Polarizarea prin împrăștiere este datorată interacției luminii cu un sistem de particule precum este aerul. Pe baza fenomenului poate fi explicată culoarea aerului în diferite momente ale zilei.



- Aplicații ale polarizării utilizează cristalele birefringente de tipul cordieritului sau a calcitului, dar și materiale optice active sau cristalele lichide.





Verificați-vă cunoștințele

1. Lumina provenind dintr-un mediu cu indice de refracție n_1 este incidentă pe suprafața de separație cu un al doilea mediu, de indice n_2 , sub un unghi de incidență θ . Unghiul dintre raza reflectată și cea refractată este β . Arătați, utilizând dezvoltarea relației $\sin(A + B)$, că:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{n_2 \sin\beta}{n_1 - n_2 \cos\beta} \quad (1)$$

b) Arătați că ecuația (1) se reduce la legea lui Brewster când $\beta = 90^\circ$, $n_1 = 1$ și $n_2 = n$.

2. Dacă indicele de refracție al unei plăci de sticlă este $n = 1,52$, care va fi unghiul Brewster când placa se află în: a) aer? b) apă?

3. Dacă lumina este incidentă sub un unghi de incidență egal cu unghiul de polarizare, când cade pe o suprafață de sticlă cu indice de refracție $n = 1,65$, care va fi unghiul de refracție pentru raza transmisă?

4. Utilizând procedeul de determinare a unghiului Brewster, arătați că, dacă lumina provenind din mediul de indice de refracție n_1 este incidentă pe un mediu de indice n_2 , este valabilă relația $\operatorname{tg}\theta = n_2/n_1$. Utilizați această relație la stabilirea unghiului Brewster, dacă lumina este reflectată de o bucată de sticlă având $n = 1,5$, scufundată în apă.

5. La ce unghi deasupra orizontului se află Soarele, dacă lumina acestuia reflectată pe suprafața apei este total polarizată?

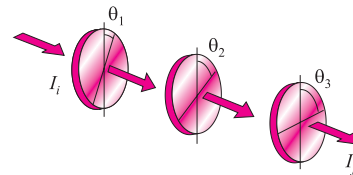
6. Un fascicul de lumină trece prin două plăci polarizante (polarizor, analizor). Dacă I_i este intensitatea luminii incidente pe analizor, iar I este intensitatea luminii transmise

prin acesta, să se determine:

a) care este raportul dacă lumina polarizată care cade pe analizor face un unghi de 45° cu axa de polarizare?

b) care va fi unghiul de la punctul precedent, dacă raportul $I/I_1 = 1/3$?

7. Trei plăci polarizante paralele sunt centrate pe aceeași axă. Direcțiile axelor de transmisie în raport cu verticala fac unghiurile $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Un fascicul plan polarizat, cu planul de polarizare paralel cu direcția verticală, este incident pe placa din stânga și are o intensitate arbitrară $I_1 = 10$ unități. Care este intensitatea transmisă prin cea de a treia placă polarizantă, dacă $\theta_1 = 15^\circ, \theta_2 = 30^\circ$ și $\theta_3 = 60^\circ$.



8. Un material birefringent, cu indicele de refracție 1,7, pentru raza ordinară și 1,8 pentru raza extraordinară, pentru lumina cu $\lambda = 570$ nm, rotește planul de polarizare cu 90° . Ce grosime are materialul respectiv?

9. Unii ochelari de soare cu lentile polarizante reduc intensitatea luminii reflectate de suprafețe orizontale precum cele de apă, zăpadă etc. Care trebuie să fie orientarea axei de transmisie, pentru ca eficiența acestora să fie maximă?

10. Ar fi posibil de acoperit avioanele cu o peliculă nereflectorizantă pentru radiația cu lungimea de undă de 3 cm, pentru a le face invizibile?



Lectură

Utilizarea polarizării în lumea vie

Unele specii de pești, amfibieni, artropode și octopode – utilizează vederea în lumină polarizată pentru orientare, determinarea distanțelor, apărare, comunicare sau în alte scopuri. Ochii multor nevertebrate sunt structurați astfel încât să conducă la creșterea sensibilității vederii în lumină polarizată. Este și cazul ochiului compus al albinei. Acestea utilizează vederea polarizată pentru orientare și determinarea distanțelor. Studiile lui Karl von Frisch, asupra dansului unor albine din America de Nord, care are loc în apropierea intrării în stup sau chiar în interiorul acestuia, arată că, cu creșterea distanței față de sursa de hrană, numărul de circuite parcurse în unitatea de timp scade (fig. 11). Indicațiile privind direcția sunt date de linia dreaptă a dansului. Orientarea, în acest caz, are ca referință direcția

Soarelui. Acest lucru a fost demonstrat prin înlocuirea luminii Soarelui cu o lampă montată într-o incintă închisă în care era și stupul. Mutarea acestuia determina reorientarea dansului, astfel încât unghiul dintre direcția dreaptă a traiectoriei și lampă rămânea mereu același. Faptul că în acest tip de orientare intervine lumina polarizată s-a putut demonstra prin utilizarea unui filtru polarizor. Rotirea acestuia a determinat rotirea dansului.

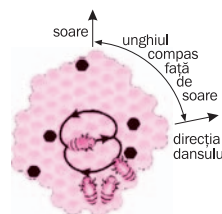
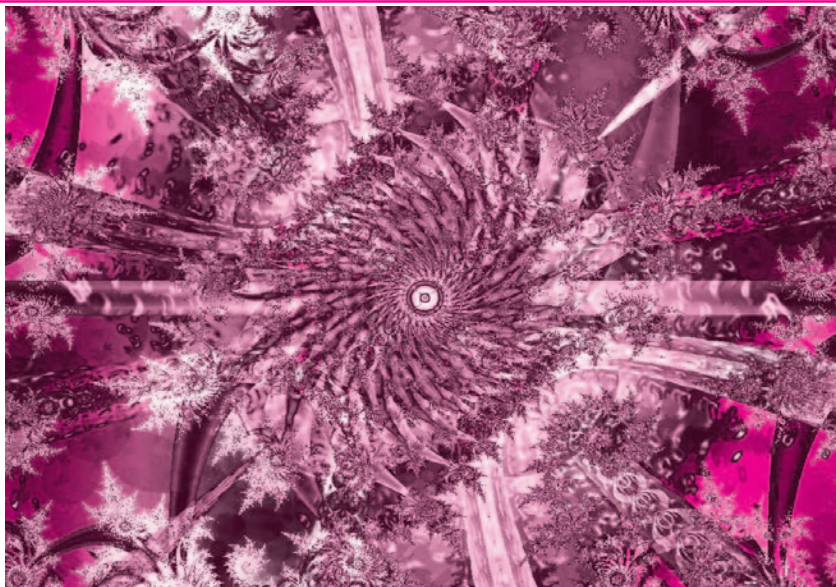


Fig. 11. Dansul albinei indică direcția și distanța până la hrană. Orientarea se face după Soare, utilizând polarizarea luminii.

- 4.1. *Determinism și predictibilitate. Condiții. Modele
- 4.2. *Determinism și impredictibilitate. Comportamentul haotic. Condiții
- 4.3. *Descrierea comportamentului haotic. Spațiul fazelor. Atractori clasici și stranii
- 4.4. *Elemente de geometrie fractală



Capitolul 4

*TEORIA HAOSULUI

4.1.

**Determinism și predictibilitate. Condiții. Modele*

Determinism și predictibilitate

Determinismul este un concept filozofic potrivit căruia orice eveniment sau acțiune este rezultatul inevitabil al evenimentelor și acțiunilor precedente. După cum afirma Pierre Simon de Laplace, „*dându-se la un moment dat unei inteligențe atotcuprinzătoare toate forțele prin care natura este pusă în mișcare și pozițiile corpurilor care o compun... nimic nu ar fi nesigur, iar viitorul ca și trecutul ar fi prezent ochilor săi.*” Ideea enunțată de Laplace leagă caracterul determinist al legilor naturii de predictibilitatea evoluției sistemelor studiate de acesta. Un sistem determinist este unul ale cărui stări viitoare sunt complet determinate de stările sale prezente și de regula evoluției sale. Mai mult, aceleași condiții inițiale vor produce totdeauna o evoluție identică a sistemului.

Ca și concept filozofic, determinismul este regăsit încă din antichitatea greacă, dar a fost introdus în științe abia în secolul al XIV-lea, odată cu stabilirea principiului cauzalității ca regulă de guvernare a structurilor dinamice. Fundamentul determinist în construirea științelor moderne a fost pus de Isaac Newton, al cărui set concis de principii asupra dinamicii prezicea cu acuratețe mișcarea unei particule într-o mare varietate

de sisteme. Newton a demonstrat că legile mișcării formulate de el, combinate prin procesul logicii, putea descrie de la orbitele planetelor în jurul Soarelui la forma traiectoriei unui obuz.

Încrederea în determinismul mecanicii newtoniene era atât de mare încât timp de câteva secole după ce au fost descoperite principiile acesteia, fizica a încercat doar să le aplice oricărui alt proces fizic.

Condițiile inițiale

Una dintre cele mai importante inovații ale secolului al XVI-lea a fost ideea că legile universului ar putea fi înțelese doar prin exprimarea proprietăților fizice ca mărimi măsurabile. Utilizarea valorilor numerice pentru a descrie lumea fizică conduce în ultimă instanță la necesitatea exprimării legilor fizicii prin ecuații matematice și nu prin simple propoziții. Principiul fundamental al dinamicii, de pildă, poate fi exprimat în cuvinte, dar pentru aplicarea acestuia unui sistem particular este necesară forma lui matematică.

Cunoașterea dinamicii sistemului nu implică doar cunoașterea legilor care guvernează evoluția sa, ci și o anumită stare a sistemului, stare dată de un set de măsurători numite condiții inițiale.

Dicționar

Condiții inițiale ale sistemului: Valori ale măsurătorilor unui sistem fizic, la un anumit moment, considerat moment inițial, valori care explicitează starea sistemului.

Sistemul fizic poate fi: Sistemul Solar, un obiect care cade liber pe Pământ, un oscilator care-și desfășoară mișcarea într-un anumit mediu etc.

Principiul fundamental al dinamicii formulat de Newton este un bun exemplu, determinist în sensul că există o conexiune directă între valorile numerice ale măsurătorilor la un anumit moment și valorile măsurate la un moment ulterior.

Măsurătorile care se fac în aplicarea principiului lui Newton depind de sistemul particular studiat, dar includ, de obicei, poziția, viteza și direcția de mișcare a oricărei componente a sistemului, cât și valorile și direcțiile forțelor care acționează asupra acestor corpuri la un anumit moment din istoria sistemului.

Studierea unui sistem fizic în situație reală este adesea foarte complicată putând implica multe tipuri de interacțiuni cu mediul sau cu componente ale acestuia.

Un exemplu elocvent în acest sens poate fi căderea liberă a unui corp în câmp gravitațional. Să vedem care sunt forțele care pot influența această mișcare.

Forța care determină căderea este forța gravitațională ($m\vec{g}$) în care accelerația gravitațională este considerată de obicei constantă. Aproximarea poate fi făcută când mișcarea are loc pe distanțe mici. Altfel g depinde de altitudine, potrivit relației cunoscute din studiul câmpului gravitațional:

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R + z)^2},$$

unde R este raza Pământului, iar z este altitudinea.

În timpul căderii printr-un fluid (ca de exemplu în aer) o serie de alte forțe pot fi luate în calcul.

- **forța de rezistență (frecare)** – poate fi aproximată în anumite condiții ca fiind proporțională cu viteza.

$$F_r = -Cv,$$

unde constanta C va depinde de forma și dimensiunile corpului, dar și de vâscozitatea mediului.

Și aici lucrurile se pot complica în sensul modificării valorii lui C pe distanțe mari datorită modificării densității mediului (rarefierea aerului odată cu creșterea altitudinii), deci și a vâscozității.



Fig. 1.

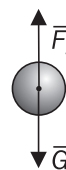


Fig. 2.

- **forța arhimedică**, dată de greutatea volumului de fluid dizlocat de corp ($F_A = -\rho gV$; unde ρ este densitatea aerului) poate deveni semnificativă în cazul unor densități comparabile ale corpului și ale aerului. Și în acest caz modificarea densității aerului determină dependența forței de altitudine ca și în cazul forței de frecare.

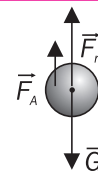


Fig. 3.

În cazul în care corpului aflat în cădere pe lângă mișcarea de translație i s-a imprimat și o mișcare de rotație, ca urmare a vitezei relative diferite a acestuia

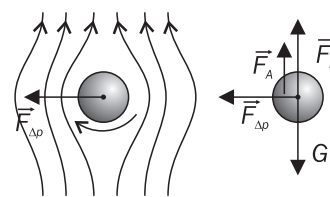


Fig. 4.

față de straturile adiacente de fluid (aer) apare o diferență de presiune statică care determină devierea laterală a corpului de la traiectorie.

Datorită mișcării de rotație a Pământului, corpul în cădere este deviat spre dreapta (în Emisfera Nordică) și spre stânga (în cea Sudică) prin acțiunea unei forțe numită **forța Coriolis** (fig. 5.)

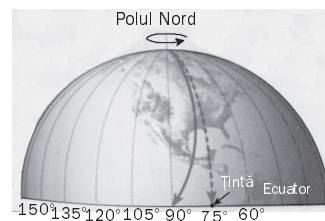


Fig. 5. Forța Coriolis.

În situația existenței în atmosferă a unor centre de joasă și înaltă presiune apărute în urma încălzirii

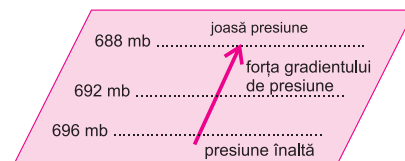


Fig. 6. Forța de gradient.

diferențiate a anumitor zone ale Pământului apar curenți de aer verticali sau orizontali (vânturile) ce modifică mișcarea corpului. Ultimii sunt datorati variației presiunii atmosferice cu distanța (gradientul de presiune) de unde și numele forței care le provoacă – **forța de gradient**.

Când corpul este încărcat electric, iar căderea se face într-un câmp electric (exemplu: căderea unei sarcini printre armăturile unui condensator aflat la o tensiune U) apare o forță de interacțiune de natură electrică care, în funcție de orientarea câmpului, determină accelerarea sau încetinirea corpului în cădere.

Uneori, valoarea acestei forțe poate deveni semnificativă, funcție de caracteristicile (masa sa) corpului.

O sarcină electrică în mișcare determină apariția unui câmp magnetic perpendicular pe direcția de deplasare determinând interacțiunea cu câmpul

magnetic terestru. Aceasta va modifica traiectoria de mișcare acționând cu o forță dată de relația $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, unde q este sarcina electrică, iar \vec{v} este viteza corpului. Orientarea forței va depinde de orientarea inducției magnetice (\vec{B}) a câmpului magnetic local al Pământului.

Dacă sistemul descris anterior, simplu la prima vedere, se dovedește în realitate a fi atât de complex, ce se întâmplă însă în cazul unor sisteme dinamice și mai complexe, de pildă, în cazul deplasării omului pe Lună, în cadrul misiunii Apollo? Dacă în prima situație unele variații de la traiectoria corpului pot să nu producă efecte notabile, în cel de-al doilea caz efectele ar fi putut fi dezastruoase.

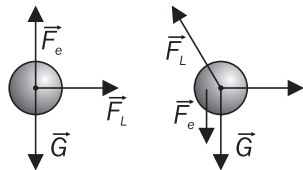


Fig. 7.

Modelarea. Studiarea unui sistem dinamic real face apel la modelarea procesului, modelare prin care se selectează un număr de elemente care definesc un anumit tip de comportament, și se neglijează altele.

Orice model trebuie să aibă două caracteristici importante:

- să fie cât mai simplu
- să rețină efectele importante.

Avantajul modelării este obținerea unui sistem ideal care ușurează înțelegerea și analiza comportamentului sistemului dinamic studiat. Gradul de idealizare este constituit din restricțiile impuse sistemului și modul în care acestea afectează rezultatul.

Temă în clasă: Pentru influențele descrise în cazul căderii libere a unui corp, identificați situații în care acestea pot fi sau nu neglijabile comparativ cu forța de atracție gravitațională. Utilizând date din literatură, realizați estimări ale valorilor acestor forțe.

Construirea unui model trebuie să aibă în vedere câteva etape:

- I. Observarea comportamentului sistemului dinamic.
- II. Înțelegerea modului în care acesta se comportă.
- III. Identificarea variabilelor sistemului respectiv.
- IV. Evaluarea gradului de complexitate a sistemului.
- V. Evaluarea limitelor de eroare admisibile.

Temă în clasă: Pentru un sistem dinamic cunoscut, detaliați etapele de construire a modelului de studiu al acestuia.

Dacă eroarea dată de model depășește limita de eroare admisibilă evaluată (V), modelul trebuie dezvoltat în sensul cuprinderii unor elemente suplimentare a căror influență este importantă. Acestea vor da aproximări

ale comportării sistemului din ce în ce mai apropiate de sistemul dinamic real.

Să urmărim procesul de modelare în cazul unor sisteme dinamice aplicând formalismul matematic utilizat de Newton în studiul dinamicii unui punct material de masă m .

Variabilele sistemului dinamic pot fi:

- *coordonatele de poziție* (notate într-un S.R. cartezian: x, y, z)
- *vectorul de poziție* ($\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$)
- *viteza instantanee* ($\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$, unde cu $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ s-au notat derivatele în raport cu timpul a coordonatelor de poziție în același S.R.).
- *acelerația* ($\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$, unde cu $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ s-au notat derivatele de ordinul doi în raport cu timpul ale coordonatelor carteziene x, y, z).

Principiul fundamental $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$ este relația care face legătura între mișcarea sistemului și cauzele producerii acesteia și poate fi scris pe componente:

$$F_x = m\ddot{x}; F_y = m\ddot{y}; F_z = m\ddot{z},$$

unde F_x, F_y, F_z reprezintă rezultantele forțelor individuale, cu acțiune independentă asupra punctului material pe fiecare direcție de mișcare.

Aceste forțe pot depinde de o parte dintre variabile, de exemplu: de variabilele poziție (x, y, z) în cazul forței gravitaționale, de viteză ($\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$) (forța de frecare dintre un solid și un fluid) sau de timp (t) (momentul forței generate de un motor), sau de toate aceste variabile.

În acest din urmă caz principiul fundamental, după cele trei direcții ale sistemului de referință ales, este:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y} &= F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} &= F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{aligned} \quad (1)$$

O dată stabilite variabilele, pentru construirea modelului, trebuie stabilită forma explicită a forței în vederea determinării expresiei exacte a ecuației principiului fundamental. Ca exemplu, de forțe dependente de poziție, să considerăm greutatea (\vec{G}) și forța elastică (\vec{F}_{el}).

În primul caz, datorită dependenței accelerației gravitaționale de altitudine (z), aceasta se scrie:

$$G(z) = -mg \left(\frac{R}{R+z} \right)^2.$$

Forța este neliniară în z . Când z este mic, în raport cu R acesta se poate neglija.

Forța elastică este o forță de revenire ce apare într-un sistem dinamic ori de câte ori acesta este scos

din poziția de echilibru. Dacă forța acționează după direcția x a sistemului de coordonate ea este caracterizată de:

- $F_x = 0$, când $x = 0$ și
- $F_x < 0$, când $x > 0$

(fig. 8a).

Dependența forței elastice de poziția de echilibru este dată în fig. 8b.

Cu cât devierea de la echilibru este mai mare cu atât mai mare este și devierea forței F_x de la o dependență liniară în raport cu elongația. În acest caz forța poate fi descrisă de o dezvoltare în serie Taylor în jurul poziției de echilibru ($x = 0$), de tipul:

$$F(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots,$$

unde coeficienții a_1, a_2, \dots sunt derivatele forței în raport cu deplasarea, calculate în poziția de echilibru.

$$a_i = \frac{1}{i!} \cdot \left. \frac{d^i F}{dx^i} \right|_{x=0}.$$

În cazul micilor deviații față de poziția de echilibru seria se poate aproxima prin reducere la primul termen al acesteia, unde se face notația: $a_1 = -k$, obținându-se expresia $F(x) = -kx$.

O forță dependentă continuu de viteză, ca de pildă forța de frecare, la contactul solid-lichid poate fi exprimată la rândul ei printr-o serie Taylor de tipul:

$$F(\dot{x}) = b_1 \dot{x} + b_2 \dot{x}^2 + b_3 \dot{x}^3 + \dots, \quad (5)$$

unde b_n sunt coeficienții Taylor:

$$b_n = \frac{1}{n!} \left(\left. \frac{d^n F}{d\dot{x}^n} \right) \right|_{\dot{x}=0}.$$

și unde se presupune, de asemenea, că $F(0) = 0$.

În cazul aproximării liniare expresia (5) devine

$$F(\dot{x}) = -c\dot{x},$$

unde $-c$ ($c > 0$) este constanta de amortizare (constanta de vâscozitate).

Modelul amortizării liniare este folosit în multe modelări ale unor sisteme dinamice pentru a reprezenta efecte care tind să determine disiparea energiei.

Modelul fizic idealizat al acestui efect figurat schematic în fig. 8 este un piston care se deplasează cu viteza instantanee \dot{x} într-un cilindru conținând un fluid vâscos.

Rezistența datorată vâscozității ce acționează asupra pistonului produce o forță modelată a fi proporțională cu viteză și de sens contrar acesteia. Dispozitivul poartă numele de *amortizor* (fig. 9).

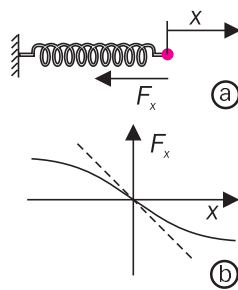


Fig. 8.

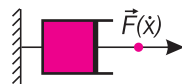


Fig. 9.
Reprezentare a sistemului dinamic cu amortizare datorată vâscozității.

Un alt dispozitiv, utilizat adesea pentru a reprezenta o disipare liniară a energiei este cel din figura 10 reprezentând o bară de care este prinsă o masă m . Când masa m se mișcă putem identifica trei surse de disipare a energiei:

– disipare prin intermediul aerului (rezistența ca urmare a vâscozității mediului – este transferată energie sub formă cinetică particulelor aerului.

– disipare în bara rigidă – este vorba de disiparea energiei sub formă de căldură ca urmare a tensionării solidului.

– frecare în punctul de legătură al barei.

De obicei în mecanismele reale sunt prezente toate cele trei tipuri de disipare ce produc amortizarea mișcării.

Ca urmare a existenței mai multor mecanisme de amortizare cu ponderi diferite, în funcție de caracteristicile sistemului, este dificil de calculat o singură constantă (C) de amortizare. În acest caz vor exista constante diferite pentru diferitele moduri de amortizare și ponderi diferite ale acestora.

În unele situații forțele dependente de viteză pot fi neliniare:

$$F(\dot{x}) = -\alpha\dot{x}^2, \quad (6)$$

unde coeficientul α depinde de mărimea și forma corpului, dar și de densitatea fluidului (mediul). Expresia (6) poate proveni din dezvoltarea în serie Taylor în cazul unei posibile neglijări a primului termen al acesteia și este întâlnită în cazul avioanelor ca forță de frânare aerodinamică, sau în cazul vehiculelor, care se deplasează cu viteze mari sau cel puțin moderate.

Există sisteme care pot depinde de poziție și viteză, de exemplu: căderea unui corp într-un mediu vâscos, fără însă a depinde explicit de timp.

Forțe dependente de timp în mod explicit pot apărea, de exemplu, în cazul desprinderii unei rachete de la sol – în acest caz arderea carburantului determină o variație în timp a masei rachetei, deci și a dinamicii acesteia sau, în cazul unui cutremur, când are loc o disipare în timp a energiei produse în epicentru etc.

Principalul element în modelarea dinamicii unui sistem este scrierea ecuațiilor principiului fundamental pentru fiecare din subsistemele identificate. Iată câteva exemple:

Exemple

1. Reprezentați grafic un oscilator linear (resort elastic la capătul cărui se află un corp de masă m) într-un mediu vâscos și modelați dinamica acestuia. Mișcarea oscilatorului se realizează după coordonata x . Dar dacă mișcarea oscilatorie este întreținută?



Fig. 10. Surse de amortizare într-un pendul electric orizontal.

Rezolvare

a) Oscilatorul într-un mediu vâscos poate fi reprezentat ca în figura 11, unde mișcarea corpului scos din poziția de echilibru este datorată amortizării unei forțe de tip elastic ($F_e = -kx$), și a unei forțe de frecare (solid-fluid, dependentă de viteză ($F_a = -c\dot{x}$).

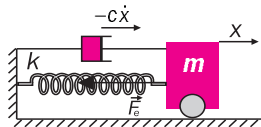


Fig. 11.

Principiul fundamental în acest caz se scrie:

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx.$$

b) În cazul în care mișcarea este întreținută, după cum a rezultat din studiul oscilațiilor întreținute trebuie intervenit din exterior cu o forță externă (F_{ex}). Aplicarea unei forțe constante ar duce la stabilirea unei stări de echilibru diferite de cea inițială și o deformare permanentă a resortului elastic fapt pentru care forța care va întreține mișcarea va trebui să fie o forță dependentă de timp [$F_{ex} = F_{ex}(t)$]. Ecuația (1) în acest caz devine:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t).$$

2. Modelați sistemul de suspensie al unei roți de motocicletă.

Rezolvare

Sistemul de suspensie al unei motociclete are rolul de a-l izola relativ pe ocupant de neregularitățile drumului, pentru micșorarea șocurilor la care acesta este supus. O astfel de suspensie este datorată pe de o parte sistemului propriu-zis (amortizoare și arcuri) care leagă corpul motocicletei (m_1) de osii, iar pe de altă parte de cauciucuri. În ambele cazuri se poate utiliza un model de oscilator amortizat.

Sistemul rezultat poate fi reprezentat ca în diagrama din figura 12. Posibilitatea de mișcare independentă în plan vertical a axului roții față de corpul motocicletei determină utilizarea unor coordonate diferite pentru mișcările acestora (x_1 , respectiv x_2). Vom considera că în repaus $x_1 = 0$ și $x_2 = 0$.

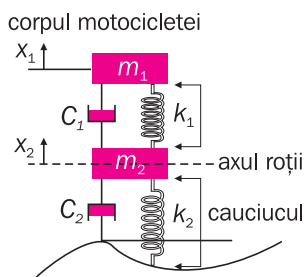


Fig. 12.

Aplicăm principiul fundamental pentru fiecare dintre cele două subsisteme (reprezentate de masele m_1 și m_2).

În scrierea principiului fundamental pentru corpul de masă m_1 , trebuie ținut seama că poziția sa depinde atât de poziția față de osie (x_1), cât și de poziția osiei față de Pământ (x_2). Forța în resortul k_1 va fi proporțională cu distanța pe care a fost întins/comprimat arcul suspensiei ($x_1 - x_2$). Dacă, de exemplu, $x_1 = x_2$, forța în

arc $F_e = -k(x_1 - x_2)$ va fi nulă. Pentru $x_1 - x_2 > 0$, F_e este orientată în sens invers alungirii x_1 a resortului k_1 , de unde și semnul „-”. Din motive similare și forța de frecare cu aerul va fi dependentă de vitezele atât ale corpului (m_1), cât și al osiei (m_2), deci $F_f = -c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$. Principiul fundamental pentru subsistemul m_1 se scrie:

$$m_1\ddot{x}_1 = -c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1(x_1 - x_2) \quad (1)$$

În cazul osiei ecuația este ceva mai complicată, asupra acesteia acționând atât forțele datorate sistemului de suspensie reprezentate în ecuația (1), dar în sens invers, cât și amortizările proprii datorate elasticității cauciucului ($-k_2x_2$) și frecării acestuia ($-c_2\dot{x}_2$).

$$\text{Deci } m_2\ddot{x}_2 = -c_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1(x_2 - x_1) - c_2\dot{x}_2 - k_2x_2 \quad (2)$$

Și în acest caz se poate ține cont de o forță externă dependentă de timp $F(t)$ datorată denivelărilor drumului și deplasării motocicletei față de drum, deci de momentele în care aceste denivelări acționează asupra sistemului de suspensie.

Dacă presupunem viteza constantă, forțele externe datorate denivelărilor drumului, vor fi dependente atât de poziție (înălțimea denivelărilor $x(t)$, cât și de viteza imprimată de denivelări $\dot{x}(t)$. Relația (2) devine:

$$m_2\ddot{x}_2 + c_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_1(x_2 - x_1) + c_2\dot{x}_2 + k_2x_2 = kx(t) + c_3\dot{x}(t). \quad (3)$$

3. Într-un oscilator pneumatic (fig. 13) scoaterea masei m din echilibru determină oscilația acestuia ca urmare a variațiilor presiunii aerului din camerele corpului de pompă.

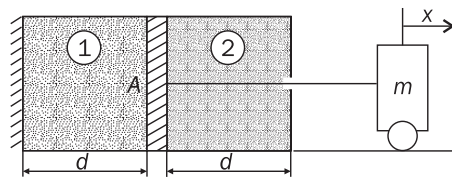


Fig. 13. Oscilator pneumatic.

Gazele din cele două camere suferă procese izentropice ($pp^{-\gamma} = \text{const.}$, unde p este presiunea, ρ este densitatea gazului din fiecare incintă, iar γ este constanta adiabatică, $\gamma = c_p/c_v$). La echilibru $x_0 = 0$. Variabilele termodinamice sunt p_0 , ρ_0 și T_0 în fiecare dintre cele două camere. Să se modeleze matematic dinamica sistemului.

Rezolvare

Efectele variației alternative a presiunii aerului pe cele două fețe ale pistonului de secțiune A al corpului de pompă determină mișcarea oscilatorie a corpului de masă m . Ca urmare a deplasării pe roți, forța de frecare poate fi considerată neglijabilă ($F_f = 0$). Este ușor de

intuit funcționarea oscilatorului pneumatic. O deplasare spre dreapta a pistonului va determina în camera (2) o presiune p_2 ($p_2 > p_0$), iar în camera (1) o presiune p_1 ($p_1 < p_0$), rezultatul fiind o forță datorată diferenței de presiune:

$$F = A(p_2 - p_1)$$

orientată în sens invers deplasării inițiale (x) a pistonului.

Modelul matematic al sistemului se poate construi plecând de la ecuația de mișcare a acestuia

$$m\ddot{x} = (p_1 - p_2)A.$$

Cele două presiuni p_1 și p_2 sunt dependente de poziția pistonului. Pentru a exprima acest lucru plecăm de la conservarea masei gazelor din cele două camere ale corpului de pompă:

$$m_1 = \rho_1 A(d + x) = \rho_0 A d$$

$$m_2 = \rho_2 A(d - x) = \rho_0 A d$$

de unde:

$$\rho_1 = \frac{\rho_0 d}{d+x} = \rho_0 \left(\frac{1}{1+\frac{x}{d}} \right), \text{ iar } \rho_2 = \rho_0 \left(\frac{1}{1-\frac{x}{d}} \right).$$

Din ecuația termică de stare scrisă sub forma:

$$pV = mRT$$

rezultă
$$p = \frac{m}{V} RT \Leftrightarrow p = \rho RT$$

Procesul termodinamic al gazului din cele două camere fiind unul izentropic (procesul este atât reversibil – lipsit de frecare –, cât și adiabatic (nu se schimbă căldura cu mediul) prin aplicarea ecuației acestuia aerului din cele două camere obținem: $p\rho^{-\gamma} = \text{const.}$

$$\rho_1 p_1^{-\gamma} = C = \rho_0 p_0^{-\gamma} \quad \rho_2 p_2^{-\gamma} = C = \rho_0 p_0^{-\gamma}$$

$$\rho_{1,2}^{\gamma} = \frac{p_{1,2}}{C}$$

Din ecuațiile procesului și considerând $C = \rho_0 p_0^{-\gamma}$

rezultă
$$\rho_1 = \rho_0 \left(\frac{1}{1+\frac{x}{d}} \right)^{\gamma}; \quad \rho_2 = \rho_0 \left(\frac{1}{1-\frac{x}{d}} \right)^{\gamma}$$

ecuația de mișcare se scrie:

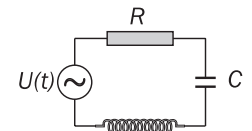
$$m\ddot{x} + A\rho_0 \left[\left(\frac{1}{1-\frac{x}{d}} \right)^{\gamma} - \left(\frac{1}{1+\frac{x}{d}} \right)^{\gamma} \right] = 0.$$

Ecuația de mișcare care modelează sistemul nu depinde explicit de timp (t) și este neliniară – forța de revenire datorată compresiei/expansiunii gazului este neliniară din cauza relației izentropice dintre p și ρ ($\gamma_{\text{aer}} = 1,4$).

4. Modelați matematic un circuit de curent alternativ R, L, C legat la un generator de tensiune $U(t)$.

Rezolvare

În cazul unui circuit RLC legat la un generator de curent alternativ cu tensiunea la borne $U(t)$, aplicând legea a II-a Kirchoff obținem ecuația circuitului



$$U(t) - RI - \frac{q}{C} - LI = 0 \quad (1)$$

sau în funcție de sarcina q :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = U(t). \quad (2)$$

Modelul este linear, neautonom (depinde de timp) și de ordinul doi. Stările sistemului sunt q și \dot{q} . Poate fi făcută o analogie cu oscilatorul mecanic amortizat: $L \Leftrightarrow m$; $R \Leftrightarrow c$ (constanta de vâscozitate); $C = \frac{1}{k}$ (k = constantă elastică), iar $U(t)$ este efectul acțiunii unei forțe externe.

Cum $I = \dot{q}$ relația (2) poate fi scrisă și sub forma

$$L\ddot{I} + RI + \frac{I}{C} = U(t) \quad (3)$$

Relația (3) este de preferat relației (2) deoarece intensitatea I a curentului este mai ușor de măsurat decât sarcina (q).

În cazul în care circuitul nu conține condensator (circuit RL) ecuația (3) devine liniară

$$L\dot{I} + RI = U(t).$$

Rezumat

- Determinismul este conceptul potrivit căruia orice eveniment este rezultatul evenimentelor precedente. Un sistem determinist este un sistem ale cărui stări sunt complet determinate de starea sa inițială și de regula de evoluție.
- Mecanica newtoniană aplicată sistemelor fizice descrie dinamica acestora prin ecuațiile matematice ale principiilor formulate de Newton și condițiile inițiale ale sistemului.

- Sistemele mecanice reale sunt sisteme complexe în care pot interveni un număr apreciabil de forțe care vor determina evoluția sistemului. Studiul unui astfel de sistem se face prin modelare (modelul punctului material; modelul gazului ideal; modelul oscilatorului liniar armonic).
- Forțele care intervin în principiul fundamental pot depinde de coordonatele de poziție, viteze, timp sau de toate aceste variabile (de exemplu: greutatea și forța

elastică depinde de poziție, forța de frecare cu aerul depinde de viteză etc.).

- Forța elastică, departe de echilibru, nu mai depinde liniar de poziție. Ea poate fi descrisă de o serie Taylor

de tipul $F(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(x_j)$ cu $a_j = \frac{1}{j!} \frac{d^j F}{dx^j} \Big|_{x=0}$.

- Modelarea dinamicii sistemelor mecanice permite descrierea comportării acestora prin rezolvarea ecuațiilor diferențiale ale principiului fundamental.



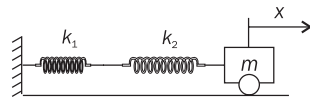
Verificați-vă cunoștințele

1. Forța gravitațională exercitată asupra unui corp de masă m la o altitudine z de suprafața Pământului (se consideră

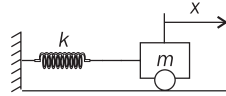
cunoscută raza acestuia $-R$) este: $G = -mg \left(\frac{R}{R+z} \right)^2$.

Dezvoltați în serie Taylor pentru cazul $z \ll R$ și aproximați la o relație de forma $\dot{G} = -mg + \alpha z$. Determinați valoarea constantei α și altitudinea z pentru care G este 98%, respectiv 90%, din valoarea la suprafața Pământului.

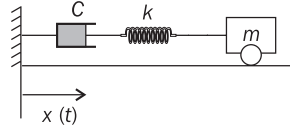
2. Modelați matematic mișcarea unei mase m ce oscilează prin intermediul a doi oscilatori cuplați de constante elastice k_1 și k_2 .



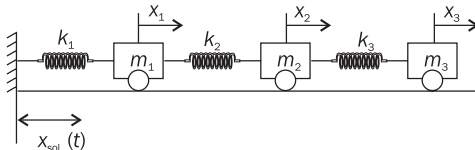
În ce condiții sistemul este echivalent celui în care oscilatorul este format dintr-un singur resort de constantă k ?



3. Modelați matematic mișcarea sistemului din figura alăturată asupra căreia acționează și o forță externă dependentă de timp $F_x(t)$.



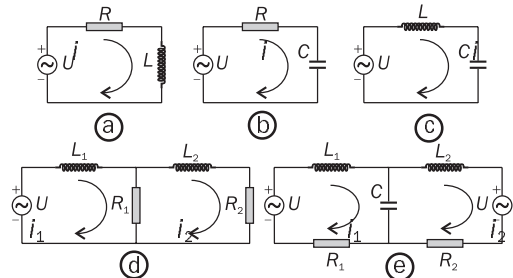
4. În timpul unui cutremur au loc mișcări laterale violente care induc deplasări laterale ale clădirilor ce pot duce la forfecări ale structurilor de rezistență ale acestora. Pentru o clădire cu trei etaje de mase m_1 , m_2 și m_3 reprezentată prin diagrama din figura de mai jos, realizați modelarea matematică a sistemului. Se cunoaște mișcarea solului în funcție de timp $[x_{sol}(t)]$.



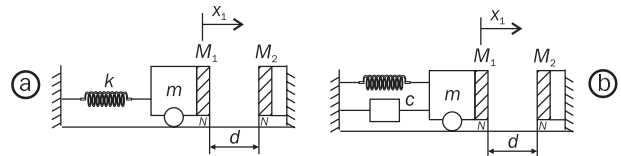
5. Dacă forța de frecare care acționează asupra unui corp aflat în cădere de la mare altitudine, în câmp gravitațional

este proporțională cu pătratul vitezei $\left(F = \frac{1}{2} \rho C S v^2 \right)$, unde ρ este densitatea aerului, S este secțiunea transversală a corpului, iar C o constantă dependentă de forma acestuia, modelați matematic dinamica corpului aflat în cădere. Se dă legea de variație a densității cu înălțimea $\rho = \rho_0 e^{-z/n}$ (n este o constantă).

6. Pentru circuitele electrice de curent alternativ din figurile a-e, determinați modelele matematice ale acestora și propuneți un sistem mecanic oscilant (resort-masă m) echivalent.



7. Pentru sistemele dinamice descrise în imaginile a și b, stabiliți modelele matematice de mișcare. Magneții (M_1) și (M_2) sunt orientați cu polii de același nume unul spre celălalt, iar forța exercitată între ei este invers proporțională cu pătratul distanței care-i separă. În poziția de echilibru a resortului ($x = 0$) distanța dintre magneți este d .



Incertitudini de măsurare

Unul dintre principiile fundamentale ale științelor experimentale este acela că nici o măsurătoare reală nu poate fi infinit de precisă, ci include un anumit grad de incertitudine al măsurării, care ține de limitele de măsură ale instrumentelor folosite. O precizie infinită a unui dispozitiv de măsură trebuie să permită afișarea de către dispozitiv a unui număr infinit de cifre după virgulă. Cum construirea unui astfel de dispozitiv nu este posibilă, va rezulta o anumită imprecizie asupra măsurărilor realizate de instrumentul de măsură. Creșterea acurateței de măsurare determină o scădere a incertitudinii de măsurare până la valori suficient de mici pentru a conveni scopului propus. Ea nu poate fi însă complet eliminată.

Prezența incertitudinii în orice măsurare reală în studiul sistemelor dinamice implică faptul că, în studiul oricărui sistem condițiile inițiale nu pot fi specificate cu infinită exactitate.

Prezența incertitudinii în condițiile inițiale a unui sistem conduce la o incertitudine corespunzătoare a predicției evoluției sistemului respectiv. Se presupune însă că, dacă incertitudinea în condițiile inițiale ar fi de zece ori mai mică, de zece ori mai mică ar fi incertitudinea predicției evoluției sistemului. De aceea s-a considerat, în istoria fizicii, că este posibil să se diminueze incertitudinea predicției prin diminuarea incertitudinii asupra condițiilor inițiale, adică printr-o măsurare mai precisă.

Incetitudinea în mecanica clasică nu provine din cauza unor incertitudini ale ecuațiilor de mișcare, atâta timp cât acestea sunt complet deterministe, ci din imposibilitatea determinării condițiilor inițiale cu infinită acuratețe.

În 1961, un meteorolog Edward Lorenz, utilizând un set de 12 ecuații și datele inițiale, încerca cu ajutorul unui program pe computer să ofere o predicție a

evoluției stării vremii. Într-o zi, vrând să revadă o anumită secvență, pentru a economisi timp, el a rulat programul de la mijlocul secvenței prin introducerea datelor obținute într-o rulare anterioară a programului. Surpriza lui a fost că secvența obținută diferea semnificativ de

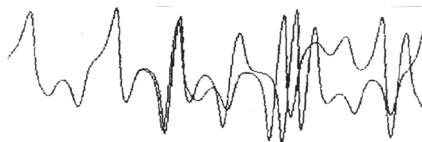


Fig. 1.
Experimentul
lui Lorenz.

Diferența dezvoltării predicției provenea din faptul că, deși computerul stoca în memorie șase zecimale ale valorilor numerice calculate, Lorenz renunșase la ultimele trei dintre acestea.

Cum diferența inițială dintre datele experimentale era doar de 0,0000127, o astfel de variație poate fi considerată, de către experimentator, ca un „zgomot de fond”, sau inacuratețe de măsurare. Fenomenul cunoscut și sub numele de *dependența sensibilă de condiții inițiale* a arătat că mici variații ale datelor experimentale pot duce la variații uriașe în desfășurarea experimentului. Acest efect urma să poarte numele de efectul fluturelui („the butterfly effect”). Numele vine de la faptul că diferența dintre datele inițiale ale curbelor experimentale este atât de mică încât poate fi comparată cu cea produsă în atmosferă de bătaia aripilor unui fluture. Cu toate acestea experimentul arăta că o simplă bătaie de aripi a unui fluture poate determina în atmosferă o evoluție complet diferită față de cazul în care aceasta nu s-ar fi produs. Cum spunea însuși Lorenz, ea poate determina peste o lună o tornadă care altfel nu s-ar fi produs sau una care ar fi putut avea loc poate să nu se mai producă.

Un astfel de comportament este numit de către fizicienii *comportament haotic*.

Laborator**Investigarea experimentală a condițiilor de apariție a comportamentului haotic****Materiale necesare:**

- un pendul gravitațional format dintr-un magnet la capătul unui fir de ață
- 4-6 magneți

- Se așază magneții ca în fig. (2), astfel încât să expună la partea superioară același pol magnetic.

- Se ajustează lungimea pendulului astfel încât acesta să ajungă cât mai aproape posibil de ceilalți trei magneți.

- Se scoate pendulul din poziția de echilibru se marchează această poziție și se lasă pendulul să oscileze. Se urmărește oscilația pendulului.

- Se variază puțin locația unuia dintre magneți și se urmărește ce se întâmplă cu mișcarea pendulului dacă s-a menținut aceeași locație de start a acestuia.

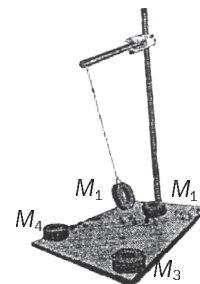


Fig. 2.

Observație: O mică modificare a poziției unuia dintre magneți pentru aceeași poziție de start a pendulului va determina ca pendulul să dezvolte o mișcare total diferită.

Forța gravitațională și forțele de atracție și de respingere dintre magneți vor influența oscilația pendulului a cărui traiectorie va fi foarte complexă. Se observă, după repetarea de câteva ori a experimentului că va fi foarte greu de prezis cum anume va oscila pendulul la o nouă mică modificare a poziției unuia dintre magneții ficși chiar dacă cunoaștem cum va acționa fiecare dintre magneți asupra pendulului. Această mișcare inpredictibilă este numită adesea *mișcare haotică*.

Concluzie. O mică variație a poziției inițiale a sistemului poate determina în timp comportări total diferite ale acestuia.

Comportamentul descris în experimentele anterioare și evidențiat de Lorentz în 1961 a fost descoperit la începutul secolului trecut, când fizicianul francez Henry Poincaré studia ecuațiile care descriau mișcarea planetelor în jurul Soarelui.

Aceste ecuații sunt o aplicare a principiilor lui Newton și de aceea sunt complet deterministe, adică prin cunoașterea legilor de mișcare și a condițiilor inițiale, în acest caz a pozițiilor și vitezelor inițiale, poate fi descrisă mișcarea în orice alt moment. Aceste determinări însă țin de precizia măsurării condițiilor inițiale (poziție și viteză) care nu poate fi făcută cu o infinită acuratețe, chiar utilizând instrumente de măsură perfecte, prin imposibilitatea înregistrării unor date cu o precizie infinită. De aceea se poate spune că totdeauna va exista o imprecizie, oricât de mică în predicțiile realizate asupra comportării unui sistem dinamic.

Până la Poincaré, lipsa unei precizii infinite a predicțiilor astronomice era considerată o problemă minoră, din cauza presupunerii pe care o făceau majoritatea fizicienilor, și anume că micșorarea impreciziei de măsură duce la o micșorare identică a impreciziei predicției. Poincaré a observat însă că anumite sisteme astronomice par a nu se supune acestei reguli privitoare la condițiile inițiale. El a găsit că, dacă regula se aplică sistemelor de două corpuri astronomice, în cazul a trei sau mai

multor corpuri regula nu se mai aplică. Pentru aceste tipuri de sisteme, Poincaré a arătat că o mică imprecizie în determinarea condițiilor inițiale crește în timp, astfel încât două seturi de condiții inițiale cu diferențe practic minore vor duce în timp la predicții finale ce diferă foarte mult. Poincaré a demonstrat matematic că un astfel de comportament se menține chiar dacă incertitudinea în condițiile inițiale este făcută inimaginabil de mică.

Această „sensibilitate extremă în raport cu condițiile inițiale” studiată matematic de Poincaré avea să fie numită **instabilitate dinamică** sau, pe scurt, **haos**.

Poate că diferența între sistemele ordonate și cele haotice este ilustrată mai bine de câteva exemple.

- *Ridicarea fumului dintr-o țigară* – Inițial fumul formează un fir subțire ce se ridică într-o mișcare laminară (mișcare în care linii imaginare de curent sunt paralele), pentru ca apoi ordinea să înceapă să se strice, dispersia fumului devenind o mișcare dezordonată, turbulentă. Această trecere este doar un exemplu al unei tranziții de la un sistem ordonat la unul haotic.

- Curgerea apei dintr-o conductă evidențiază comportări similare.

- Aruncarea unei monezi are un comportament similar. Cele două variabile care caracterizează sistemul sunt înălțimea de aruncare și frecvența de rotație a monezii. Teoretic ar fi posibil de controlat aceste variabile pentru a putea spune pe ce parte va cădea moneda. În practică însă ele sunt de necontrolat astfel încât rezultatul final nu poate fi prevăzut.

În cazul sistemelor discutate anterior comportamentul haotic derivă din existența unor influențe infinitezimale care nu pot fi detectate sau măsurate și care, în timp, duc la variații mari ale sistemului. Deși comportamentul sistemului este determinist, în sensul respectării principiului cauzalității, evoluția sa nu este predictibilă.

Adesea, sisteme cu o evoluție predictibilă pe termen lung, au manifestări haotice pe termen scurt. Un astfel de exemplu este dat în lecția 1.2.1. unde, la începutul acțiunii unei forțe exterioare periodice asupra unui oscilator, pentru întreținerea mișcării oscilatorice, apare o mișcare haotică tranzitorie până la ajustarea frecvenței de oscilație a oscilatorului ca cea a forței exterioare aplicate.



Verificați-vă cunoștințele

1. Ce semnificație au incertitudinile de măsurare și de unde provin?
2. În ce condiții se poate obține valoarea exactă a unei măsurători?
3. Care sunt semnificațiile experimentului lui Lorentz?

4. Ce influență are incertitudinea de măsurare asupra predicției evoluției unui sistem?
5. Descrieți un experiment în care este evidențiat comportamentul haotic al unui sistem.
6. Dați exemple de sisteme cu comportament haotic.

Să considerăm, pentru simplitate, că un sistem dinamic poate fi descris de un model matematic constând într-un set de ecuații diferențiale de ordinul întâi. Fiecare stare a sistemului va fi identificată prin acele mărimi care, specificate la un moment dat, determină în mod unic evoluția sistemului. Expresia matematică a modelului în variabilele de stare este dată de un set de n ecuații, câte una pentru fiecare stare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, \dots, x_n, t) \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, t) \end{cases} \Leftrightarrow \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, t), i = 1, \dots, n \quad (1)$$

În acest sistem, t este variabila independentă, iar cele n stări x_1, \dots, x_n sunt variabile dependente. Notăția funcțională astfel descrisă indică faptul că în general viteza de variație a unei stări va depinde de valorile instantanee ale tuturor stărilor (stările sunt cuplate). Vom presupune că dependența de timp este datorată unui efect extern. În general funcțiile $f(x_1, \dots, x_n)$ pot fi funcții de stare liniare sau neliniare. Pentru rezolvarea sistemului (1) este necesară specificarea condițiilor inițiale, adică a valorilor $x_1(0); x_2(0), \dots, x_n(0)$ ale fiecărei stări la un anumit moment pe care-l vom considera moment inițial al procesului.

Spațiul fazelor

Să presupunem că pentru un anumit set de condiții inițiale sistemul (1) poate fi rezolvat analitic sau numeric pentru a obține un set de soluții $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$.

Aceste soluții dau informații asupra modului în care evoluează fiecare stare a sistemului în raport cu valorile inițiale $x_i(0)$. Soluțiile $x_i(t)$, laolaltă vor constitui răspunsul sistemului.

Comportarea sistemului poate fi observată mai ușor pe cale grafică (fig. 1). Fiecare grafic în acest caz va reprezenta evoluția în timp a unei anumite stări. O reprezentare mai completă va indica simultan toate stările. Spațiul (coordonatele) în care apare o astfel de reprezentare, este cunoscut sub denumirea de „spațiul fazelor”.

Pentru construirea unui sistem cu n stări se definește un spațiu cartezian cu n dimensiuni (fig. 2), fiecare din cele n axe ortogonale măsurând o variabilă de stare diferită a sistemului. Într-o astfel de reprezentare la orice moment t , cele n valori ale variabilelor de stare $x_1(t); \dots, x_n(t)$ vor defini un punct în spațiul fazelor similar modului în care coordonatele carteziane (x, y, z)



Fig. 1.

definesc poziția unui punct material de masă m în mecanica newtoniană.

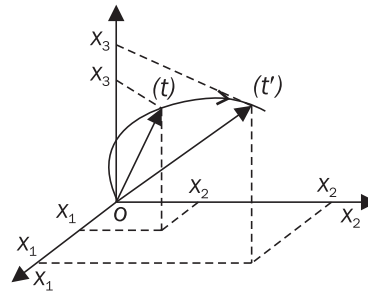


Fig. 2. Variația în timp a vectorului reprezentativ al stării descrie o orbită în spațiul fazelor. În acest caz un spațiu tridimensional maxim posibil de reprezentat grafic.

Sistemul punctual din spațiul fazelor poate fi văzut ca un vector de stare $x(t)$ cu n dimensiuni măsurat de la originea spațiului fazelor $x(0) = [x_1(0), x_2(0) \dots x_n(0)]$.

Un astfel de vector $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ are o variație continuă în spațiul fazelor generând o traiectorie cu originea în punctul inițial $x(0)$. Fiecare punct al acestei curbe va defini o stare a sistemului, la un moment (t_i) dat.

- Avantajul utilizării reprezentării în spațiul fazelor este posibilitatea observării evoluției sistemului pornind de la o stare inițială (condițiile inițiale).
- Dezavantajul îl constituie imposibilitatea practică de a produce reprezentări pentru $n > 3$.

Observație. Spațiul fazelor nu indică momentul (t) asociat unei anumite stări pe orbita de evoluție a sistemului.

În cazul vizualizării evoluției unui sistem în spațiul fazelor se pot alege un număr de puncte, fiecare dintre acestea reprezentând un set de condiții inițiale și se pot urmări orbitele ce rezultă simultan din evoluția sistemului din aceste stări inițiale. La limita în care numărul punctelor inițiale se extinde la întreg spațiul fazelor, colecția de orbite rezultate formează un „curent” al sistemului dinamic. Se poate face o analogie a orbitelor individuale cu liniile de curent ale unui fluid (traiectoriile particulelor individuale ce formează fluidul). O astfel de reprezentare va putea monitoriza comportarea sistemului pentru toate condițiile inițiale posibile.

Orbitele în spațiul fazelor vor fi determinate de funcțiile $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$, funcții care formează un „câmp vectorial”.

Termenul are semnificația faptului că fiecărui punct (x_1, x_2, \dots, x_n) din spațiul fazelor îi este asociat un vector n dimensional (f_1, f_2, \dots, f_n) .

În cazul curgerii unui fluid în spațiul tridimensional în fiecare moment, fiecare particulă (unitate de volum) a fluidului va avea o anumită viteză \vec{v} (fig. 3). Apare în acest fel în fiecare moment un câmp al vitezelor.

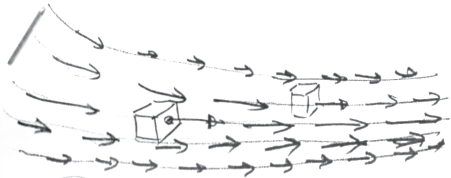


Fig. 3.

Traectoria mișcării particulelor de fluid va fi în orice punct tangentă la vectorul câmpului. În cazul general discutat, traiectoriile vor fi tangente câmpului vectorial (f_1, f_2, \dots, f_n) .

Exemplu

Se consideră sistemul dinamic modelat de ecuațiile:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1^2 \end{cases} \quad (2)$$

Să se construiască câmpul vectorial al sistemului.

Rezolvare

Sistemul este nelinier (datorită lui x_1^2) și autonom (t nu apare în ecuații explicit în variabilele de stare – câmpul vectorial nu depinde de timp): funcțiile $f_1(x_1, x_2)$ și $f_2(x_1, x_2)$ reprezentând sistemul câmpului vectorial sunt:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1, \quad f_2(x_1, x_2) = -x_2 + x_1^2.$$

Pentru $x_1 = 1$ și $x_2 = \frac{1}{3}$ câmpul vectorial este dat în figura 4.

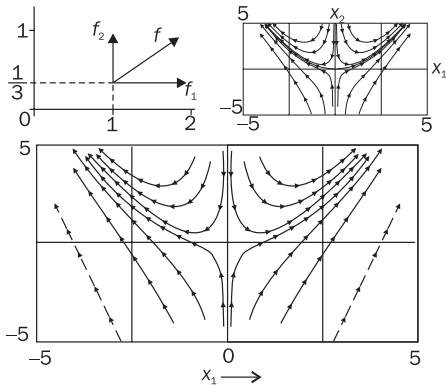


Fig. 4. Construcția câmpului vectorial f a sistemului (2)

în punctul $x = \left(1, \frac{1}{3}\right)$ (a). Câmpul de vectori ai sistemului (2), calculat pentru o mulțime de puncte din spațiul fazelor (b). Orbitele sistemului (2) (c).

Observație: În cazul unui câmp autonom, caracteristic orbitelor de stare este că acestea nu se intersectează.

• În cazul unui câmp vectorial dependent de timp o orbită poate reveni într-un punct de fază vizitat la un moment anterior, dar direcția vectorului f se poate modifica permițând intersectarea orbitelor.

• În cazul unui sistem autonom un punct din spațiul fazelor (x_1, x_2, \dots, x_n) poate fi vizitat numai o singură dată de o anumită orbită. De exemplu, sunt posibile ca orbite curbe închise. Fiecare punct al orbitei va fi vizitat repetat, dar direcția vectorului f va fi aceeași în orice moment în care punctul din spațiul fazelor este vizitat.

Echilibrul unui sistem dinamic

Echilibrul sistemelor newtoniene este realizat când forța totală ce acționează asupra acestora dispare astfel încât sistemul se află în repaus relativ (sau se deplasează rectiliniu uniform) față de un sistem de referință inerțial.

Echilibrul unui sistem dinamic exprimat prin sistemul de ecuații (1) este definit ca ansamblul condițiilor pentru care nici una dintre stările sistemului nu se modifică în timp. ($\dot{x}_i = 0; i = 1, \dots, n$). De aceea, în spațiul fazelor, o soluție de echilibru este reprezentată de orice punct cu proprietatea că o orbită inițiată în acel punct rămâne în acel punct pentru totdeauna.

Configurația de echilibru admisă de un sistem este considerată proprietate de bază a sistemului, independent de orice intrări (efecte externe dependente de timp), impuse asupra sistemului, care pot influența comportamentul acestuia.

O soluție de echilibru a unui sistem dinamic este stabilă dacă orice deplasare inițială în apropierea echilibrului rămâne un timp indefinit în apropierea echilibrului. Dacă, în particular, mișcarea în apropierea poziției de echilibru se apropie asimptotic de echilibru, când $t \rightarrow \infty$, echilibrul se va numi asimptotic stabil (fig. 6).

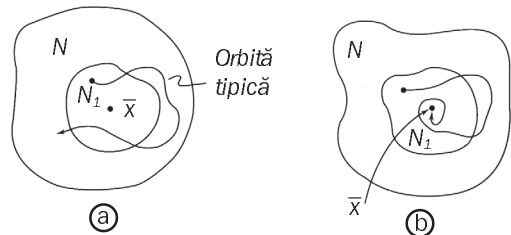


Fig. 6. Echilibru stabil (a), echilibru asimptotic stabil (b).

Stabilitatea echilibrului este foarte importantă în găsirea soluțiilor unui sistem de ecuații diferențiale care modelează un sistem dinamic, soluții cu semnificație fizică deoarece pentru ca o soluție să aibă relevanță fizică, în sistemul modelat ea trebuie să fie asimptotic stabilă.

Exemple

1. În cazul unui oscilator liniar armonic neamortizat descris de ecuația $m\ddot{x} + kx = 0$, singura soluție de echilibru în spațiul fazelor este chiar originea acestuia

$(\bar{x}, \bar{\dot{x}}) = (0, 0)$. Stabilitatea acestei soluții se poate urmări construind orbite în spațiul fazelor.

Rezolvare

Plecăm de la observația că în cazul oscilatorului liniar armonic singura forță care acționează în sistem este conservativă astfel încât energia totală a sistemului este constantă. Alegând $m = k = 1$ în unitățile de măsură potrivite, conservarea energiei mecanice se poate scrie:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2} = E = \text{constant},$$

unde E este definită de poziția inițială (x_0) și viteza inițială (\dot{x}_0), $E = \frac{\dot{x}_0^2}{2} + \frac{x_0^2}{2}$. Reprezentarea grafică este în acest caz un cerc de rază $\sqrt{2E}$ (fig. 7).

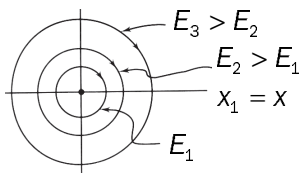


Fig. 7. Orbite în planul fazelor pentru un oscilator neamortizat.

Observații:

- Sensul de parcurgere al orbitelor este cel orar, deoarece când $\dot{x} > 0$, x crește, iar când $\dot{x} < 0$, x scade.
- Toate orbitele sunt curbe închise în spațiul fazelor, ceea ce indică un comportament periodic al acestora.
- Tot din forma curbei se deduce și stabilitatea condiției de echilibru în origine. Dar soluția nu este și asimptotic stabilă – orbitele nu se apropie asimptotic de starea de echilibru.

2. Se consideră o bilă care se poate deplasa fără frecare într-un șanț dublu ca în fig. 8. Construiți în spațiul fazelor orbitele pozițiilor de echilibru.

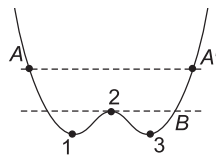


Fig. 8.

Rezolvare

Cele trei soluții de echilibru sunt, potrivit figurii, reprezentate de punctele 1, 2 și 3.

Se observă că pentru poziții în apropiere de echilibru, în cazul pozițiilor de echilibru figurate de punctele 1 și 3 bila va oscila în jurul pozițiilor de echilibru. Orbitele închise sunt reprezentate în fig. 9a.

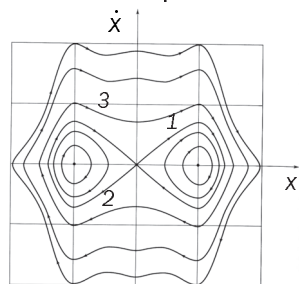


Fig. 9. Traiectoriile în spațiul fazelor al deplasării unei bile într-un șanț dublu.

Dacă mișcarea este inițiată din poziția de echilibru 2 printr-un impuls infinitesimal spre dreapta sau spre stânga, bila se va deplasa în punctul B trecând prin poziția 3, unde energia sa cinetică va fi maximă și înapoi (sau invers). Traectoria este dată de curba 1 din fig. 9.

Dacă mișcarea este inițiată în A, la o altitudine mai mare decât punctul 2, bila nu va atinge în cursul mișcării poziția 2, având o viteză pozitivă continuând apoi mișcarea spre dreapta până în A' și înapoi (orbite 3 – fig. 9).

Din punct de vedere al stabilității celor trei poziții de echilibru, poziția 2 nu este una de echilibru stabil.

În figura 10 sunt prezentate în spațiul fazelor diagrame de stare ale unor sisteme caracterizate de doar două variabile de stare.

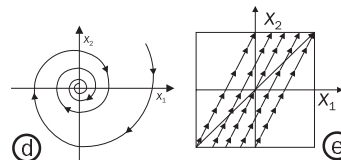
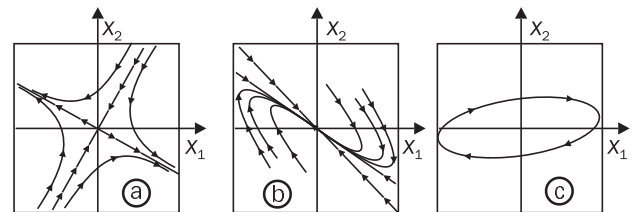


Fig. 10. Diagrame a unor sisteme cu două variabile de stare în spațiul fazelor.

Din diagrame se observă echilibrul sistemului: a) instabil; b) asimptotic stabil; c) stabil; d) asimptotic stabil și e) stabil.

Poziția de echilibru asimptotic stabil pentru care subspațiul stabil este întregul spațiu al fazelor este un exemplu simplu de *atractor*.

Dicționar

Atractor: O regiune din spațiul fazelor unui sistem dinamic în care sistemul intră dar pe care nu-l mai poate părăsi prin mijloace proprii către care tind asimptotic toate orbitele când $t \rightarrow \infty$, și care nu conține o subregiune cu proprietăți similare.

Atractori clasici și atractori stranii

Principala inovație a termodinamicii este ideea că diferite cauze pot conduce la un același efect, starea caracterizată de un maxim de entropie. Această stare de echilibru către care converg toate celelalte stări poate fi privită ca un atractor. Este ca și cum această stare ar atrage stări posibile diferite ale sistemului astfel încât traiectoriile din spațiul fazelor converg. De exemplu, dacă lăsăm să cadă o carte, aceasta se va opri pe podea, indiferent de la înălțimea de la care facem acest lucru (starea inițială), dacă lăsăm liber un pendul, după câteva

oscilații acesta va încetini oprindu-se în poziția de echilibru, indiferent de poziția din care acesta a început să oscileze. Aceste diferențe ale poziției inițiale sunt treptat reduse până dispar complet. Acestea sunt doar două exemple de atractori punctuali (fig. 11a).

Sisteme neliniare. Să presupunem că facem ca un astfel de sistem să devină neliniar, adică adăugăm o forță care să amplifice diferențele. Referitor la exemplul oscilatorului combinația celor două influențe, una care amortizează și alta care amplifică diferențele, produce adesea comportamente foarte complicate. Un exemplu simplu este cel al unei oscilații regulate, întreținută, ca în cazul pendulei unui ceas. Această formă de mișcare este un atractor, deoarece diferitele poziții inițiale ale pendulului converg către aceeași traiectorie periodică. Un astfel de atractor nu este unul punctual ci o curbă închisă, numită atractor 1-dimensional sau „ciclu limită”, deoarece ea reprezintă o traiectorie închisă la care este limitat sistemul (fig. 11b). Un exemplu de atractor periodic este și mișcarea orbitală a unei planete în jurul Soarelui.

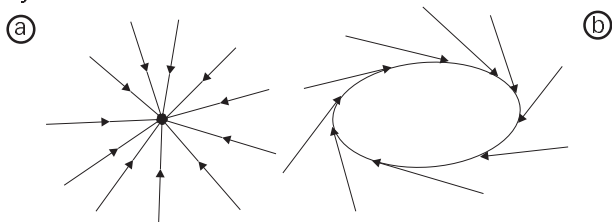


Fig. 11. Atractor zero-dimensional sau punctual: săgețile reprezintă traiectorii care pornesc din puncte diferite, dar converg către aceeași stare de echilibru (a). Atractor 1 – dimensional sau ciclu limită. Săgețile corespund începuturilor traiectoriilor din afara atractorului, dar care sfârșesc în ciclul continuu al atractorului (b).

Când nelinearitățile sistemului devin mari apar atractori de o factură complicată.

Traectoria finală pe care o va urma sistemul poate avea o formă foarte neregulată fără o periodicitate aparentă. Și această traiectorie constituie un atractor, atât timp cât traiectoriile din vecinătate sunt „asirate” de către aceasta. O astfel de regiune poate avea dimensiuni diferite: zero-dimensional – atractorul punctual, unu-dimensional – ciclul limită, dar și dimensiuni ne-întregi dimensiuni fracționale sau, „fractale”. Acești din urmă atractori poartă numele de *atractori stranii*. Traiectoriile în interiorul unui atractor straniu sunt total haotice.

O altă caracteristică a sistemelor ne-lineare este că pot conține mai mult de un singur atractor. Pentru sistemele pentru care există mai mult de un singur atractor se pune întrebarea care va fi atractorul către care se va deplasa sistemul? Să ne imaginăm că un

atractor va corespunde unei mări, iar traiectoriile care duc către acel atractor corespund fluviilor, râurilor, pâraurilor care formează *bazinul* său hidrografic. Dependent de localizarea precipitațiilor una sau alta dintre sursele de alimentare cu apă ale bazinului va fi preponderentă. Similar exemplului expus, fiecare atractor are un **bazin**, care reprezintă zona înconjurătoare din spațiul fazelor în care se găsesc originile traiectoriilor ce se finalizează în atractor. Bazinele, corespunzând unor atractori diferiți, sunt separate de o zonă tampon, îngustă și foarte neregulată (bifurcație). Pentru traiectorii cu originea în această zonă este dificil de determinat cărui atractor îi poate aparține. În acest caz orice mică fluctuație poate trimite sistemul către unul sau altul dintre atractori (fig. 12). O astfel de zonă tampon dintre doi atractori poartă numele de bifurcație. În apropierea zonei tampon sistemul manifestă un comportament haotic dar în interiorul bazinului mișcarea acestuia este predictibilă spre atractor.

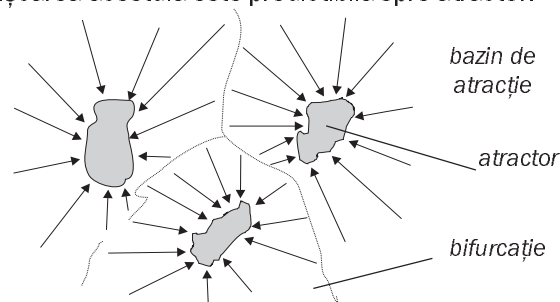


Fig. 12. Atractori cu bazinele lor și bifurcațiile ce limitează bazinele.

Situații ale creșterii numărului de atractori pot apare ca urmare a unei creșteri a energiei sistemului. Aceasta se explică prin posibilitatea amplificării micilor diferențe odată cu creșterea energiei sistemului, ceea ce va crea premisa unor comportări dinamice mai variate determinate de creșteri ale micilor diferențe. Dacă plecăm de la un sistem care inițial prezintă un singur atractor prin creșterea energiei se poate obține o bifurcație, iar atractorul va da naștere la doi atractori, sistemul putând produce pentru variații mici inițiale comportamente diferite. Un exemplu de astfel de sistem este apa care curge de la robinet. Dacă debitul (debit volumic/masic = volumul/masa de fluid scurs în unitatea de timp) este foarte mic sistemul va avea o singură comportare posibilă și anume curgerea apei picătură cu picătură, de o manieră regulată și periodică. Când se deschide mai mult robinetul frecvența picăturilor crește până la un moment dat în care apa se prelinge sub forma unui firicel continuu. La limita dintre cele două curgeri, putem avea uneori unul sau altul dintre comportamente, variație produsă doar de o ușoară

modificare a presiunii fluidului. Dacă energia cedată sistemului crește pot apare noi și noi bifurcații ce vor face diferența între noii atractori formați. La un moment dat numărul de atractori poate deveni infinit sistemul modificându-se de la unul la altul. Acesta este haosul adevărat, în care comportamentul sistemului este total impredictibil. Revenind la exemplul anterior privind curgerea apei este ceea ce se întâmplă în cazul în care deschidem la maxim robinetul iar apa va avea o curgere turbulentă.

Sisteme departe de echilibru

Fenomene ce pot fi descrise de modele matematice date de ecuații diferențiale neliniare sunt frecvent întâlnite în tehnică, fizică sau biologie. În sistemele mecanice sunt întâlnite două tipuri de neliniarități: cele datorate geometriei mișcării – ca de pildă, mișcarea unui pendul, și cele datorate dependenței neliniare, a forței de poziție sau viteză – cazul căderii libere sau frecării solid-fluid.

Sistemele neliniare au comportări surprinzătoare, neîntâlnite în sistemele liniare. Pentru studiul unor astfel de comportări ne vom limita la exemple de oscilatori neliniari, cu un singur grad de libertate (lecția 4.1 fig. 2), în care vom porni de la ipoteza că forța elastică și cea de frecare sunt funcții neliniare de poziție (x) și viteză (\dot{x}).

Efectele neliniare ale evoluției unui sistem au loc dacă mișcarea în spațiul fazelor este suficient de departe de echilibru. Acest fapt poate avea loc:

- prin intermediul condițiilor inițiale care inițiază mișcarea departe de echilibru;
- printr-o forță de excitație externă care poartă sistemul suficient de departe de o poziție de echilibru pentru a determina producerea efectelor neliniare;
- prin inițierea mișcării în apropierea unei poziții de echilibru instabil, instabilitate care deplasează sistemul departe de echilibru.

O idee centrală în dinamica sistemelor neliniare este cea de atractor (set de puncte în spațiul fazelor) către care tind asimptotic toate orbitele din bazinul de atracție când $t \rightarrow \infty$.

S-a văzut anterior că:

- pentru un sistem liniar autonom (independent de timp), singurul tip de atractor ce poate exista este un punct de echilibru asimptotic stabil;
- pentru un sistem armonic oscilant cu oscilații forțate, soluția stării staționare va defini un atractor periodic, întregul spațiu al fazelor constituind bazinul de atracție. Atractorii periodici sunt totdeauna curbe închise în spațiul fazelor, dar nu orice curbă închisă este un atractor. O soluție periodică este un atractor doar dacă este asimptotic stabilă. Astfel de atractori periodici apar

de obicei în sisteme care prezintă mecanisme de stabilitate competitive:

- un mecanism liniar destabilizator care controlează mișcarea în apropiere de echilibru;
- un altul neliniar de amortizare care devine important departe de echilibru și limitează mișcarea;
- un fenomen care nu poate avea loc într-un sistem liniar este posibilitatea coexistenței unui număr mai mare de atractori fiecare dintre ei cu propriul bazin de atracție. În acest caz, atractorul către care tinde o anumită orbită din spațiul fazelor va depinde de locul unde este inițiată orbita respectivă. Mai mult bazinele de atracție ale unor atractori multipli sunt separate de „granițele bazinului” care în general sunt determinate de soluțiile instabile.

Să urmărim prin câteva exemple efecte ale neliniarităților asupra comportării unui oscilator neliniar.

Exemple

1. Amortizarea liniară și neliniară

Să considerăm un oscilator liniar amortizat de tipul celui al cărui grafic spațiu-timp este prezentat în fig. 13a și a cărui ecuație este de forma: $\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ (unde masa m și constanta elastică k a oscilatorului se aleg, pentru simplitate, unitare).

În spațiul fazelor deplasarea unui astfel de oscilator conduce la o spirală care va orbita strângându-se în jurul poziției de echilibru din origine (fig. 13b).

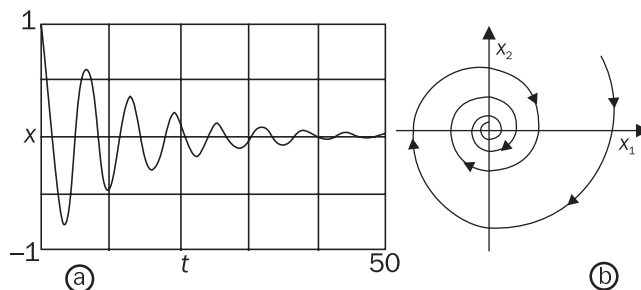


Fig. 13. Graficul poziție timp al unui oscilator amortizat cu constanta de amortizare $c = 0,16$ și condițiile inițiale $x(0) = 1$ și $\dot{x}(0) = 0$ (a). Orbita în spațiul fazelor a oscilatorului (b).

În cazul unui oscilator neliniar, pentru o aceeași valoare c a constantei de amortizare știm că apariția unui fenomen de tipul $c\dot{x}$ va cauza descreșterea exponențială a unei oscilații de tipul $\ddot{x} + \omega^2x = 0$. Deoarece amortizarea neliniară determină disiparea continuă a energiei este de așteptat ca orbita din graficul fazelor să fie tot o spirală care se va strânge în origine, diferența față de cazul anterior provenind din faptul că, în timp

ce în cazul amortizării liniare forța de amortizare e proporțională cu viteza (\dot{x}), în cea neliniară ea poate fi proporțională cu pătratul vitezei (\dot{x}^2). În acest caz deși ne așteptăm să observăm o scădere a amplitudinii oscilațiilor, aceasta nu va mai fi exponențială ci:

- mult mai rapidă decât în cazul oscilatorului liniar departe de echilibru ($(x_0^2 + \dot{x}_0^2)^{1/2} \gg 1$, când \dot{x} este, în medie, mai mare decât unitatea și
- mult mai slabă dacă este inițiată aproape de echilibru ($(x_0^2 + \dot{x}_0^2)^{1/2} \ll 1$, când \dot{x} este, în medie, mai mică decât unitatea (fig. 14).

În grafic se observă scăderea inițială rapidă a amplitudinii oscilatorului, departe de echilibru și scăderea mult mai slabă în apropierea echilibrului, mai slabă decât în cazul oscilatorului liniar amortizat.

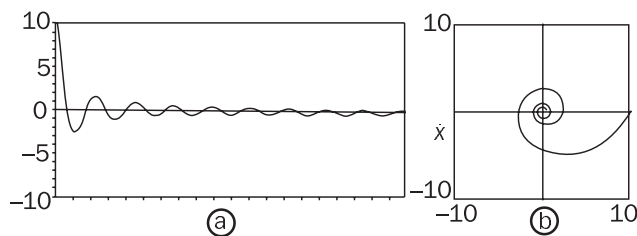


Fig. 14. Graficul spațiu-timp al oscilatorului amortizat neliniar cu coeficientul de amortizare $c = 0,16$ și condiții inițiale $x(0) = 10$ și $\dot{x}(0) = 0$ (a) și orbita în spațiul fazelor (b).

În cazul oscilatorului liniar și a celui neliniar apar diferențe semnificative de tip cantitativ, în ceea ce privește răspunsul acestora la o excitație externă.

Concluzii:

- Sistemele sunt similare din punctul de vedere al faptului că prezintă o singură stare de echilibru, asimptotic stabilă, în originea spațiului fazelor, iar orbitele acestora sunt spirale ce se strâng în jurul poziției de echilibru în orice regiune din spațiul fazelor.
- Observarea amortizării oscilației este și un criteriu prin care se poate stabili dacă oscilatorul este sau nu liniar. În primul caz amortizarea este una exponențială, în cel de-al doilea caz nu.

2. Oscilator neliniar amortizat ce evidențiază fenomene ce nu au loc în sistemele liniare autonome.

Să considerăm un oscilator modelat matematic de o ecuație de forma $\ddot{x} - c\dot{x}[1 - (x^2 + \dot{x}^2)] + x = 0$; $c > 0$ (1), în care $m = k = 1$.

În cazul acestui sistem, apar două forțe de amortizare: una liniară $F_1 = c\dot{x}$ și alta neliniară $F_2 = -c\dot{x}(x^2 + \dot{x}^2)$.

Influența lui F_1 este aceea de a adăuga energie în sistem ceea ce face ca în spațiul fazelor orbitele inițiate

în apropierea poziției de echilibru să fie spiralete spre exterior, sistemul tinzând să se deplaseze departe de echilibru.

Din contră, cea de-a doua forță F_2 , va determina disiparea energiei. Mai mult, în apropiere de echilibru, unde x și \dot{x} sunt mici și subunitare, rata de disipare a energiei prin intermediul lui F_2 este mai mică decât adăugarea de energie pe baza componentei liniare F_1 . Departe de echilibru însă ponderea forțelor se schimbă astfel încât sistemul disipă mai multă energie decât primește.

În acest fel sunt prezente două mecanisme – efectul destabilizant al lui F_1 , dominant în apropiere de echilibru și cel stabilizator al forței neliniare F_2 dominant departe de echilibru. Ne așteptăm, în acest caz, ca în spațiul fazelor undeva în regiunea intermediară, cele două mecanisme să se echilibreze în medie rezultând o orbită strânsă (fig. 15).

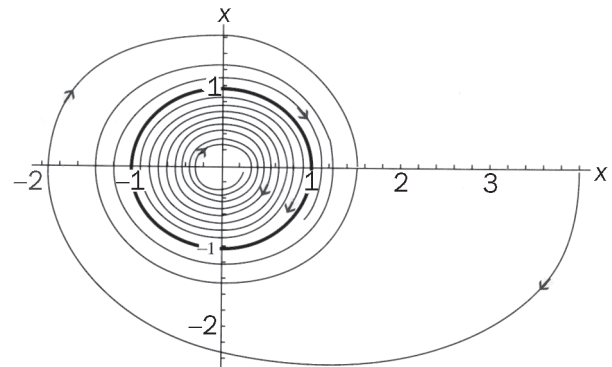


Fig. 15. Orbita în planul fazelor indicând apropierea asimptotică de cercul limită (cercul continuu).

Pe această orbită energia adusă sistemului de forța F_1 este echilibrată de cea disipată de F_2 , iar oscilația va fi întreținută. Orbita închisă obținută în acest caz formează „ciclul limită”. O astfel de comportare nu poate apărea într-un sistem autonom liniar. Ciclul limită este important, pentru că, fiind un atractor el reprezintă o stare stabilă, pe termen lung, a sistemului.

Concluzie: Pentru apariția unui atractor de tip ciclu limită trebuie să coexiste două mecanisme în sistemul oscilator mecanic, unul care să furnizeze energie sistemului și să-l îndepărteze de echilibru și cel de-al doilea cu efect stabilizator. Mai mult, ciclul limită trebuie să fie un atractor, adică soluțiile periodice să fie asimptotic stabile.

3. În cazul schimbării în ecuația (1) a semnului termenului de amortizare, rezultă ecuația:

$$\ddot{x} + c\dot{x}[(1 - (x^2 + \dot{x}^2))] + x = 0 \quad (x > 0) \quad (2)$$

Termenul liniar $c\dot{x}$ este disipativ, iar cel neliniar $-c\dot{x}(x^2 + \dot{x}^2)$ va adăuga energie sistemului. Originea spațiului fazelor este acum asimptotic stabilă, orbitele inițiate în apropiere de echilibru se vor apropia asimptotic de origine (fig. 16).

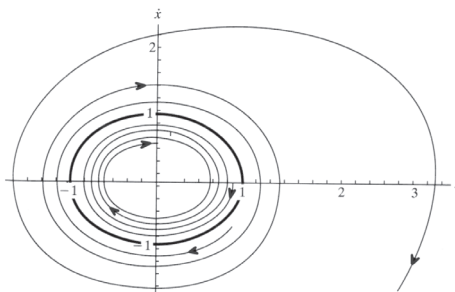


Fig. 16.

Acest comportament este adevărat pentru orice orbită inițiată în interiorul ciclului limită. Orbitele inițiate în afara ciclului limită se vor depărta de originea spațiului fazelor pe o orbită spirală. Ciclul limită în acest caz este instabil.

4. Oscilatorul neliniar cu oscilații forțate. Fie oscilatorul descris de ecuația:

$\ddot{x} + 2c\dot{x} + x + \alpha x^3 = p \cos(\Omega t)$, termenul $p \cos(\Omega t)$ reprezintă forța externă (excitatoare) care va furniza energie oscilatorului.

Răspunsul neliniar al unui astfel de oscilator poate fi observat în reprezentările din fig. 17 în care, oscilațiilor a căror diagrame spațiu-timp sunt figurate în a și b, corespund diagramele orbitelor din spațiul fazelor c și d.

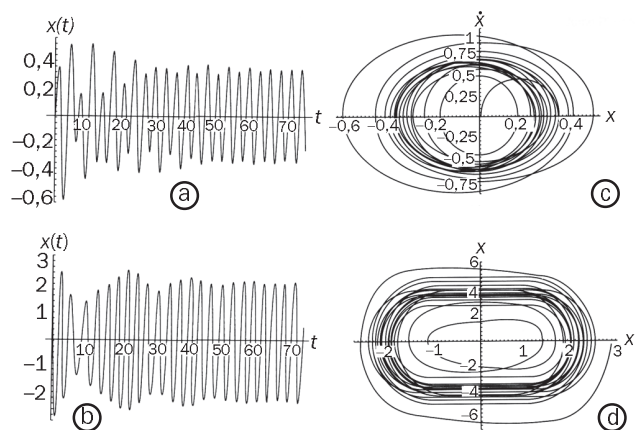


Fig. 17. Soluțiile numerice ale ecuației

$\ddot{x} + 2c\dot{x} + x + \alpha x^3 = p \cos \Omega t$, pentru cazul $p = \alpha = 1$; $c = 0,05$ și $\Omega = 2$ cu condițiile inițiale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ (a) și respectiv $x(0) = 3$ și $\dot{x}(0) = 0$ (b) și orbitele în spațiul fazelor (c) și (d).

Se observă că, dacă primul caz (a) conduce la un atractor cu amplitudine mică în cel de-al doilea (b),

amplitudinea atractorului este mai mare. În ambele cazuri însă răspunsul la excitației are aceeași perioadă, egală cu perioada excitației.

Un fenomen interesant pentru oscilatorul descris de ecuația $\ddot{x} + 0,1\dot{x} + x^3 = \cos \Omega t$ poate fi pus în evidență prin rezolvarea numerică pentru diferite valori Ω ale frecvenței forței de excitație. Potrivit graficului de variație a amplitudinii oscilației în funcție de frecvență (fig. 18) pentru valori $\Omega > \Omega_A$ pentru care se atinge maximum amplitudinii oscilației, după o comportare tranzitorie (curbă punctată) are loc un salt pe ramura inferioară a curbei. Fenomenul este cunoscut drept *salt* și poate avea efecte dramatice în sistemele mecanice.

Fenomenul are loc și în situația descreșterii Ω sub valoarea Ω_B (fig. 18b), când se produce un salt de pe ramura inferioară pe cea superioară a curbei reprezentative amplitudine-frecvență.

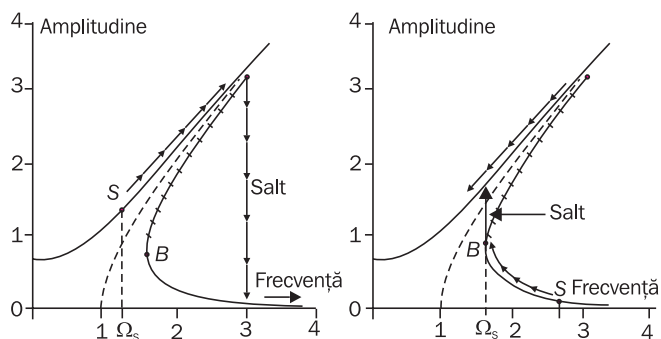


Fig. 18. Fenomenul de salt produs când Ω crește ușor față de o valoare Ω (a) sau când Ω descrește ușor de la o valoare $\Omega_s > \Omega_b$ (b).

Fenomenele descrise sunt rezultatul direct al dependenței neliniare a frecvenței oscilațiilor libere (ω) de amplitudine. Frecvența răspunsului $a(\Omega)$ va urma îndeaproape dependența $\omega(a)$ a oscilațiilor libere (curba întreruptă).

Din studiul unui astfel de oscilator se constată că prima rezonanță fundamentală are loc atunci când frecvența excitatorului Ω este apropiată de cea a oscilațiilor libere ω ale oscilatorului.

Din punct de vedere calitativ trăsătura caracteristică a acestei rezonanțe este existența atractorilor periodici multipli și a fenomenului de salt. Dar această rezonanță primară nu este singurul efect important al neliniarității. Sunt posibile și alte rezonanțe neliniare. Se pot obține astfel super sau subarmonice de rezonanță pentru valori ale frecvenței excitatorului de câteva ori mai mici (3, 5, 7, 9, ...) sau mai mari ale frecvenței naturale de oscilație.

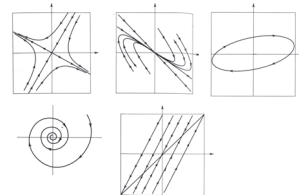
Rezumat

- Orice măsurare în științele experimentale include o anumită incertitudine (imprecizie) de măsurare. Aceasta determină la rândul ei o incertitudine a condițiilor inițiale.
- Sistemele în care o variație minoră a condițiilor inițiale determină modificări pe termen lung majore ale dinamicii sistemului poartă numele de *sisteme haotice*.
- Formulată de Poincaré la 1900, sensibilitatea unor sisteme la condițiile inițiale a fost redescoperită de meteorologul Edwin Lorentz, care testa un model pe computer de prezicere a stării vremii. El a constatat că o mică variație a datelor inițiale este capabilă să evolueze exponențial creând comportamente impredictibile ale sistemului.
- Pentru ca un sistem dinamic descris de un model matematic constând dintr-un sistem de ecuații diferențiale de ordinul 1: $\ddot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, t)$; $i = 1, \dots, n$ (1), să fie rezolvabil trebuie specificate condițiilor inițiale: $x_i(0)$; $i = 1, n$. Soluțiile acestui sistem dau informații asupra evoluției în timp a stărilor sistemului.
- Reprezentarea evoluției sistemului dinamic se poate realiza în „spațiul fazelor” pe ale cărui axe carteziene sunt reprezentate variabilele de stare. În fiecare moment t , cele n valori ale variabilelor de stare $x_i(t)$,



$i = 1, \dots, n$ vor defini un punct în spațiul fazelor reprezentând o stare a sistemului.

- Totalitatea punctelor descrise de dinamica sistemului determină o orbită.
- Pentru condiții inițiale diferite vor rezulta orbite care vor descrie întreaga comportare a sistemului. Acestea pot avea puncte de intersecție (sistemul este dependent de timp) sau nu (sistem autonom – independent de timp).
- Echilibrul unui sistem dinamic poate fi instabil, stabil sau asimptotic stabil.
- Atractorul este o regiune din spațiul fazelor unui sistem dinamic în care sistemul intră, dar pe care nu-l mai poate părăsi prin mijloace proprii către care tind asimptotic toate orbitele când $t \rightarrow \infty$ și care nu conține o subregiune cu proprietăți similare.
- Atractorii pot fi punctuali, liniari, dar și cu dimensiuni fracționale (fractale) – atractori strani.
- Traiectoriile într-un atractor straniu sunt total haotice.
- Sistemele dinamice neliniare pot conține mai mulți atractori.



Verificați-vă cunoștințele

1. Completați textul lacunar:

O regiune din unui sistem dinamic în care intră, dar pe care nu-l mai poate părăsi prin, către care tind toate orbitele când și care nu conține o cu proprietăți similare reprezintă un

O caracteristică a sistemelor este că pot conține mai mult de un singur atractor.

Fiecare atractor care caracterizează un sistem are un, care reprezintă zona din în care se găsesc traiectoriilor ce se finalizează în atractor.

....., corespunzând unor atractori diferiți, sunt separate de o zonă, îngustă și foarte neregulată numită

În apropierea zonei sistemul manifestă un comportament, dar în interiorul

..... mișcarea acestuia este spre atractor.

2. Sistemele dinamice pot fi descrise prin modele matematice de ecuații diferențiale. Descrieți elementele unui astfel de model și utilizarea acestuia.

3. Răspundeți la următoarele întrebări:

a) Ce este spațiul fazelor?

b) Ce sunt variabilele de stare din spațiul fazelor și cum se reprezintă?

c) Indică spațiul fazelor momentul (t) asociat unei stări?

d) Ce formează în spațiul fazelor funcțiile $f_1(x_1, \dots, x_n, t)$... $f_n(x_1, \dots, x_n, t)$? Dați un exemplu.

e) Cum caracterizați în spațiul fazelor echilibrul unui sistem dinamic? Ce puteți spune de stabilitatea echilibrului unui sistem dinamic? Exemplificați.

4. Identificați exemple de sisteme dinamice departe de echilibru. Prin ce se caracterizează un astfel de sistem?

Oscilatorii liberi neliniari, studiați în lecția anterioară, sunt caracterizați de amortizare liniară sau neliniară și de excitație armonică. Până prin anii '70 ai secolului trecut viziunea asupra dinamicii acestora era aceea că astfel de oscilatori evidențiază întotdeauna un răspuns periodic. Mai târziu au fost descoperite stări staționare care nu numai că erau aperiodice, dar prezentau și alte caracteristici neobișnuite care le distinge răspunsul de unul periodic obișnuit. S-a spus că acești oscilatori prezentau un comportament haotic.

Să considerăm un oscilator neliniar a cărui ecuație este de tipul

$$\ddot{x} + 2c\dot{x} + \alpha x^3 = p \cos \Omega t \quad (1)$$

Am văzut în lecția anterioară, pentru un oscilator similar, că, pentru anumite valori ale constantelor ($p = \alpha = 1, c = 0,05, \Omega = 2$) răspunsul obținut este periodic. Pentru alte valori, același oscilator va răspunde neperiodic evidențiind unele caracteristici neobișnuite. Același fenomen se produce și în cazul oscilatorului modelat matematic de relația (1).

Un răspuns haotic tipic poate fi modelat dacă se aleg pentru parametrii ecuației sistemului mecanic valorile: $p = 1, \Omega = 0,44964, c = 0,02248$ și $\alpha = 1$. Simularea pe computer a dinamicii sistemului conduce la stabilirea unei dependențe a amplitudinii în funcție de frecvența Ω de tipul celei din fig. 1a, și o diagramă în spațiul fazelor de forma celei din fig. 1b. Diagrama fazelor cuprinde aproximativ intervalul de timp al primelor trei perioade de excitație.

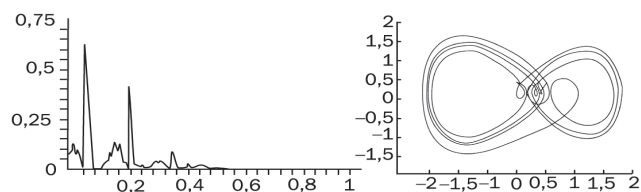


Fig. 1

Potrivit figurii 1, răspunsul sistemului este aperiodic, fără a se repeta niciodată chiar dacă excitația aplicată este periodică. Chiar și o imagine de lungă durată a spațiului fazelor care descrie dinamica sistemului mecanic nu va evidenția mare lucru din proprietățile oscilatorului. Pentru descoperirea unor astfel de proprietăți să vizualizăm răspunsul sistemului într-o altă formă. Pentru aceasta:

a) trebuie lăsat sistemul să evolueze un interval de timp suficient de lung astfel încât orice mișcare tranzitorie să dispară;

b) se alege arbitrar un moment t_0 în care se

înregistrează punctul $\varphi[(x(t_0), \dot{x}(t_0))]$ în spațiul fazelor;

c) se așteaptă până când excitația realizează un ciclu complet, iar la $t = t_1 = t_0 + \frac{2\pi}{\Omega}$ s se înregistrează un nou punct $[(x(t_1), \dot{x}(t_1))]$, procesul continuând la intervale de timp egale $\Delta t = \frac{2\pi}{\Omega}$ până când se înregistrează un mare număr de puncte.

Acest sistem de înregistrare conduce la construirea în spațiul fazelor unei așa-numite „hartă Poincaré”.

Să ne imaginăm înainte de a vizualiza harta Poincaré pentru exemplul sistemului mecanic dat, cum ar trebui să arate o hartă Poincaré în diferite condiții de operare.

- În cazul unui răspuns periodic, cu aceeași perioadă ca a excitatorului, punctul (x, \dot{x}) ar trebui să se repete la infinit, deci harta ar fi formată dintr-un singur punct.

- În cazul unui răspuns periodic a cărui perioadă ar fi, să zicem de n ori cea de excitație, harta Poincaré ar fi formată din n puncte repetate la nesfârșit în aceeași ordine.

- Dacă răspunsul este aperiodic, atunci toate punctele obținute ar fi diferite și nici un punct nu s-ar repeta.

- Dacă răspunsul este unul pur întâmplător, harta Poincaré ar apărea ca un nor de puncte fără o structură distinctă, iar densitatea acestor puncte ar varia ușor potrivit unui anumit tip de distribuție de probabilitate.

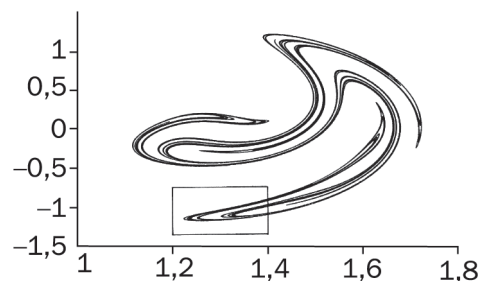


Fig. 2. Hartă Poincaré a răspunsului sistemului din figura 1. Harta a fost realizată după un timp suficient de mare ($t \sim 20.000$ s) necesar eliminării stărilor tranzitorii).

În cazul hărții Poincaré a sistemului din fig. 1 (fig. 2) se observă că unele regiuni din spațiul fazelor sunt inaccesibile sistemului în timp ce, în cele accesibile se formează o anumită structură ce constituie un atractor straniu.

Studiul atractorilor stranii se face astăzi în multe cazuri pe baza hărților Poincaré. Acestea înregistrează succesiv valorile x și \dot{x} de forma $(x_0, \dot{x}_0); (x_1, \dot{x}_1) \dots; (x_n, \dot{x}_n)$.

Construcția acestor puncte se datorează existenței a două funcții f_1, f_2 care iau un anumit punct Poincare (x_n, \dot{x}_n) și generează, prin aplicarea funcției, punctul imediat următor

$$x_{n+1} = f_1(x_n; \dot{x}_n) \quad \dot{x}_{n+1} = f_2(x_n; \dot{x}_n) \quad (2)$$

Ecuatiile (2) sunt un exemplu de sistem dinamic discret (rezultatul este un set de puncte și nu o linie continuă în spațiul fazelor).

Observații:

1. Sistemul a cărui dinamică este descrisă de ecuația (1) este neautonom, spațiul fazelor este tridimensional. Cea de-a treia dimensiune este t sau faza Ωt a excitației, care constituie variabilă de fază. În harta Poincare este redusă o dimensiune a spațiului, harta apărând ca o proiecție a sistemului tridimensional, dinamic continuu într-un plan, discret dinamic.

2. Forma ecuațiilor f_1 și f_2 care construiește punctele hărții Poincare nu sunt date de ecuațiile diferențiale originale ale mișcării.

Una dintre cele mai importante caracteristici ale atractorilor strani este *sensibilitatea în raport cu condițiile inițiale*. Prin aceasta se înțelege că sistemul, pornind de la condiții inițiale apropiate determină în timp, în spațiul fazelor orbite divergente exponențial una în raport cu alta.

Să presupunem că în figura 2 alegem două puncte foarte apropiate și urmărim apoi modul în care evoluează sistemul pentru fiecare din condițiile inițiale alese.

Dacă de pildă cele două seturi de condiții inițiale utilizate pentru a genera aceste rezultate sunt:

1. $x = 1,712904, \dot{x} = 0,22488$ și respectiv

2. $x = 1,712850, \dot{x} = 0,22488$, deci distanța inițială dintre puncte este $d = 0,000059$ observăm că, dacă inițial orbitele sunt apropiate, în scurt timp apare o divergență rapidă a acestora (fig. 3).

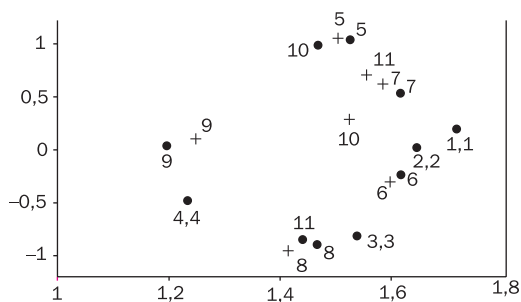


Fig. 3. Comparație între hărțile Poincare obținute pentru două seturi de condiții inițiale foarte apropiate. Se observă divergența orbitelor începând cu cea de-a cincea iterație.

Importanța practică a acestei proprietăți este aceea a imposibilității predicției comportamentului pe termen lung al sistemului deoarece nu putem stabili cu exactitate condițiile inițiale. Se poate identifica structura generală a atractorului haotic, dar nu se poate stabili orbita sistemului pe termen lung. Sistemul descris este însă unul determinist.

Deci, imprecizia în detalierea unei mișcări haotice este o combinație între:

- dependența sensibilă de datele inițiale și
- inabilitatea instrumentelor noastre de a determina exact aceste condiții.

O proprietate interesantă a atractorilor strani este legată de structura acestora, de modul în care aceștia apar la scară din ce în ce mai mică. Să considerăm atractorul din figura 1a. Mărirea unei porțiuni a acestuia (fig. 3b) va evidenția o structură repetitivă la scară mai mică. Aceasta este o structură fractală (fig. 4).

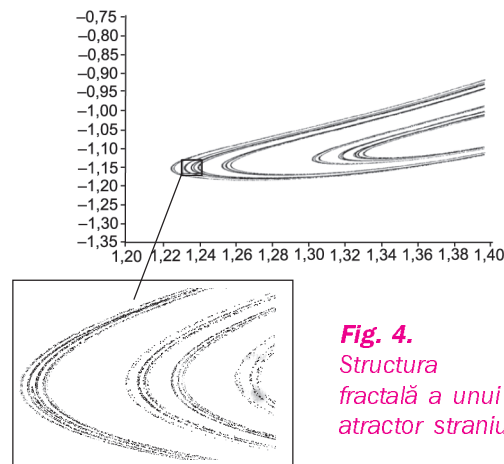


Fig. 4. Structura fractală a unui atractor straniu.

Structura fractală a atractorilor strani indică un grad ridicat de organizare într-o structură aparent haotică.

Structura fractală este observată atât în natură cât și în procese fizice. Exemplele pot include ramurile unui copac, sistemul arterial, o frunză etc. (fig. 5).

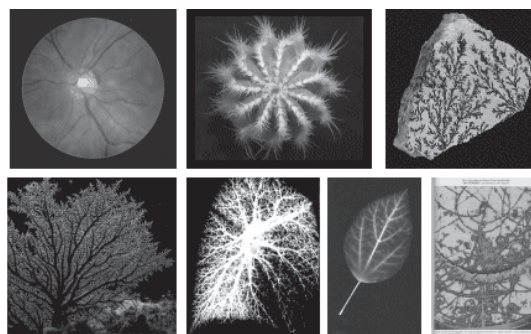


Fig. 5. Structuri fractale în natură: ochi, cactus, dendrite, coroană de copac, plămân, frunză, particule din nucleu (vezi coperta IV).

Atractorii strani sunt comuni în natură și au fost identificați în aproape toate domeniile științei și tehnicii. Practic, un fenomen dinamic din natură se manifestă ca o mișcare haotică, iar predicțiile pe termen lung ale detaliilor comportamentului sistemului sunt imposibile din cauza sensibilității la condițiile inițiale dar și a inabilității noastre de determinare precisă a stării inițiale a sistemului. Vremea, de pildă, poate intra într-o astfel de categorie.

Istoria fractalilor nu este lungă. A început în 1975, cu lucrarea matematicianului Benoit Mandelbrot, „O teorie a seriilor fractale”. Matematicienii ca Waclaw Sierpinski, David Hilbert, George Cantor și Helge von Koch au creat primii fractali (fig.1), în general ca exerciții abstracte, neavând nici o idee asupra semnificației lor. Ei dădeau peste forme bizare care intrau în contradicție cu viziunea lor despre spațiu, suprafață, distanță și dimensiune.

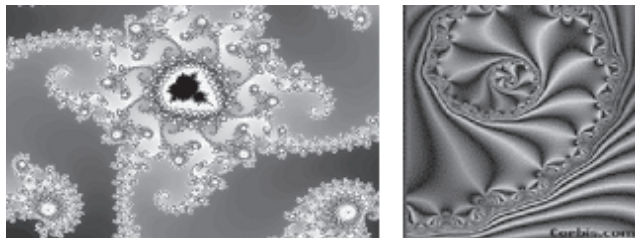


Fig. 1. Forme fractale (vezi coperta IV).

În 1982, Mandelbrot și-a extins două eseuri anterioare, creând lucrarea „Geometria fractală a naturii”. El a inventat cuvântul „fractal” din latinescul „frangere” care înseamnă „a sparge în fragmente neregulate”, astfel încât curioasele forme au putut fi unificate sub un singur nume. Prin anii 1980, grafica pe calculator a progresat într-atât încât forme precum „Curba lui Von Koch” (fig. 2) și „Triunghiul lui Sierpinski” (fig. 3) puteau fi reprezentate cu detalii explicite.

Aplicații pentru fractali

Una dintre primele aplicații majore a fost posibilitatea comprimării imaginii, prin transformarea acesteia în fractali. Astfel s-au putut obține raporturi de comprimare de peste zece mii la unu. Aceasta a și permis transmiterea în timp real a imaginilor video în mișcare prin liniile telefonice normale.

Imaginile reprezintă procese care sunt idealizări simplificate ale realității. Principiul părții asemănătoare cu întregul (principiul auto-asemănării) este cuprins și realizat aproximativ în natură: în liniile de coastă, albiile fluviilor, coroana copacilor, în curgerea tumultuoasă a lichidelor și în organizarea ierarhică a sistemelor vii. Procesele care produc astfel de structuri sunt „processe cu feed-back” cu care aceeași operație este efectuată

în mod repetat, producerea unei repetiții fiind modul de pornire al repetiției următoare.

Conceptul matematic de „fractal” caracterizează obiecte cu o diversă gamă structurală care reflectă principiul ierarhic de organizare. Obiectele fractale nu își schimbă forma în mod semnificativ când sunt observate la microscop.

Natura nu s-a limitat în a construi corpuri geometrice doar în spațiul euclidian, un spațiu particular, a cărui măsură este un număr întreg și mai mic decât 3. Să explorăm câteva imagini din natură și să încercăm să le includem într-o viziune euclidiană. Acest exercițiu va sugera dificultatea utilizării geometriei euclidiene în descrierea formelor naturale.

Exemple

1. Curba lui Von Koch

Curba lui von Koch este un fractal geometric determinist. Pentru generarea sa trebuie ales un inițiator, în cazul acesta o dreaptă, o lege de construcție (de transformare, de deformare, de rupere, etc) și un proces ce repetă la nesfârșit aceeași operație dictată de legea aleasă, asupra fiecărei părți rezultate din operația inițială. Concret, în acest caz legea impune ca dreapta să fie divizată în trei părți egale, să fie înlăturată partea centrală și în locul ei să se pună un triunghi echilateral fără bază.

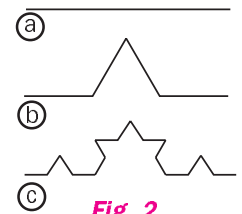


Fig. 2. Curba lui Von Koch.

Continuarea procesului recursiv presupune aplicarea legii pe fiecare segment de dreaptă rezultat. În acest caz, cele 4 segmente devin, fiecare în parte, un „nou” inițiator, suportul a 4 „imagini” micșorate și așezate după aceeași regulă. Și așa mai departe... După un număr infinit de pași se obține ceea ce se numește „fractalul lui Koch”. Această curbă este de lungime infinită și are o dimensiune proprie cuprinsă între 1 și 2 (1,26185...). Este o curbă continuă care depășește „natura” unei linii, dar nu atinge calitatea de a fi suprafață.

2. Triunghiul lui Sierpinski. Triunghiul lui Sierpinski este un alt exemplu de fractal obținut printr-o metodă recursivă simplă. El începe ca un triunghi și orice nouă iterare crează triunghiuri ce unesc mijloacele laturilor celorlalte triunghiuri figurete.



Fig. 3. Triunghiul lui Sierpinski.

3. Fulgul de zăpadă a lui Koch

Fulgul de zăpadă al lui Koch este un alt exemplu care începe la rândul lui ca un triunghi și adaugă triunghiuri în punctele de trisecțiune.



Fig. 6. Fulgul de zăpadă al lui Koch.

4. Structuri arborescente

Să generăm un alt „obiect” folosind tot repetiția unei legi capabile să dezvolte o structură complexă pornind de la o „sămânță”, o „schiță” simplificată a unei structuri arborescente. Să ne imaginăm că, în vârful fiecărei ramuri terminale, atașăm aceeași sămânță, micșorată de k ori, pentru ca apoi, în vârful fiecărei ramuri terminale, ale fiecărei semințe micșorate și atașate fiecărei ramuri terminale din sămânța inițială, să atașăm altă sămânță identică cu prima, dar micșorată din nou de k ori. Cum arată oare imaginea după 3, 4, ... n iterații? Cum se schimbă aceasta dacă schimbăm structura seminței? Dar dacă, în loc de o structură deterministă pentru sămânță, punem o sămânță generată aleator? Sau dacă nu se dezvoltă toate ramurile? Acest experiment pe calculator poate genera structuri din care unele seamănă izbitor de bine unor structuri reale (fig. 7).

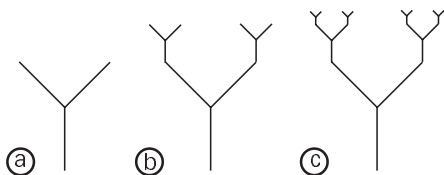


Fig. 7. Structuri arborescente – structura de bază (a); prima iterație (b); a doua iterație (c).

Teme pentru acasă:

1. Construiți profile fractale și încercați să identificați asemănări cu figuri cunoscute din realitate.

2. Imaginați utilizarea unui astfel de profil pentru caracterizarea unor obiecte naturale.

Prin rezolvarea temei anterioare veți constata că adevărata fațetă a geometriei fractale este cea de „geometrie a naturii”, o metodologie de auto-descriere comprimată a unor corpuri din natură, metodologie mult mai adecvată cercetărilor din geofizică, astrofizică sau biofizică.

Despre autosimilaritate

O proprietate a unui fractal ce rezultă din modul de definire al acestuia este autosimilaritatea. Conform acestei proprietăți, o parte din structură seamănă cu întregul. Orice decupare la o anumită scară, va evidenția

aceeași informație, proprietate evidentă în cazul curbei lui Koch, sau a triunghiului lui Sierpinski. Aceeași proprietate este prezentă și în cazul fractalilor aleatori, fractali în a căror definiție a legii de generare apar unul sau mai mulți parametri aleatori.

Determinarea dimensiunii fractale

Se pune problema dacă, fiind dată o structură, i se poate determina dimensiunea fractală? Și dacă da, cum? Pentru aceasta să ne reamintim câteva lucruri de bază din matematică și fizică, legate de conceptul de măsură. Considerând un cerc, definit în geometria euclidiană ca locul geometric al tuturor punctelor egal depărtate de centru, o caracteristică importantă a acestuia este raza (R) (dublul ei este diametrul D). Lungimea perimetrului unui cerc de rază R este egală cu πD . Pentru a ajunge la această valoare să aproximăm perimetrul cercului printr-un poligon regulat de latură (L) înscris în cerc. Perimetrul va fi aproximat prin lipsă, cu o valoare dependentă chiar de numărul laturilor poligonului ($N(L)$): $P_1(L) \sim N_1(L) \cdot L$

O aproximare mai bună se va obține dacă L scade, respectiv când coarda se apropie din ce în ce mai mult de arcul subîntins. Dacă avem o serie de poligoane înscrise în cercul de măsurat (fig. 8), cu laturi din ce în ce mai mici: $L_1 > L_2 > L_3 > \dots > L_n$ obținem un șir de aproximări: $P_1(L_1) < P_2(L_2)$

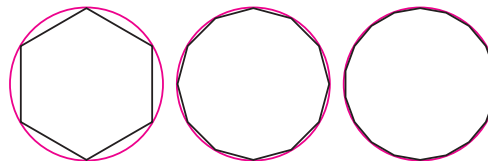


Fig. 8.

Se spune că obiectul analizat este măsurabil și are sens discuția asupra dimensiunii acestuia doar dacă limita șirului de mai sus există, este finită și diferită de zero. În acest caz, limita este valoarea cunoscută πD .

Observație: Când limita există și este finită, eroarea dintre limita șirului (valoarea adevărată) și o valoare oarecare din șirul de aproximări este cu atât mai mică cu cât scara de măsură (L) este mai mică.

În cazul măsurătorilor unor corpuri reale, Richardson a propus a se menționa, pe lângă valoarea numerică găsită, și scara de măsură, în absența acestei precizări, valoarea găsită neavând semnificație.

Doar după elaborarea teoriei geometriei fractale de către Benoit Mandelbrot, această problemă a fost soluționată acceptabil prin translatarea acesteia în identificarea unei scări de măsură proprii obiectului, ce se lasă măsurat cu o unitate specifică acestuia. Unitatea de

măsura este L^d , unde d este o valoare neîntregă, fracționară, intermediară lui $D = (1, 2, 3, \dots, n)$ din geometria euclidiană. Pentru valoarea lui $d = D_f$, determinată și atașată precum o caracteristică particulară obiectului analizat, seria aproximărilor parametrului măsurat este convergentă și deci obiectul este măsurabil. Dacă d este diferit de această valoare, șirul fie este divergent, fie este convergent la zero, și deci obiectul nu este măsurabil.

Concluzii:

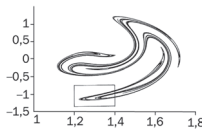
În pofida simplității formelor geometrice euclidiene ca baze teoretice a înțelegerii acestei geometrii pare că

norma în natură este dată de complexitatea fractală. Aceasta deoarece sunt mulți factori care pot afecta un sistem natural. Mișcarea pendulului este exemplul unei aproximări; pendulul real nu este perfect rigid, parametrii acestuia și amortizarea variază în timp și în funcție de poziție, în pofida modelului adoptat. O serie de limitări fizice trebuie aplicate construirii modelului matematic din spatele acestui sistem.

Haosul și teoria fractală dau mijloacele aproximării sistemelor reale prin modelare matematică și ne spun cât de bune sunt aceste aproximări.

Rezumat

• Un sistem haotic poate fi caracterizat pe baza unei hărți Poincaré, care este o sumă de puncte $[(x(t_i), \dot{x}(t_i))]$, unde t_i îndeplinește



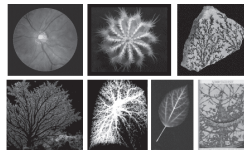
o relație de recurență de tipul $t_i = t_{i-1} + \frac{2\pi}{\Omega}$.

• Unele regiuni din spațiul fazelor sunt inaccesibile sistemului în timp ce, în cele accesibile se formează o structură ce constituie un atractor straniu.

• Una dintre cele mai importante caracteristici ale atractorilor stranii este sensibilitatea în raport cu condițiile inițiale.

• Importanța practică a acestei proprietăți este aceea a imposibilității predicției comportamentului pe termen lung al sistemului deoarece nu putem stabili cu exactitate condițiile inițiale.

• O proprietate interesantă a atractorilor stranii este legată de structura acestora, de modul în care aceștia apar la scală din ce în ce mai mică.



- Conceptul matematic de „fractal” caracterizează obiecte cu o diversă gamă de structură și care astfel reflectă principiul ierarhic de organizare.
- Exemple de structuri fractale: curba lui Von Koch, triunghiurile lui Sierpinski și fulgul lui Von Koch.



- O proprietate a unui fractal ce rezultă din modul de definire al acestuia este autosimilaritatea.
- Se spune că obiectul analizat este măsurabil, și are sens discuția asupra dimensiunii acestuia, doar dacă limita șirului de aproximări există, este finită și diferită de zero. Când limita există și este finită, eroarea dintre limita șirului (valoarea adevărată) și o valoare oarecare din șirul de aproximări este cu atât mai mică cu cât scara de măsură (L) este mai mică.



Verificați-vă cunoștințele

1. Completați textul lacunar:

Oscilatorii liberi neliniari pot fi caracterizați în spațiul fazelor printr-o Poincaré. Un sistem neautonom este O caracteristică a atractorilor stranii este sensibilitatea Importanța practică a este aceea a predicției pe termen lung al sistemului deoarece nu putem stabili cu exactitate

2. Enumerați etapele de construcție a unei hărți Poincaré.

3. Pentru următoarele condiții de operare stabiliți cum arată harta Poincaré.

- a) un răspuns periodic, cu aceeași perioadă ca a excitatorului punctul (x, \dot{x}) ;
- b) un răspuns periodic, cu o perioadă de n ori cea de excitație;
- c) un răspuns aperiodic;
- d) un răspuns întâmplător.

4. Generați pe calculator curba Poincaré a unui sistem dinamic pe care l-ați modelat matematic.

5. Generați pe calculator o structură fractală și stabiliți dimensiunea acesteia.

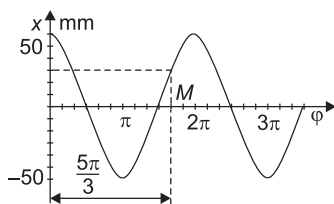
PROBLEME RECAPITULATIVE

Capitolul 1

1. Un corp efectuează oscilații armonice conform legii $x = 0,04\sin(\pi t + \pi/3)$ (m). Peste cât timp de la începutul mișcării faza oscilațiilor va fi egală cu $\pi/2$?

2. Un corp efectuează oscilații armonice după legea $x = 0,08\sin(\pi t/3 + \pi/6)$ (m). Care este amplitudinea, perioada, frecvența și faza oscilațiilor?

3. În figura alăturată este reprezentat graficul dependenței elongației oscilatorului armonic de timp. Găsiți amplitudinea, perioada, frecvența și pulsația oscilațiilor.



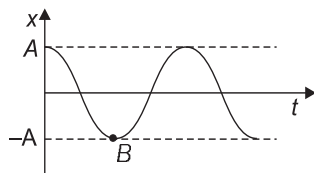
4. Un corp punctiform oscilează armonic. Știind viteza maximă a corpului, egală cu 10 cm/s și accelerația maximă de 50 cm/s², determinați pulsația, perioada și amplitudinea oscilațiilor.

5. Ce distanță va parcurge în 15 minute un corp ce oscilează armonic cu amplitudinea de 6 mm și perioada de 5 s?

6. Știind că amplitudinea oscilațiilor armonice este de 12 cm, frecvența de 0,7 Hz, iar faza inițială nulă, aflați: a) ecuația elongației în SI; b) elongația și faza peste 2s de la începutul mișcării.

7. Elongația unei mișcări oscilatorii sinusoidale este dată de expresia: $y_1 = 5\sin(100\pi t + \frac{\pi}{6})$ cm. Scrieți expresia elongației unei alte mișcări sinusoidale y_2 de aceeași frecvență, știind că aceasta este defazată în timp în urma lui y_1 cu $t = 0,1$ ms și că satisface condiția: $y_2 = 3\sqrt{2}$ cm la momentul $\frac{T}{4}$, în care T este perioada oscilațiilor considerate.

8. Graficul alăturat prezintă dependența de timp a poziției unui oscilator. Ce puteți spune despre viteza și forța în punctul B.



- viteza este pozitivă, forța este spre dreapta;
- viteza este negativă, forța este spre dreapta;
- viteza este zero, forța este spre dreapta;
- viteza este pozitivă, forța este spre stânga;
- viteza este negativă, forța este spre stânga;
- viteza este zero, forța este spre stânga.

9. La momentul $t = 0$ un bloc de 500 g oscilând pe un resort spre dreapta atinge o elongație de 15 cm. Dacă elongația maximă de 25 cm este atinsă la 0,3 s:

a) desenați graficul spațiu-timp pentru un ciclu al mișcării; b) în ce moment, în primul ciclu al mișcării corpul este în poziția $x = 20$ cm?

10. Un oscilator armonic liniar oscilează între gradațiile 10 cm și 60 cm ale unei rigle, executând 10 oscilații în 33 s. Care sunt: a) perioada; b) frecvența; c) pulsația; d) amplitudinea; e) viteza maximă a oscilatorului.

11. Accelerația unui oscilator variază după legea $a_x = 4\cos 2x$. Care este amplitudinea oscilației?

12. Un oscilator variază după legea $x = 0,2\sin 3t$ (în SI). Care este accelerația sa maximă?

13. Corpul cu masa de 0,10 kg oscilează după legea $x = 0,10 \sin(100\pi t + \pi/2)$ (SI). Aflați energia cinetică maximă a corpului?

14. Un punct material cu masa de 25 g efectuează o mișcare oscilatorie armonică cu amplitudinea egală cu 0,2 m. Știind că în momentul în care trece prin poziția de echilibru are viteza de 9,6 m/s, aflați: a) ecuația mișcării; b) elongația y_1 la momentul $t_1 = 5/6$ T; c) elongația y_2 în momentul în care viteza oscilatorului este egală cu un sfert din viteza pe care o are în poziția de echilibru; d) valoarea maximă a forței elastice; e) frecvența și perioada oscilațiilor.

15. Sub acțiunea unei forțe $F = 10$ N, un corp cu masa $m = 0,1$ kg, atârnat de capătul unui resort, se deplasează cu $x = 5$ cm față de poziția de echilibru. Calculați: a) pulsația, perioada și frecvența oscilațiilor libere; b) raportul dintre energia cinetică și cea potențială, la o distanță de origine egală cu jumătatea amplitudinii.

16. Când elongația și viteza unui oscilator armonic sunt egale cu 10 cm și respectiv 2 m/s, energia lui cinetică devine egală cu energia potențială. Care este perioada oscilațiilor?

17. Viteza unui oscilator armonic cu masa de 0,20 kg variază conform ecuației $v = 0,03\sin 100t$ (m/s). Aflați: a) ecuația oscilatorului; b) accelerația maximă; c) energia mecanică totală a oscilatorului.

18. Un corp punctiform cu masa de 0,20 kg oscilează după legea $x = 0,40 \sin \pi t$ (SI). Determinați: a) elongația; b) distanța parcursă; c) forța ce acționează asupra corpului; d) energia potențială a corpului la 2,5 s de la începutul oscilațiilor.

19. Un pendul are frecvența oscilațiilor egală cu 5 Hz. Ce frecvență are pendulul dacă perioada lui crește de 3 ori?

20. Perioada oscilațiilor unui pendul gravitațional este egală cu π s. Care este lungimea pendulului?

21. De câte ori trebuie să mărim lungimea unui pendul pentru ca perioada lui să crească de 7 ori?

22. Un pendul gravitațional are lungimea de 0,54 m și efectuează oscilații după legea $x = 0,03 \sin(\omega t/3 + 0,5)$ (m). Care este diferența de fază corespunzătoare momentelor de timp 4 s și 3 s?

23. Un pendul gravitațional efectuează oscilații armonice după legea $x = 0,02 \cos(5t + \pi/15)$ (m). Care este lungimea pendulului?

24. Un pendul gravitațional efectuează oscilații armonice cu perioada de 0,3 s. Care este perioada oscilațiilor acestui pendul pe o planetă cu masa egală cu a Pământului, dar cu raza de 3 ori mai mare? Se dă raza Pământului $R_p \approx 6400$ km.

25. Se consideră două pendule cu lungimile l_1 și l_2 al căror raport este $k > 0$. Ce valoare trebuie să aibă numărul k pentru ca un ceas cu pendul de lungime l_2 să înainteze cu 10 s în 24 h, față de un ceas cu pendul de lungime l_1 care bate secunda în același loc?

26. Un pendul bate secunda la ecuator și la nivelul mării.

- Care ar fi durata unei oscilații dacă Pământul și-ar înceta mișcarea de rotație?
- De câte ori ar trebui să crească viteza de rotație a Pământului pentru ca perioada de oscilație să devină infinită?
- Cu cât ar lua-o înainte pendulul în 24 h dacă l-am duce la pol? Accelerația gravitațională la nivelul mării este dată de formula $g = (9,806 - 0,025 \cos 2\lambda)$ m/s², λ fiind latitudinea.

27. Ecuația mișcării oscilatorii este $x = 15 \sin[\pi(t + 0,5)]$. Reprezentați această oscilație armonică printr-un fazor.

28. Un corp punctiform participă concomitent la următoarele două mișcări oscilatorii de aceeași direcție: $y_1 = 4 \sin \pi t$ și $y_2 = 8 \sin(\pi t + \pi/3)$. Aflați amplitudinea și faza inițială a oscilației rezultante.

29. Un corp punctiform este supus simultan la două mișcări oscilatorii paralele cu elongațiile: $x_1 = \cos \pi t$ și $x_2 = 2 \cos \pi(t + 1/2)$. Aflați: amplitudinea, faza și scrieți ecuația oscilației rezultante.

30. Un corp punctiform participă la 2 mișcări oscilatorii perpendiculare cu elongațiile: $x = \sin t$ și $y = 2 \cos t$. Determinați amplitudinea și faza oscilației rezultante.

31. Două oscilații armonice de aceeași direcție și de aceeași perioadă cu amplitudinile de 10 cm și 6 cm se compun într-o oscilație rezultantă cu amplitudinea de 14 cm. Găsiți diferența de fază a oscilațiilor componente.

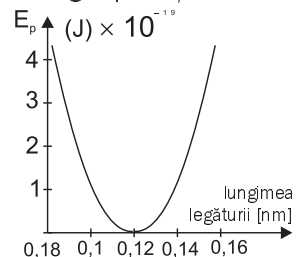
32. Amplitudinea inițială a oscilațiilor amortizate se micșorează de 2 ori în timp de 5 min. Peste cât timp de la începutul oscilațiilor amplitudinea se va micșora de opt ori?

33. O undă plană progresivă cu frecvența de 4 Hz se propagă cu viteza de 6 m/s într-un mediu omogen. Care este diferența de fază între oscilațiile executate de punctele mediului separate prin distanța de 50 cm.

34. Distanța dintre două puncte oscilante ale unei unde plane progresive este egală cu 25 cm. Știind că

defazajul între oscilațiile acestor puncte este de $\pi/6$, aflați lungimea de undă.

35. O legătură moleculară poate fi modelată ca un resort între doi atomi ce vibrează liniar armonic. În figura alăturată este reprezentată curba energiei potențiale a unei molecule de HCl. Deoarece atomul de Cl are masa mult mai mare ca a hidrogenului ($m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg) se poate considera că cel din urmă vibrează în timp ce primul rămâne în repaus. Estimați din grafic frecvența vibrației.



36. O sursă produce oscilații cu frecvența de 50 Hz, care se propagă în două medii diferite. Cunoscând vitezele de propagare, $v_1 = 5000$ m/s și $v_2 = 1450$ m/s, ale vibrațiilor în cele două medii, să se calculeze lungimile de undă corespunzătoare.

37. Pe suprafața unui lichid o sursă produce oscilații cu frecvența de 100 Hz care se propagă cu viteza de 50 cm/s. a) Dacă amplitudinea sursei este de 1 mm, scrieți ecuația mișcării unui punct P aflat la distanța de 20 cm de sursă (se va considera că propagarea nu modifică amplitudinea). b) La momentul inițial punctul sursă trece prin elongația zero spre valori pozitive. Determinați elongația punctului P la momentele $t_1 = 0,399$, $t_2 = 0,4$ s și $t_3 = 0,405$ s.

38. O undă se propagă într-un mediu cu modul de elasticitate $E_1 = 10^{11}$ N/m² și densitate $\rho_1 = 7000$ kg/m³. Sub incidența $i = 30^\circ$ unda trece într-un mediu cu densitatea $\rho_2 = 11,3 \cdot 10^3$ kg/m³ și cu modulul de elasticitate $E_2 = 0,17 \cdot 10^{11}$ N/m². Care este unghiul de refracție?

39. Diferența de fază între oscilațiile efectuate de două puncte ale unui mediu elastic este de 30° . Știind că punctele oscilante se află la distanța de 7 cm și că frecvența oscilațiilor este de 15 Hz, aflați viteza de propagare a undelor.

40. Două surse de oscilații sincrone de aceeași frecvența și aceeași direcție generează în mediul ambiant omogen unde mecanice cu amplitudinile de 2 mm și 5 mm. Știind că viteza de propagare a undelor este de 320 m, calculați amplitudinea oscilațiilor punctului aflat la 6,5 m de la prima sursă și la 32,3 m de la a doua.

41. În lungul unui cablu se propagă o undă transversală cu viteza de 10 m/s. Știind că punctele cablului oscilează cu amplitudinea de 2 cm și perioada de 1,4 s, calculați: a) lungimea de undă; b) diferența de fază între oscilațiile efectuate de două puncte ale cablului distanțate de 4,5 m.

42. O undă mecanică cu amplitudinea de 3 cm și perioada de 1,5 s se propagă într-un mediu cu viteza de 20 m/s. Care este elongația punctului ce se află la 40 m de la sursă după 5 s de la începutul oscilațiilor?

43. În ce caz diapazonul sună mai mult timp: a) dacă este ținut în mână; b) dacă este fixat de o bancă.

44. În ce caz diapazonul sună mai tare: a) dacă este ținut în mână; b) dacă este fixat de o bancă.

45. La trecerea undelor sonore dintr-un mediu în altul lungimea lor de undă s-a mărit de două ori. Se va modifica oare înălțimea sunetului?

46. Amplitudinea undelor sonore a fost mărită de două ori, fără a modifica frecvența lor. Variaza oare înălțimea sunetului?

47. Distanța dintre ramurile unui diapazon este $d = 5$ cm. Diapazonul oscilează cu frecvența $\nu = 560$ Hz și cu amplitudinea $A = 0,6$ mm. La momentul inițial cele două ramuri ale diapazonului sunt apropiate una de alta. Considerând viteza de propagare a undelor în aer $v = 320$ m/s, aflați: a) amplitudinea de oscilație a punctului O situat la mijlocul distanței dintre ramurile diapazonului; b) legea de oscilație a punctului P situat la distanța $x = 0,7$ m de punctul O măsurată în direcție perpendiculară pe ramurile diapazonului.

48. Într-un tub sonor deschis cu lungimea de 85 cm se produc sunete. Calculați primele patru frecvențe proprii ale sunetelor produse.

49. Undele, generate de două surse coerente sincrone, au amplitudinile egale cu 3 cm. Știind că într-un punct dat undele ajung în opoziție de fază, determinați amplitudinea oscilațiilor rezultante.

50. Distanța dintre primul și al patrulea nod al unei unde staționare este de 18 cm. Calculați lungimea de undă a unei progresive.

Capitolul 2

1. Un condensator cu reactanța capacitivă de 500Ω este conectat la o rețea de curent alternativ industrial (50 Hz). Calculați capacitatea electrică a condensatorului.

2. Tensiunea și intensitatea curentului într-un circuit variază după legea: $u = 30\sin(100\pi t + \pi/6)$ și $i = 20\sin 100\pi t$. Găsiți diferența de fază între tensiunea și intensitatea curentului.

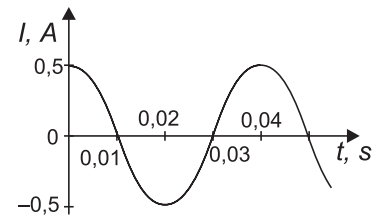
3. Un circuit este format dintr-o bobină cu inductanța de 3 mH legată în serie cu un condensator de capacitate $30 \mu\text{F}$. Ce frecvență trebuie să aibă curentul pentru ca în circuit să se manifeste fenomenul de rezonanță?

4. Un circuit este format dintr-o bobină și un condensator cu capacitatea de 300 pF . Ce inductanță trebuie să aibă bobina pentru ca la frecvența de 1 MHz în circuit să se manifeste fenomenul de rezonanță a tensiunilor? Desenați schema circuitului electric.

5. Un circuit RLC serie este alcătuit dintr-un rezistor ideal cu rezistența de 30Ω , o bobină cu inductanța de 20 mH și un condensator cu capacitatea de $50 \mu\text{F}$. La bornele circuitului se aplică o tensiune cu pulsația de 1000 rad/s. Determinați reactanța și impedanța circuitului.

6. Utilizând graficul din figura alăturată, unde este reprezentată dependența intensității curentului alternativ de timp, găsiți:

- valoarea maximă a curentului;
- perioada;
- frecvența;
- pulsația curentului;
- ecuația dependenței $i = i(t)$.



7. Într-un circuit RLC serie tensiunea efectivă pe rezistor este de 20 V, la bornele bobinei este de 30 V, iar la bornele condensatorului de 15 V. Determinați tensiunea efectivă la bornele circuitului.

8. Un rezistor cu rezistență 100Ω este legat în serie cu un condensator de capacitate $300\pi \text{ nF}$. La capetele acestei porțiuni de circuit este aplicată o tensiune alternativă de 200 V și frecvența de 500 Hz. Determinați intensitatea curentului în circuit.

9. Intensitatea curentului ce traversează un rezistor de rezistență 10Ω variază după legea: $i = 12 \sin 100\pi t$ (SI). Calculați puterea activă a curentului.

10. În circuitul de curent alternativ alimentat la tensiunea de 220 V sunt legate în serie un rezistor de 50Ω , o bobină și un condensator. Intensitatea curentului în circuit fiind de 0,6 A, determinați impedanța circuitului, factorul de putere și puterea activă a curentului.

11. O porțiune de circuit în curent alternativ conține un rezistor de 200Ω , o bobină și un condensator unite în serie. Știind că tensiunea la bornele porțiunii este de 110 V, iar intensitatea curentului în circuit este de 1 A, calculați impedanța circuitului, factorul de putere și puterea activă a curentului.

12. Un circuit RLC serie alcătuit dintr-o bobină cu rezistența $R = 16 \Omega$, inductanța $L = 95,5 \text{ mH}$ și un condensator cu capacitatea C este parcurs de un curent de intensitate $i = 6\sqrt{2}\sin(314t - \pi/6)$ (A). Determinați capacitatea C , tensiunea U_b la bornele bobinei tensiunea U la bornele circuitului și puterea P disipată în circuit.

13. O bobină este conectată la o sursă cu tensiunea $u = 30\sin 314t$ (V). Intensitatea curentului prin bobină este $i = 21,7\sin 2\pi(50t - 1/8)$ (A). Aflați: a) frecvența ν a curentului și defazajul φ al circuitului; b) momentele t și t_1 pentru care intensitatea instantanee i a curentului are valorile pozitivă respectiv negativă egale cu intensitatea efectivă; c) rezistența R și inductanța L ale bobinei.

14. Dacă se aplică la bornele unei bobine o tensiune sinusoidală de frecvență standard ($\nu = 50$ Hz) și tensiune efectivă $U = 60$ V, intensitatea efectivă a curentului prin bobină este $I = 4$ A, iar dacă se aplică la bornele bobinei o tensiune continuă $U_0 = 10$ V, intensitatea curentului este $I_0 = 2$ A. Determinați inductanța L și defazajul φ al circuitului de curent alternativ.

15. Un circuit RLC paralel cu un rezistor de 40Ω , bobină cu inductanța de $0,3/\pi$ H și un condensator cu capacitatea de $10^{-3}/(2\pi)$ F este alimentat la tensiunea de 120 V și frecvența de 50 Hz. Determinați: a) intensitatea curentului prin fiecare element de circuit; b) impedanța circuitului; c) intensitatea curentului total; d) defazajul dintre tensiune și intensitatea curentului total; e) puterile curentului în circuit.

16. Un circuit RLC paralel este format dintr-o bobină ideală cu reactanța $X_L = 314 \Omega$ (pentru $\nu = 50$ Hz) în paralel cu un condensator $C = 4 \mu\text{F}$ și cu un rezistor cu rezistența $R = 10 \Omega$. Circuitul este legat la o sursă de alimentare cu tensiunea $U = 10$ V și frecvența $\nu = 50$ Hz. Determinați impedanța Z a circuitului, intensitatea I a curentului prin circuit și defazajul φ al circuitului.

17. Un rezistor cu rezistența $R = 1 \text{ k}\Omega$, o bobină ideală cu inductanța $L = 0,2 \mu\text{H}$ și un condensator cu capacitatea $C = 300 \text{ pF}$ sunt conectați în paralel la o sursă cu tensiunea $U = 1$ V și frecvența $\nu = 250$ kHz. Determinați intensitățile curenților I_R , I_L , I_C prin laturile circuitului, intensitatea curentului total I și defazajul φ al circuitului.

18. O bobină ideală cu inductanța $L = 1$ mH este legată în paralel cu un condensator cu capacitatea $C = 40 \mu\text{F}$ la o sursă cu tensiunea $U = 2$ V și frecvența ν variabilă. Calculați frecvența de rezonanță ν_0 a circuitului și intensitățile curenților I_L , I_C și I din circuit, în acest caz.

19. La o rețea cu tensiunea $U = 220$ V și cu frecvența $\nu = 50$ Hz sunt legate în serie o rezistență $R = 14 \Omega$ și o capacitate $C = 66,35 \mu\text{F}$. Determinați:

- reactanța și impedanța circuitului;
- curentul în circuit;
- tensiunea la bornele rezistenței și tensiunea la bornele condensatorului;
- factorul de putere;
- puterea activă, puterea reactivă și puterea aparentă.

20. O bobină de inducție cu rezistența $R = 16 \Omega$ și reactanța inductivă $X_L = 30 \Omega$ este legată în serie cu un condensator a cărui reactanță capacitivă este $X_C = 18 \Omega$. Circuitul este alimentat de la o rețea cu tensiunea $U = 120$ V.

Determinați:

- impedanța circuitului, intensitatea curentului și factorul de putere al circuitului;
- tensiunea la bornele bobinei și tensiunea la bornele condensatorului;
- puterea activă, reactivă și aparentă în circuit.

21. Un circuit serie este format dintr-o bobină (R , L) și un condensator. Se știe că la rezonanță, puterea activă a circuitului este $P = 12$ W și valoarea efectivă a tensiunii la bornele condensatorului este $U_0 = 8$ V, dacă tensiunea la bornele circuitului are valoarea efectivă $U = 6$ V. Calculați:

- tensiunea la bornele bobinei;
- rezistența, reactanța inductivă și reactanța capacitivă;
- factorul de putere al circuitului;

d) mărimile de la 1 și 3 dacă se menține valoarea efectivă a tensiunii la borne și se mărește de patru ori valoarea frecvenței.

22. Se consideră un circuit paralel alcătuit dintr-un rezistor și un condensator ideal. Valorile efective ale tensiunii și intensității de alimentare a circuitului fiind $U = 100$ V și $I = \sqrt{2} \cdot 10^{-1}$ A, puterea activă $P = 10$ W. Calculați:

- rezistența și reactanța capacitivă a circuitului;
- intensitățile efective ale curenților prin cele două derivații;
- factorul de putere al circuitului;
- diagrama fazorială.

Capitolul 3

1. Într-un dispozitiv Young, cele două fante S_1 și S_2 sunt la distanța $2l = 0,5$ mm, pe un ecran paralel cu S_1, S_2 , aflat la distanța $D = 1,5$ m se observă franjele de interferență. În experiment se folosește o radiație monocromatică a cărei lungime de undă este $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$. Calculați distanța ce separă a cincea franjă întunecoasă de planul de simetrie al dispozitivului.

2. Fluxul luminos emis de o sursă este separat în două fascicule cu ajutorul a două fante aflate la distanța $2l = 1$ mm. Ecranul este situat în aer la distanța $D = 1,4$ m. Știind că interfranja este $i = 0,5$ mm, aflați lungimea de undă a radiației utilizate.

3. O radiație monocromatică cade pe un dispozitiv Young ale cărui fante S_1 și S_2 sunt distanțate la $2l = 1$ mm. Pe un ecran se observă franjele de interferență și se constată că distanța dintre două franje luminoase succesive este $i_1 = 0,24$ mm. Se îndepărtează ecranul cu o distanță $D' = 0,5$ m. În această situație, noua interfranja este $i_2 = 0,44$ mm. Ce lungime de undă are radiația monocromatică?

4. Distanța dintre fantele unui dispozitiv Young este $2l = 1$ mm. Între planul fantelor și ecran distanța este $D = 1$ m.

a) Interfranja fiind $i = 0,6$ mm, se cere lungimea de undă a radiației monocromatice (în aer) folosite.

b) Spațiul dintre paravane se umple cu apă (viteza luminii în apă este $3/4$ din viteza luminii în aer). Care este noua valoare a interfranței?

c) Știind că lumina albă are ca limite spectrale radiațiile roșie ($\lambda_R = 0,75$ mm) și violetă ($\lambda_V = 0,4$ mm), aflați lățimea spectrului, dacă experimentul Young se realizează cu lumină naturală în aer.

5. Într-o experiență de interferență cu două fante, una din fante este acoperită cu o placă subțire de sticlă cu indice de refracție $1,5$, iar cealaltă cu o placă subțire de sticlă cu indice de refracție $1,78$. Punctul de pe ecran în care se afla maximul central înaintea introducerii plăcilor de sticlă este acum ocupat de a cincea franjă luminoasă dinaintea introducerii plăcilor. Presupunând că $\lambda = 3600 \text{ \AA}$ și că plăcile au aceeași grosime „e”, determinați valoarea lui „e”.

6. O sursă de lumină S emite cu lungimea de undă $\lambda_1 = 0,55$ mm, iluminând un dispozitiv Young. La distanța $D = 1,8$ m de planul fantelor F_1, F_2 , paralel cu acestea se așază un ecran. Se observă pe ecran că distanța care separă $N = 9$ franje luminoase consecutive este $L = 9,6$ mm.

- Calculați distanța $F_1F_2 = a$ dintre cele două fante.
- Calculați valoarea limită a distanței $F_1F_2 = a$, știind că pentru valori ale interfranței mai mici de 0,3 mm fenomenul este greu de observat cu ochiul liber.
- Fixându-se distanța F_1F_2 la valoarea $a = 1,1$ mm se înlocuiește sursa S cu o sursă S' care emite simultan două radiații cu lungimile de undă $\lambda_2 = 0,48$ mm și $\lambda_3 = 0,60$ μm . În ce punct de pe ecran se suprapun pentru prima oară cele două sisteme de franje și care sunt numerele de ordine ale franjelor produse de λ_2 , respectiv λ_3 ?
- Sursa S aflată la distanța $d = 50$ cm de planul fantelor este deplasată paralel cu planul fantelor, în sus, cu 2 mm. Determinați deplasarea franjei centrale.

7. Fie un dispozitiv Young cu distanța dintre fante $a = 0,12$ cm, iluminat cu lumină monocromatică cu $\lambda = 0,48$ mm. Ecranul de observare paralel cu planul fantelor se află la distanța $D = 3$ m de acesta.

- Calculați valoarea i a interfranței.
- Utilizându-se același dispozitiv interferențial iluminat cu lumină monocromatică, având λ' , se obține $i' = 1,5$ mm. Determinați λ' . Determinați eroarea în calcularea lui λ' știind că „ a ” este cunoscut cu o precizie de 5 mm, D cu o precizie de 5 mm, iar pentru calcularea lui i' precizia de măsurare este de 0,1 mm pentru o lărgime de 20 interfranje.
- Întregul dispozitiv este introdus într-un lichid transparent cu indice de refracție n . Folosind lumină monocromatică cu lungimea de undă în vid $\lambda = 0,48$ mm valoarea interfranței devine 0,9 mm. Calculați n .
- Dispozitivul este plasat din nou în aer. Se așază în fața uneia dintre fante o lamă de grosime $e = 5$ mm având indicele de refracție 1,55. Calculați deplasarea franjei centrale.
- Înlăturându-se lama, se iluminează dispozitivul cu lumină albă, având ($0,4 < \lambda < 0,75$) mm.

Se așază fanta unui spectroscop în planul ecranului paralelă cu franja centrală și la 15 mm de aceasta. Determinați lungimile de undă ale radiațiilor care lipsesc din spectrul observat.

8. Distanța dintre fantele unui dispozitiv Young este $2l = 1$ mm, iar ecranul de observație se află la $D = 0,75$ m. Se numără pe o distanță $x = 5,625$ mm un număr $N = 10$ franje de interferență. a) Aflați interfranța și lungimea de undă a radiației folosite. b) Dacă spațiul experienței se umple cu un lichid oarecare, valoarea interfranței devine $i_1 = 4,219 \cdot 10^{-4}$ m. Ce valoare are indicele de refracție al lichidului?

9. Un dispozitiv Young având distanța dintre fante $2l = 0,5$ mm și distanța dintre planul fantelor și planul de observație $D = 1,2$ m este iluminat cu radiații de lungime de undă $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ m. a) Aflați valoarea

interfranței. b) Se dublează interfranța. Cât este distanța fante-ecran? c) Întregul dispozitiv se cufundă într-un lichid cu indicele de refracție $n = 1,5$, iar distanțele rămân cele inițiale. Ce valoare are în acest caz interfranța?

10. Într-o experiență de interferență cu dispozitivul Young, distanța între fante este $a = 1$ mm. Franjele de interferență sunt observate pe un ecran aflat la distanța $D = 2$ m de planul fantelor și paralel cu acesta. Distanța care separă cea de-a 7-a franjă întunecoasă aflată de o parte a franjei centrale, de cea de-a doua franjă întunecoasă situată de cealaltă parte a franjei centrale este de 10,4 mm.

- Calculați interfranța.
- Calculați lungimea de undă a radiației monocromatice.
- Sursa emite simultan două radiații monocromatice $\lambda = 0,65$ mm, respectiv λ' . Se constată suprapunerea într-un punct de pe ecran între cea de-a 10-a franjă luminoasă a lui λ și cea de-a 13-a franjă luminoasă a lui λ' . Calculați λ' .

11. Se realizează o experiență de interferență cu ajutorul oglinzilor Fresnel iluminate cu o radiație monocromatică $\lambda = 0,59$ mm. Imaginea de interferență este observată pe un ecran paralel cu planul (S_1S_2) aflat la distanța $D = 1,2$ m de planul surselor. Distanța între franja centrală și cea de-a treia franjă întunecoasă este 2,95 mm. Calculați distanța „ $2a$ ” dintre cele două surse coerente S_1 și S_2 .

12. Se realizează o experiență de interferență cu ajutorul oglinzilor Fresnel iluminat cu lumină monocromatică având $\lambda = 0,49$ mm. Imaginea de interferență este observată pe un ecran perpendicular pe planul mediator al segmentului S_1S_2 aflat la distanța $d = 2$ m de intersecția celor două oglinzi. Cunoscând valoarea interfranței $i = 0,25$ mm și $r = 1$ m, calculați:

- distanța „ a ” dintre sursele S_1 și S_2 ;
- lărgimea câmpului de interferență;
- unghiul α dintre cele două oglinzi.

Capitolul 4

1. Pentru o populație constituită dintr-o singură specie în modelul matematic al evoluției acestuia se introduce un termen care descrie răspândirea unei epidemii în respectiva populație. Se propun pentru aceasta termenii $-\gamma x$ și $-\epsilon x^2$, unde γ și ϵ sunt constante pozitive. Discutați care dintre cei doi termeni este mai potrivit pentru descrierea fenomenului. Argumentați.

2. Considerând $x(t)$ o populație dintr-o anumită specie la un moment dat, reprezentând un număr mic față de rezervele de hrană din teritoriul pe care-l ocupă și ignorând interacțiile cu alte specii și eventuale dezastre naturale modelați matematic creșterea populației ținând cont de resursa limitată de hrană.

3. Un anumit teritoriu este populat cu iepuri și vulpi. Primii constituie hrana celor de-al doilea. Se consideră rezerva de hrană a iepurilor nelimitată. Dezvoltați un model simplu care să descrie variațiile în timp la cele două populații (iepuri și vulpi).

Răspunsuri selectate

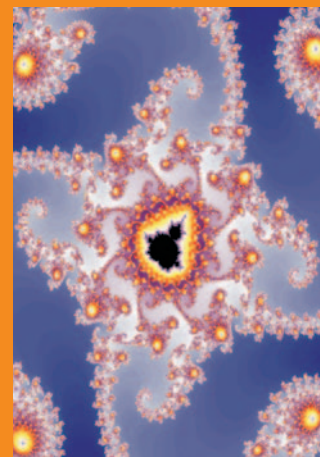
- Pag. 12.** 2. $6,6\pi$ rad/s; 3,3 Hz; 0,3 s; $y = 2,4\sin 6,6\pi t$ (cm). 7. 0,06 cm; 0,04 s; 25 Hz.
- Pag. 15.** 1. 0,00(3). 2. 20,6 s. 3. 8. 4. 63. 5. 12,38 mA.
- Pag. 22.** 1. 2 m; 12,56 s; 0,079 Hz; 0,19 m; 0,098 m/s; 0,047 m/s². 2. 7,5 cm; 2,37 cm/s. 3. $2 \cdot 10^{-2}$ N/m; 0,18 Hz. 4. $y = 6\sin 8,9t$ (cm). 5. 20,135 rad/s; 0,352 s; 0,61 m/s; 8,1 m/s². 10. 12,56 m/s; 3947 m/s²;
 $t = \frac{2k-1}{200}$ s; $t = \frac{k}{100}$ s; $k \in \mathbb{N}$. 11. $y = 3\sin 880\pi t$; 8,28 m/s; 23 232 m/s². 12. 3,37 J; 0,044 m; 0,29 m/s.
13. 2,6 s. 14. 4,26 /s².
- Pag. 32.** 3. 66,7. 4. 1 N. 5. 14.
- Pag. 39.** 9. 280 m/s; 142 m/s. 10. 108 N. 11. 27,7 m/s. 12. 5,1 s. 13. 60 m/s. 14. 3158 kg / ms².
- Pag. 43.** 6. 16,8 m; 16,5 km. 7. 30 MHz; 0,15 MHz. 8. 1500 m/s. 9. 1,2 m; 400 m/s. 10. negativ; $v(t) = 0,314 \cos(314 t + 62,8x)$ (m/s); 1 mm. 11. 0,2 m/s; 20π m/s; $40\pi^2$ m/s². 12. 5 m/s; $3\sin(50\pi t - 10\pi x)$: 15π m/s; $75\pi^2$ m/s².
- Pag. 48.** 5. $52^\circ 10'$.
- Pag. 58.** 3. 60 Hz. 4. 40 m/s. 8. 2,5 m; 3 m/s; 3 m; 4π m/s. 9. $0,006\cos 90t \cdot \cos(490 - 0,8z)$.
10. $89,6\pi$ rad. 11. 3,46 cm.
- Pag. 62.** 3. 240 m/s; 421,6 Hz. 4. 100 Hz; 200 Hz; 300 Hz; 400 Hz; 115 N. 5. 82,5 Hz; 165 Hz; 6. 45 kN. 7. 0,63 m; 1,58 m. 8. 164 m/s. 9. 98,76 dB.
- Pag. 80.** 2. 3336 Ω ; 311 V; 0,093 A. 3. 50 Ω ; 311 V; 6,22 A; 4,4 A. 4. 796 Hz; 2 A. 5. 700 A; 7 A; 0,07 A. 6. 31,42 Ω ; 104,8 Ω ; 2,1 A; 2,97 A; $17^\circ 25' 56''$. 7. 88 V; 106,4 V. 8. 235,5 V; 94,2 V; 141,3 V. 9. 84,89 Hz. 10. 24,51 A.
11. 1 μF ; 295,8 Ω ; $72^\circ 47' 41''$. 13. 63,66 Ω . 14. 45,7 A. 16. 2 var; $2\sqrt{10}$ V; -4 var; $\sqrt{80}$ VA; $\cos \varphi = 2/\sqrt{5}$.
17. $10^3 \Omega$; $10^3 \Omega$; 273 V; 985 V; 675 W; 0,274 A; 0,386 A; 386 V. 18. 21,35 W; 0,327; 23,14 W; 0,34.
19. 15,55 A; 2420 W; 77 var. 20. 31,11 Ω , 777W. 21. 100 Ω ; 102 Ω ; 1 A; 0,98 A; 0,71.
- Pag. 88.** 5. $12,7 \cdot 10^{-3}$ H. 6. $T = \frac{3}{2}T_0$; $v = \frac{2}{3}v_0$. 10. 3535,5 Hz; 22,72 μC ; 35,41 μC ; 0,116 A; 0,065 A; 377 μJ ; 314 μJ ;
23 μJ ; 86 μJ . 11. 5,8 mH. 12. 17,37 μF ; 7,5 mH. 13. 2,4 μC ; 7,2 μJ ; 1,01 H; 3,77 mA.
- Pag. 97.** 8. ≈ 2000 K. 9. $5,67 \cdot 10^4$ W/m. 10. $1,4 \cdot 10^{-6}$ m; $511 \cdot 10^{-10}$ m. 11. 4470 nm.
- Pag. 117.** 6. 2,7 mm; 3,72 mm; 0,9 mm; 1,27 mm; 270 mm. 8. 432 mm. 9. 1,5 mm; 20 mm. 11. 440 nm.
13. 1,39 mm; 3,16 mm; 13,92 mm.
- Pag. 122.** 1. 2,32 mm. 2. 110 nm. 3. 76 nm. 4. 85,4 μm . 6. 147. 7. 313 mm.
- Pag. 126.** 3. 4,4 mm. 4. 0,33 mm. 6. 1,1 m. 7. 10,9 km. 8. 624 mm. 9. $1^\circ 12'$. 10. 670 linii/cm. 11. $9,17^\circ$; $14,9^\circ$.
- Pag. 132.** 2. $56^\circ 40'$; $48,81^\circ$. 3. $31,2^\circ$. 4. $48,43^\circ$. 5. $36,94^\circ$. 7. 6,89%.

Bibliografie

- Berhag Gross, *Physik*, Hitz & Malu, Stuttgart, 1992
- Bramand P., Durandea J. P., Faye Ph., Thomassier G., *Physique*, Ed. Hachette, 1989, Paris
- Burton, T. D., *Introduction to Dynamic System Analysis*, McGraw-hill, Inc, USA, 1994
- Coq-Legoëde Clain, Denoyer B., Martin G., Piqué G., Trublin N., *Physique 1^{re}*, Collection G. Martin, Bordas, Paris, 1988
- Cone Gabriela, Stanciu G., *Probleme de fizică pentru liceu*, Ed. Acad. R.S.R., 1987
- Crocna Daniel Ovidiu, *Fizică, manual pentru clasa a XI-a*, Editura Sigma, București, 2001
- Crocna Daniel Ovidiu, *Fizică, manual pentru clasa a XII-a*, Editura Sigma, București, 2004
- Cros A., *Fondaments de la physique*, Belin, 1981, France
- Degurse A. M., Gozard F., Gipch L. R., Soulié L., *Physique*, Hatier, Paris, Juillet 1989
- Halliday D., Resnick R., *Fizică*, vol. II, E.D.P., București, 1975
- Knight, R.D., *Physics for Scientists and Engineers*, Pearson Education Inc., USA, 2004
- Kuhn W., *Physik*, Band 2, Westermann, 1992, Braunschweig
- Sears F. W., Zemansky M. W., Young H. D., *Fizică*, E.D.P., București, 1983
- Serway R., Faughn I., *College Physics*, Sounders College Publ., 1985
- Sexl-Rühnelt-Pflug-Stodler, *Physik 3*, Verlag, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1991
- Vlăducă Gh., ș.a., *Probleme de fizică pentru clasele a XI-a și a XII-a*, E.D.P., 1983, București
- *Culegere de probleme de fizică pentru liceu*, Soc. de Științe Fizice și Chimie
- *Fisica y Química, Guía Escolar Vox*, Bibliograf S.A., 1993, Barcelona
- Young, H.D., Freedman, R.A., *University Physics*, 11th ed, Pearson Education Inc. USA, 2004
- Ionescu, G. Fochianu, V., Călin, C., *Probleme de fizică*, Ed. Didactică și pedagogică, București, 1978
- Mandelbrot, B. *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco, 1982
- Meriam, J.L., Kraige, L.G., *Engineering Mechanics, vol II, Dynamics*, 3rd ed. Wiley, New York, 1992

<http://www.aps.org/> – societatea americană de fizică
<http://www.cath-mem.org/physics/Demoes.htm> – demonstrații experimentale
<http://www.colorado.edu/physics/2000/index.pl> – un site plăcut de fizică
<http://www.dctech.com/physics/humor/> – se prezintă o listă de glume legate de fizică și fizicieni
<http://www.falstad.com/mathphysics.html> – appleturi de fizică și matematică
<http://www.fizica-online.go.ro/> – fizica de liceu în limba română
<http://www.geocities.com/danielhada/fizica.html> – experimente, prezentate în limba română
<http://www.geocities.com/sgurlui/home.html> – pentru activități cu profil înalt de specialitate
<http://www.index2000.ro/cgi-bin/odp/odpnew.cgi?search=/Science/Physics/> – fizică + domenii conexe
<http://www.kettering.edu/~drussell/demos.html> – animații din domeniul oscilațiilor, undelor și acusticii
<http://www.labsmn.pub.ro/Academic/LabVIEW/Tutorial.htm> – se pot realiza softuri de fizică
<http://physics.nist.gov/> – laborator de fizică
<http://www.nobel.se/physics/index.html> – premii NOBEL în fizică
http://www.ph.utexas.edu/~phy-demo/resources/phys_applets.html – linkuri spre locații cu fizică
<http://physics.uwstout.edu/physapplets> – appleturi din toate capitolele fizicii, însoțite de explicații
<http://www.physicsclassroom.com/> – fizica în clasă
<http://www.physlink.com/News/022504CVDDiamonds.cfm> – noutăți în fizică
<http://physicsweb.org/> – resurse în domeniul fizicii
<http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/index.html#> – set de experimente pentru fixarea cunoștințelor
<http://www.th.physik.uni-frankfurt.de/~jr/portraits.html> – portrete cu fizicieni renumiți
<http://www.schulphysik.de/suren/Applets.html> – appleturi din toate domeniile
<http://www.schulphysik.de/ntnujava/indexPopup.html> – laborator virtual
<http://www.surendranath.org/Applets.html> – fizica generală
<http://www.teora.ro/index19bis.html> – găsim manuale românești în format electronic
<http://www.visualphysics.com/> – experimente ce pot fi descărcate
<http://www.walter-fendt.de/ph14e/> – se găsesc seturi de experiențe interactive de fizică
<http://webphysics.davidson.edu/Applets/jacob/Experiments.html> – experimente virtuale
Site-uri ale profesorilor de fizică:
<http://www.fizica.ro/> – site creat de prof. univ Mircea Rusu de la facultatea de Fizică –București
http://www.geocities.com/grigorescu_stefan/ – site creat de prof. Ștefan Grigorescu

Site-uri utile în învățarea fizicii propuse de prof. Ștefan Grigorescu – metodist, CCD - BUCUREȘTI



ISBN (10) 973 - 649 - 263 - X
ISBN (13) 978 - 973 - 649 - 263 - 1