

Concursul Național de Matematică și Fizică
Vrânceanu – Procopiu
Bacău, 28 noiembrie, 2015
Barem și rezolvare
Clasa a XI-a

Problema 1

a) **3p**

Deoarece forțele care acționează asupra corpului din cutie, când aceasta se rotește, reprezentate în figura 4, au orientările constante, situate într-un același plan vertical, rezultă că mișcarea corpului se va realiza în planul vertical fix al celor două forțe.

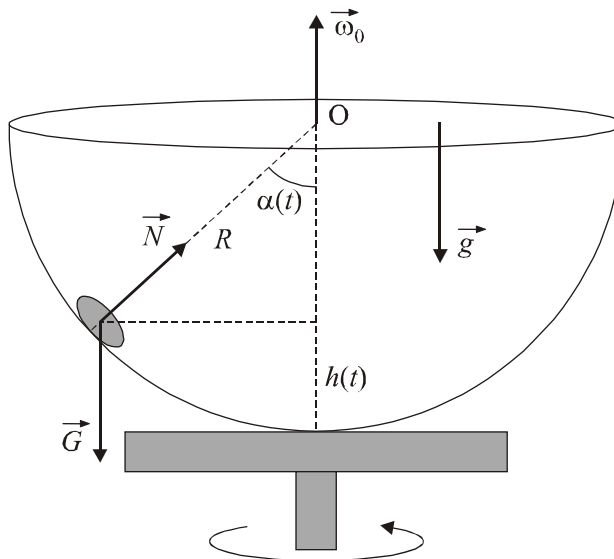


Fig. 4

Deoarece forțele care acționează asupra corpului din cutie sunt conservative, în condițiile precizate, $h(t) \ll R$, rezultă că mișcarea corpului este mișcarea oscilatorie armonică a unui pendul matematic.

Dacă α_{\max} este deviația unghiulară maximă a corpului, atunci înălțimea maximă la care el ajunge, față de punctul inferior al cutiei, este:

$$h_{\max} = (1 - \cos \alpha_{\max})R \ll R,$$

ceea ce presupune că α_{\max} este foarte mic, astfel încât dependența de timp a deviației unghiulare a pendulului este:

$$\alpha(t) = \alpha_{\max} \cos \omega t,$$

unde ω este pulsația oscilațiilor armonice ale corpului;

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{R}};$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}},$$

aceasta fiind perioada oscilațiilor armonice ale pendulului matematic cu „lungimea“ R .

În acord cu legea de mișcare scrisă mai sus, corpul se va afla la înălțimea $h = \frac{h_{\max}}{p}$ la un moment τ , pentru care avem:

$$h(\tau) = [1 - \cos \alpha(\tau)] R = \frac{h_{\max}}{p},$$

astfel încât, oscilațiile fiind mici, rezultă:

$$1 - \cos \alpha_{\max} = 2 \sin^2 \frac{\alpha_{\max}}{2} \approx \frac{\alpha_{\max}^2}{2};$$

$$h_{\max} = \frac{R}{2} \alpha_{\max}^2;$$

$$1 - \cos \alpha(\tau) = 2 \sin^2 \frac{\alpha(\tau)}{2} \approx \frac{[\alpha(\tau)]^2}{2} = \frac{1}{2} \alpha_{\max}^2 \cos^2 \omega \tau;$$

$$h(\tau) = \frac{R}{2} \alpha_{\max}^2 \cos^2 \omega \tau = \frac{R}{2p} \alpha_{\max}^2;$$

$$\cos^2 \omega \tau = \frac{1}{p}; \quad \cos \omega \tau = \pm \frac{1}{\sqrt{p}};$$

$$\omega \tau = \arccos \left(\pm \frac{1}{\sqrt{p}} \right) = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{p}};$$

$$\tau_{1,2} = \pm \frac{1}{\omega} \arccos \frac{1}{\sqrt{p}},$$

unde valorile $\tau_1 < 0$, și respectiv $\tau_2 > 0$, reprezintă momentele (raportate la momentul inițial, $t = 0$) când corpul a ajuns la înălțimea h , urcând și respectiv când corpul revine la aceeași înălțime, coborând.

În intervalul de timp $\Delta \tau = \tau_2 - \tau_1 = 2\tau_2$, cutia sferică s-a rotit în jurul axului său, efectuând n rotații, astfel încât perioada și viteza unghiulară ale rotației sale sunt:

$$T_0 = \frac{\Delta \tau}{n} = \frac{2\tau_2}{n} = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{R}{g}} \arccos \frac{1}{\sqrt{p}};$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}.$$

b) 4p

Corespunzător poziției de echilibru a sistemului, reprezentată în desenul a din figura 5, avem:

$$2\overset{!}{T}_0 + \overset{!}{G} = 0;$$

$$T_0 = \frac{mg}{2},$$

unde T_0 este tensiunea din orice punct al firului:

$$T_0 = k_1 \Delta x_{1e} = k_2 \Delta x_{2e},$$

unde Δx_{1e} și respectiv Δx_{2e} sunt alungirile celor două resorturi în momentul echilibrului sistemului.

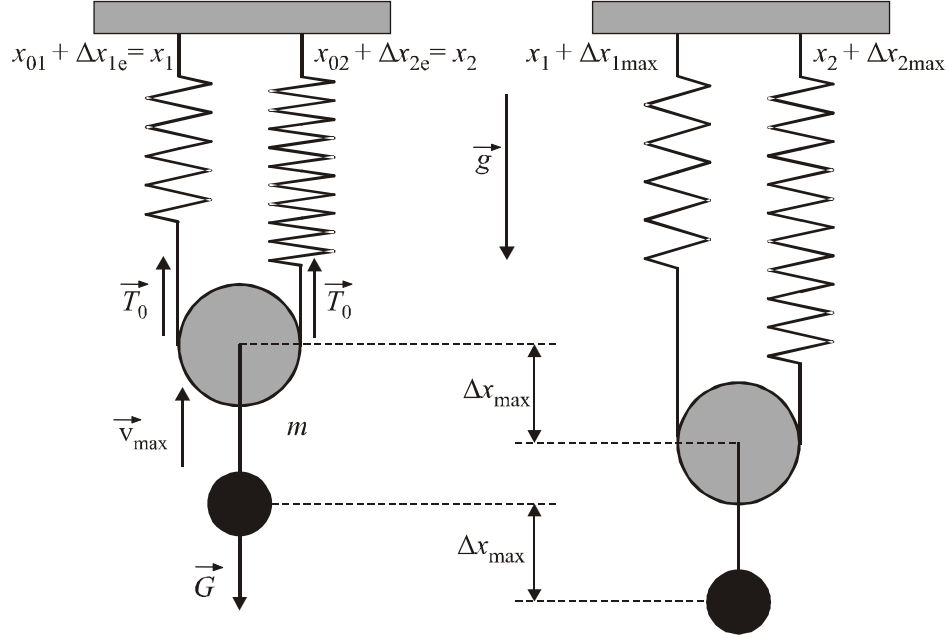


Fig. 5

În poziția extremă inferioară, reprezentată în desenul *b*, când sistemul este în repaus (dar nu în echilibru) și alungirile suplimentare ale resorturilor sunt $\Delta x_{1\max}$ și respectiv $\Delta x_{2\max}$, astfel încât deplasarea verticală a corpului este:

$$\Delta x_{\max} = \frac{1}{2}(\Delta x_{1\max} + \Delta x_{2\max}),$$

surplusul de energie potențială de deformare dobândit de sistem este:

$$\begin{aligned} \Delta W_p = & k_1 \frac{(\Delta x_{1e} + \Delta x_{1\max})^2 - (\Delta x_{1e})^2}{2} + \\ & + k_2 \frac{(\Delta x_{2e} + \Delta x_{2\max})^2 - (\Delta x_{2e})^2}{2}. \end{aligned}$$

Evoluția sistemului din starea *b* în starea *a* se face cu respectarea legii transformării și a conservării energiei mecanice, astfel încât avem:

$$\Delta W_p = mg\Delta x_{\max} + \frac{mv_{\max}^2}{2}.$$

În transpunerea acestei legi am avut în vedere faptul că pe parcursul evoluției sistemului mișcarea discului scripetelui este numai o mișcare de translație, deoarece tensiunile din fir, la capetele diametrului orizontal al discului, sunt permanent egale.

Rezultă:

$$2k_1\Delta x_{1e}\Delta x_{1\max} + k_1(\Delta x_{1\max})^2 + 2k_2\Delta x_{2e}\Delta x_{2\max} + k_2(\Delta x_{2\max})^2 =$$

$$= mg(\Delta x_{1\max} + \Delta x_{2\max}) + mv_{\max}^2;$$

$$k_1 \Delta x_{1e} = k_2 \Delta x_{2e} = \frac{1}{2} mg;$$

$$k_1 (\Delta x_{1\max})^2 + k_2 (\Delta x_{2\max})^2 = mv_{\max}^2;$$

$$k_1 \Delta x_{1\max} = k_2 \Delta x_{2\max};$$

$$k_1 \Delta x_{1\max} (\Delta x_{1\max} + \Delta x_{2\max}) = mv_{\max}^2;$$

$$2k_1 \Delta x_{1\max} \Delta x_{\max} = mv_{\max}^2;$$

$$\Delta x_{1\max} = \frac{2k_2}{k_1 + k_2} \Delta x_{\max};$$

$$\frac{4k_1 k_2}{k_1 + k_2} (\Delta x_{\max})^2 = mv_{\max}^2.$$

Dacă pentru amplitudinea verticală Δx_{\max} , oscilațiile sunt armonice, înseamnă că:

$$v_{\max} = \omega \Delta x_{\max},$$

unde ω este pulsația oscilațiilor armonice;

$$\omega = 2\sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}.$$

În plus, deoarece accelerația maximă a corpului, orientată pe verticală în jos atunci când acesta coboară, nu poate depăși accelerația căderii gravitaționale libere (firul de sub disc nu poate trage de acesta în jos) rezultă:

$$a = \omega^2 \Delta x_{\max} \leq g;$$

$$\Delta x_{\max} \leq \frac{g}{\omega^2};$$

$$\Delta x_{\max} \leq \frac{mg(k_1 + k_2)}{4k_1 k_2}.$$

c) 3p

În condițiile problemei, când punctul A este foarte aproape de punctul B, și când corpul alunecă de-a lungul arcului AB, așa cum indică desenul *a* din figura 6, mișcarea acestuia în interiorul cavității sferice este o mișcare oscilatorie armonică cu perioada:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}},$$

astfel încât durata parcurgerii arcului AB este:

$$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Pentru corpul care se deplasează de-a lungul corzii AB, alunecând fără frecare pe o tijă liniară cu înclinația β față de orizontală, așa cum indică desenul *b* din figura 6, rezultă:

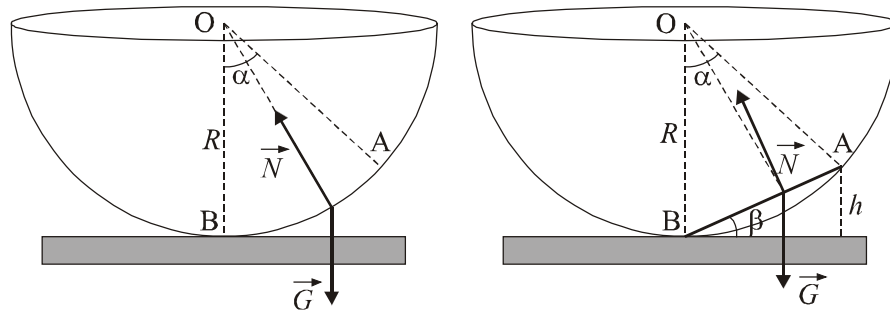


Fig. 6

$$h = R(1 - \cos \alpha) = 2R \sin^2 \frac{\alpha}{2} \approx R \frac{\alpha^2}{2};$$

$$AB = l \approx R\alpha;$$

$$h = l \sin \beta \approx l\beta = R\alpha\beta; \quad \beta = \frac{\alpha}{2};$$

$$a = g \sin \beta \approx g\beta = \frac{g}{2}\alpha;$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2l}{a}} = 2\sqrt{\frac{R}{g}},$$

reprezentând durata deplasării corpului de-a lungul corzii AB;

$$t_2 > t_1.$$

În aceste condiții, intervalul de timp care separă sosirile celor două corpuri în punctul inferior al cavității, este:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{R}{g}} \left(2 - \frac{\pi}{2} \right).$$

Problema 2 10p

a) 2p

Se știe că într-o soluție apoasă, sulfatul de cupru disociază conform relației:



Experimentul prezentat evidențiază o electroliză cu anod solubil. În câmpul electric dintre cei doi electrozi ionii pozitivi (Cu^{++}) se deplasează spre electrodul negativ (Catod), primesc doi electroni ($2e^-$), se neutralizează (atomi de Cu) și se depun pe Catod, iar ionii negativi (SO_4^{--}) se deplasează spre electrodul pozitiv (Anod), cedează doi electroni ($2e^-$), se neutralizează (radical activ, SO_4) și reacționează cu Anodul, refăcând moleculele de CuSO_4 , ”consumând” anodul (electroliză cu Anod solubil).

Ca urmare, în experimentul propus, electrodul care se consumă este Anodul. Cei doi electrozi sunt confecționați din sârmă de Cu.

b) 2p

Forțele care acționează asupra celor două tipuri de ioni, rezultați din disocierea CuSO_4 , sunt reprezentate în desenele din figurile 6 și 7.

Forțele care acționează asupra fiecărui ion sunt: forța Lorentz, forța electrică, forța de vâscozitate. Rezultanta acestor forțe, \vec{R} , determină traiectoria în formă de spirală cu raza din ce în ce mai mică, ceea ce justifică mișcarea turbionară de ansamblu în jurul fiecărui electrod.

Turbioanele ionilor de Cu^{++} sunt în jurul Catodului, astfel încât acești ioni ajung tot pe Catod, dar nu în mod direct, cum s-ar întâmpla în absența forțelor Lorentz (în absența câmpului magnetic).

Turbioanele ionilor de SO_4^{--} sunt în jurul Anodului, astfel încât acești ioni ajung tot pe Anod, dar nu în mod direct, cum s-ar întâmpla în absența forțelor Lorentz (în absența câmpului magnetic).

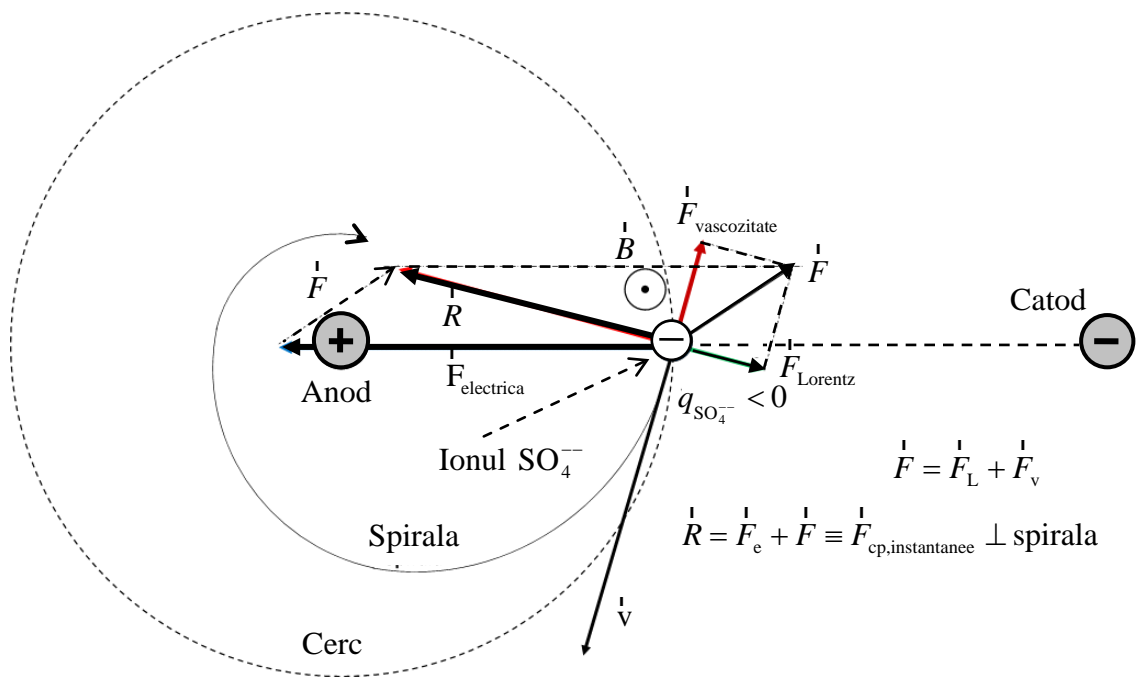


Fig. 6

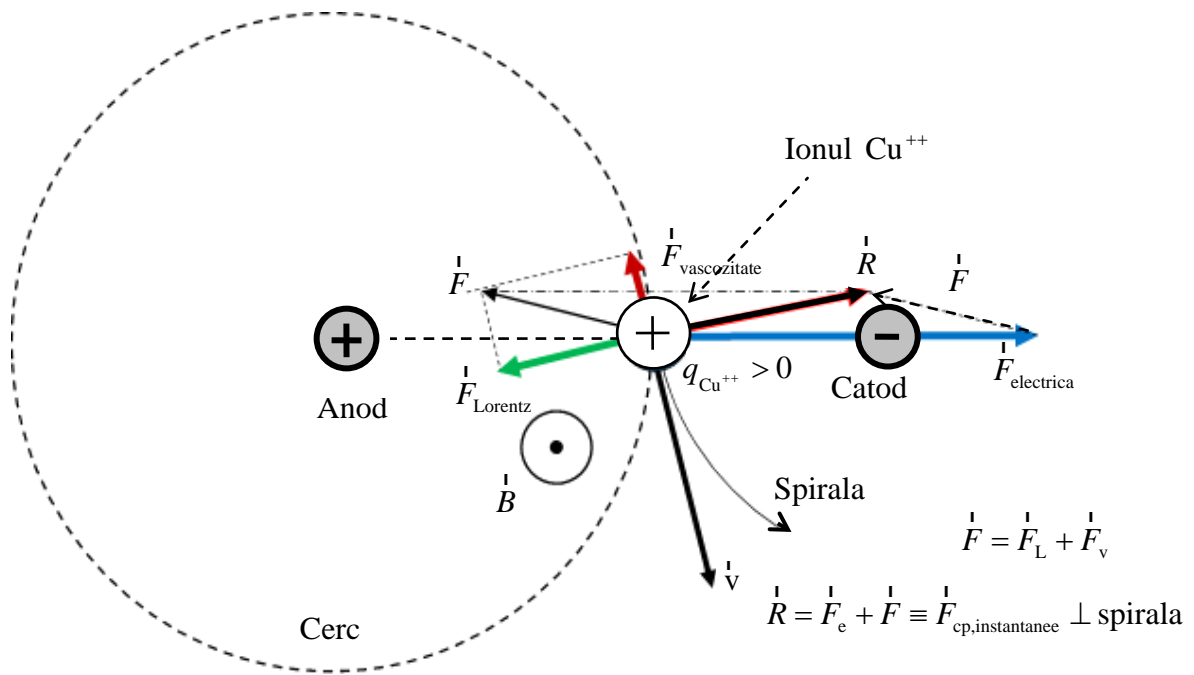


Fig. 7

c) 2p

În desenul din figura 8 sunt prezentate sensurile curgerilor turbionare ale soluției din cuva de electroliză, în jurul celor doi electrozi.

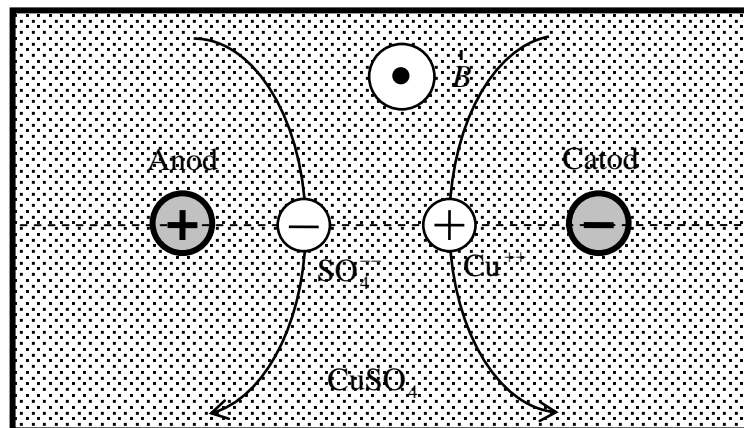


Fig. 8

d) În absența câmpului magnetic, dar în prezența câmpului electric dintre pereții vasului, cele două tipuri de ioni (Cu^{++} ; SO_4^{--}), rezultați din disocierea moleculelor de CuSO_4 , se vor deplasa de-a lungul razelor cuvei de electroliză formată între cei doi pereți cilindrici coaxiali.

Apariția câmpului magnetic presupune și apariția forțelor Lorentz.

În desenul din figura 9 sunt reprezentate forțele Lorentz, pentru fiecare din cei doi ioni, care la un anumit moment se aflau pe o aceeași rază a cuvei:

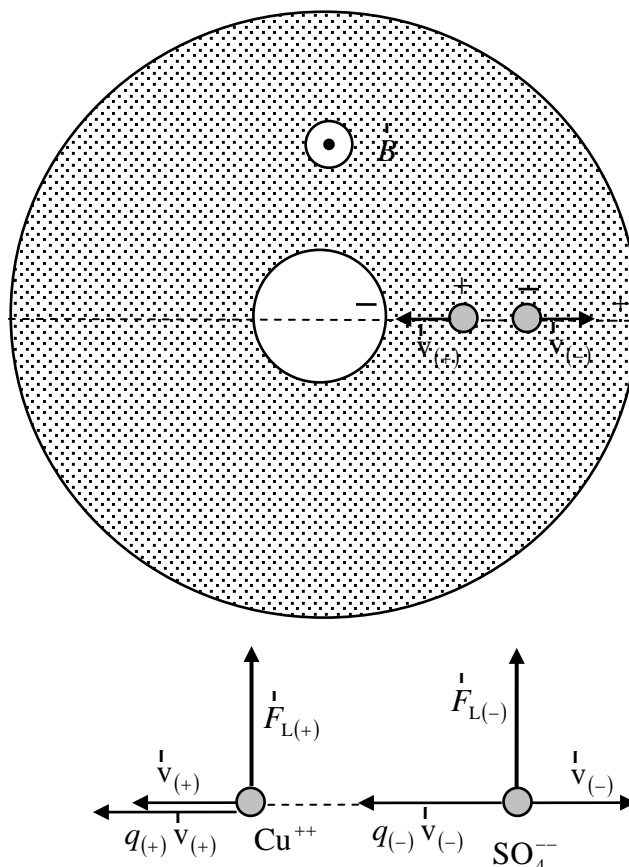
$$\vec{F}_{L(+)} = q_{(+)} \vec{v}_{(+)} \times \vec{B}; \quad \vec{F}_{L(-)} = q_{(-)} \vec{v}_{(-)} \times \vec{B},$$

orientările lor fiind identice.

Ca urmare, întreaga soluție din vas va fi antrenată într-o curgere turbionară în același sens.

Deoarece la începutul experimentului întregul dispozitiv era în repaus, momentul cinetic total al sistemului este nul. În absența unor forțe exterioare, momentul cinetic al ansamblului trebuie să se conserve.

Rezultă că în timpul experimentului, sistemul celor două vase coaxiale dobânziște o mișcare de rotație în jurul axului vertical, în sens invers față de rotația turbionară a soluției dintre pereții cilindrici.



e) 2p

Datorită disocierii moleculelor de NaCl, în apa mării se află ioni de Na^+ și ioni de Cl^- în stare liberă. Câmpurile electrice ale celor două benzi metalice vor acționa asupra celor două tipuri de ioni, deplasându-i în sensuri opuse, în jurul submarinului. Ca urmare, în jurul submarinului, atât prin partea sa superioară, cât și prin partea sa inferioară, se vor constitui curenți ionici al căror sens este de la banda (+) spre banda (-). Cele două tipuri de ioni se deplasează în sensuri opuse, dar mișcărilor lor sunt echivalente cu doi curenți electrici de același sens.

Deplasându-se în câmpul magnetic al electromagnetului, asupra acestor ioni vor acționa forțe Lorentz, $\vec{F}_L = q \vec{v} \times \vec{B}$. Pentru oricare dintre cele două tipuri de ioni, oriunde s-ar afla ei în apropierea submarinului, forțele Lorentz sunt orientate în același sens, de-a lungul submarinului, așa cum indică desenul din figura alăturată.

Efectul acestor forțe Lorentz va fi împingerea apei de-a lungul submarinului. Ca urmare a principiului acțiunilor reciproce, submarinul va fi propulsat în sens invers.

Schimbarea sensului de înaintare a submarinului se poate face fie prin schimbarea polarităților electrice ale celor două benzi, fie prin schimbarea polarității electromagnetului.

