CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ – 11 martie 2023

Secțiunea H1

Filiera tehnologică – toate profilurile

Clasa a IX –a

Subiectul 1.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2m+5}{5-2m}x+2,\ m\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5}{2}\right\}$.

a) Determinați cel mai mare număr întreg *m* pentru care funcția *f* este strict crescătoare.

b) Pentru *m=2* determinați funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=ax+b, a,b\in\mathbb{R}, a\neq 0$ care verifică relația

$$(f\circ g)(x)+(g\circ f)(x)=18x-6,\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}.$$

Subiectul 2.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea $5f(x)+2f(-x)=2x^3+5x$, pentru orice număr real *x*.

a) Determinați funcția *f*.

b) Demonstrați că funcția *f* este o funcție impară.

c) Calculați suma $S=f(-100)+f(-99)+f(-98)+\cdots+f(99)+f(100)$.

Subiectul 3.

Se consideră ecuația $(sina+sinb)x^2-2(cosa+cosb)x-sina-sinb=0, unde\ a,b\in(0,\frac{\pi}{2}]$.

a) Demonstrați identitatea $(cosa+cosb)^2+(sina+sinb)^2=4cos^2\frac{a-b}{2}$.

b) Arătați că ecuația are rădăcini reale și distincte pentru orice $a,b\in(0,\frac{\pi}{2}]$.

c) Determinați valoarea sumei *a+b* știind că $x_1^2+x_2^2=2, unde\ x_1\ și\ x_2$ sunt rădăcinile ecuației.

Subiectul 4.

La începutul unui concurs de orientare turistică participanților li se indică traseul de urmat: din punctul de plecare P se parcurg 500m spre nord, apoi 300m spre est, 900m spre sud și 600m spre vest, ajungând în final la sosire în punctul S.

Se consideră un sistem de coordonate cu originea în P , axa Px pe direcția vest-est (sensul spre est) și axa Py pe direcția sud-nord (sensul spre nord).

a) Trasați, în sistemul ales, traiectoria unui concurent care a străbătut întreg traseul, la scara 1:10 000 și determinați coodonatele punctului de sosire S.

b) Calculați modulul vectorului $\overrightarrow{PS}$ din desenul trasat.

c) Un concurent străbate întreg traseul cu viteza constantă de 5km/h, iar un arbitru parcurge doar distanța $|\overrightarrow{PS}|$ cu viteza constantă de 1,25km/h. Stabiliți care dintre cei doi ajunge primul în punctul S.

Notă: *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ - 11 martie 2023

Secțiunea H2

Filiera Teoretică: profilul Real – specializarea Științe ale Naturii

Clasa a IX -a

Subiectul 1.

a) Fie mulțimile $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\;\middle|\;\frac{|x^2-16|}{|5x-8|-13}\le 0\right\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{Z}\;\middle|\;\sqrt{\frac{5-x}{36}}\in\mathbb{Q}\right\}$.

Aflați elementele mulțimii $A\cap B$.

b) Rezolvați ecuația $9x^2+y^2=12x+7y$, pentru x și y numere întregi.

Subiectul 2.

Se consideră șirurile $(a_n)_{n\ge1}$ și $(b_n)_{n\ge1}$ definite prin $a_1=2$, $a_{n+1}=\frac{5a_n+3}{a_n+3}$, $b_n=\frac{a_n-3}{a_n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Arătați că șirul $(b_n)_{n\ge1}$ este o progresie geometrică și aflați formula termenului general al șirului $(b_n)_{n\ge1}$.

b) Arătați că $a_n\ge 2$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Subiectul 3.

Două bazine sunt umplute cu apă, fiecare prin câte un robinet diferit. Robinetul primei piscine are pe parcursul primei ore debitul de a litri/oră. Pe parcursul celei de-a doua ore debitul este înjumătățit. Pe parcursul celei de-a treia ore debitul este înjumătățit din nou față de cel anterior și tot așa mai departe, în fiecare oră.

Robinetul celui de-al doilea bazin are pe parcursul primei ore debitul tot de a litri/oră. Pe durata celei de-a doua ore debitul este dublu, pe parcursul celei de-a treia ore este dublu față de cel anterior și tot așa mai departe. Știind că cele două robinete umplu bazinele în același număr de ore, aflați raportul dintre volumele celor două bazine.

Subiectul 4.

Fie dreptunghiul $ABCD$ și triunghiul dreptunghic ABE cu $\sphericalangle A=90^\circ$. Știind că $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EN}=2\overrightarrow{NB}$ și $EC\cap AB=\{M\}$, se cere:

a) Arătați că punctele D, M și N sunt coliniare.

b) Dacă M este ortocentrul triunghiului EDB, P este mijlocul lui DN și Q este mijlocul lui EF, unde $\{F\}=EC\cap DB$, arătați că $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MQ}=\vec{0}$.

Notă: *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ – 11 martie 2023

Secțiunea H1

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică – toate profilurile

Clasa a X –a

Subiectul 1.

a) Demonstrați că $(\log_3 36)\cdot\left(\log_{\sqrt{6}} 3\right)-(\log_5 8)\cdot\left(\log_{2\sqrt{2}} 5\right)=2$

b) Demonstrați că $\dfrac{1}{\log_2 6+\log_2{}^2 3}+\dfrac{1}{\log_3 6+\log_3{}^2 2}+\dfrac{1}{1+\log_2 3+\log_3 2}=1$.

Subiectul 2.

a) Determinați numărul numerelor pare de 10 cifre distincte, știind că pe pozițiile impare se găsesc cifre impare, iar pe pozițiile pare se găsesc cifrele pare.

b) Determinați numărul natural n, știind că dezvoltarea $\left(\sqrt{3}+\sqrt[6]{2}\right)^n$ conține exact 10 termeni raționali.

Subiectul 3. Se consideră $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$, unde $i^2=-1$.

a) Demonstrați că $z^2-z+1=0$ și că $z^3=-1$.

b) Determinați numerele complexe a,b,c știind că acestea verifică relațiile $a+b+c=1,\ a+z^2b-zc=2,\ a-zb+z^2c=3.$

Subiectul 4.

Un biolog stabilește într-un studiu că o epidemie se răspândește în populația unui sat după legea $f(t)=1-e^{-0.35\cdot t}$, unde $f(t)$ reprezintă procentul din populație care a intrat în contact cu boala, iar t reprezintă numărul de săptămâni de la apariția bolii în sat. După cât timp, procentul populației infectate devine 80%?(se poate utiliza $\ln 5\cong 1,6$)

Notă: *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ - 11 martie 2023
Secțiunea H2

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică: profilul Real – specializarea Științe ale Naturii

Clasa a X -a

Subiectul 1.

Se consideră șirul $(z_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$, definit astfel: $z_n = (1+i)^n + (1-i)^n$, unde $i^2 = -1$.

a) Demonstrați că $z_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculați suma $S = \sum_{k=1}^{2023} z_k$.

Subiectul 2.

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)^x + a \cdot \left(\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^x$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Pentru $a = 1$ demonstrați că *f* este funcție pară.

b) Pentru $a = -2$ rezolvați ecuația $f(x) = -1$.

Subiectul 3.

Să se demonstreze că $x\log_2\left(2^y + 2^z\right) + y\log_2\left(2^z + 2^x\right) + z\log_2\left(2^x + 2^y\right) \leq 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$, pentru orice numere $x, y, z \geq 1$.

Subiectul 4.

Două puncte mobile A, B se deplasează în reperul cartezian (xOy) după traiectoriile $y_A = \log_5\left(7^x - 2\right)$ și respectiv $y_B = \log_7\left(5^x + 2\right)$. Să se determine la ce distanță de originea O a reperului se întâlnesc cele două puncte mobile.

Notă: *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ – 11 martie 2023

Secțiunea H1

Filiera tehnologică – toate profilurile

Clasa a XI –a

Subiectul 1.

În mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 2023^n & 7\end{pmatrix}$, unde $n\in\mathbb{N}$.

a) Demonstrați că **nu** există $a,b,c\in\mathbb{R}$ și $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $aA+bB+cI_2=C$.

b) Determinați A^{2023}.

c) Demonstrați că $B^n=I_2+(2^n-1)A,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Subiectul 2.

Se consideră mulțimea de matrice $G=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

a) Arătați că dacă $A,B\in G$, atunci $A+B\in G$ și $A\cdot B\in G$.

b) Demonstrați că orice matrice nenulă din *G* este inversabilă.

c) Demonstrați că dacă $A,B\in G$ și $A\cdot B=O_2$, atunci $A=O_2$ sau $B=O_2$.

Subiectul 3.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2^x\cdot x, & x<1\\ x^2+2x-1, & x\ge 1\end{cases}$.

a) Determinați ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției *f*.

b) Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ admite cel puțin o soluție în intervalul $[-1,2]$.

c) Determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=0$ să fie paralelă cu dreapta de ecuație $y=ax+2$.

Subiectul 4.

La o clasă a XI-a profesorul scrie pe tablă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x+\cos x+x$. Pentru orice $n\ge 1$, notează cu $f_{n+1}(x)=f_n'(x),\ x\in\mathbb{R}$, iar $f_1(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Propune elevilor săi următorul joc: fiecare dintre ei va ieși la tablă în ordine alfabetică și va scrie rezultatul pentru $f_n(0)$, fiecare elev luându-l pe *n* drept numărul său de la catalog.

a) Ce numere vor fi scrise pe tablă?

b) Dacă în clasă sunt 28 de elevi, aflați care sunt ultimele două numere scrise pe tablă și precizați de câte ori este scris fiecare număr.

Notă: *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ - 11 martie 2023
Secțiunea H2

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică: profilul Real – specializarea Ştiințe ale Naturii

Clasa a XI-a

Subiectul 1.

Se considera matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ şi $X(a) = I_2 + aA$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Arătaţi că $X(a)X(b) = X(ab + a + b)$,$(\forall)a,b\in\mathbb{R}$ şi determinaţi perechile de numere întregi (a,b) astfel încât $X(a)\, X(b) = I_2$.

b) Aflaţi numărul real a astfel încât $det(X(a)X(-a)) \geq 3a+3$.

c) Aflaţi matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât are loc relaţia $X \cdot X(1) = A$.

Subiectul 2.

Fie funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\ln(x+1)-\ln(x-1)$.

a) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției *f*.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(f(x)-2x\right)$.

c) Arătaţi că ecuaţia $f(x+2)=f(x)$ are cel puţin o soluţie în intervalul $(1,\infty)$.

Subiectul 3.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că $|f(x)-x|\leq x^2$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

a) Calculaţi $f(0)$.

b) Demonstraţi că funcţia *f* este continuă în $x_0=0$.

Subiectul 4.

Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ care apare afișată pe monitorul unui calculator.

a) Printr-un program, la un prim pas, matricea *A* este înlocuită pe monitorul calculatorului cu pătratul ei. Procesul se repetă şi la pasul doi apare afişat A^3, la pasul următor apare A^4 şi se reia procesul de atâtea ori de câte ori a fost comandat de către programator. Aflați câți pași trebuie să comande programatorul pentru ca pe monitor să apară la final o matrice cu suma tuturor elementelor egală cu 1025.

b) Printr-un nou program, la primul pas, elementele unei linii oarecare ale matricei *A* sunt mărite cu 1 și noua matrice obținută în acest mod înlocuiește matricea *A* afișată inițial pe monitorul calculatorului. Procesul se repetă în mod automat cu elementele unei linii oarecare, aceeași sau oricare din celelalte două, din noua matrice afișată pe monitor și se reia de atâtea ori de câte ori a fost programat. Aflați câți pași trebuie să comande programatorul pentru ca pe monitor să apară la final o matrice cu suma tuturor elementelor egală cu 1025.

Notă: *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ – 11 martie 2023

Secțiunea H1

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică – toate profilurile

Clasa a XII –a

Subiectul 1.

Se consideră mulțimea de matrice $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

a) Arătați că, dacă $X\in A$ și $Y\in A$, atunci $X+Y\in A$.
b) Demonstrați că, dacă $X\in A$, $Y\in A$ și $XY=O_2$, atunci $X=O_2$ sau $Y=O_2$.
c) Admitem cunoscut faptul că A este inel în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor. Determinați elementele inversabile ale acestui inel.

Subiectul 2.

Pentru a,b din mulțimea $M=[0,\infty)$ se definește operația $a*b=\ln\left(e^a+e^b-1\right)$.

a) Arătați că pentru orice $a,b\in M$, rezultă $a*b\in M$.
b) Demonstrați că legea de compoziție $"*"$ este asociativă.
c) Determinați $a\in M$ astfel încât $\underbrace{a*a*a*...*a}_{de\ 2023\ ori\ a}=2a$.

Subiectul 3.

Se consideră funcțiile $f,F:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{2x}{(x+1)\left(x^2+1\right)}$, $F(x)=a\ln(x+1)+b\ln\left(x^2+1\right)+c\cdot arctgx$.

a) Determinați $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția F să fie o primitivă a funcției f.
b) Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.
c) Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $[0,\infty)$.

Subiectul 4.

Mașinile folosite de o anumită firmă de curierat consumă motorină. Notăm cu $M(t)$ cantitatea de motorină (exprimată în litri) consumată de o mașină, începând de luni, ora $0:00$ și până la momentul t, unde $t\in[0,7]$. Momentul 7 corespunde zilei de duminică, ora 24:00 (astfel, intervalele $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$, ..., $[6,7]$ corespund zilelor de luni, marți, ..., duminică). Presupunem că funcția $M:[0,7]\to\mathbb{R}$ este derivabilă, cu $M(0)=0$ și $M'(t)=\left(t^2+1\right)e^{4-t}$, $t\in[0,7]$.

a) Demonstrați că $F(x)=-\left(x^2+2x+3\right)e^{4-x}$, $x\in\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left(x^2+1\right)e^{4-x}$.
b) Demonstrați că $M(t)=3e^4-\left(t^2+2t+3\right)e^{4-t}$, $\forall t\in[0,7]$.
c) Arătați că în ziua de luni o mașină consumă mai puțin de 53 l de motorină.
d) Stabiliți în ce zi a săptămânii se realizează cel mai mare consum de motorină.

În calcule, considerați $2,7<e<2,8$.

Notă: *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEȚEANĂ - 11 martie 2023
Secțiunea H2

Filiera Teoretică: profilul Real – specializarea Științe ale Naturii

Clasa a XII -a

Subiectul 1.

Pentru $a \in \mathbb{R}$ considerăm mulțimea $G_a = (a, +\infty)$ și legea de compoziție pe G_a definită prin $x * y = xy - ax - ay + a^2 + a$, pentru orice $x, y \in G_a$.

a) Arătați că $(G_a, *)$ este grup abelian.

b) Demonstrați că $f_a: G_a \to \mathbb{R}, f_a(x) = \ln(x - a)$ este izomorfism între grupurile $(G_a, *)$ și $(\mathbb{R}, +)$.

c) Definiți o lege de compoziție „$\circ$” pe $G = (2023, +\infty)$ și o lege de compoziție „Δ” pe $H = (2024, +\infty)$ astfel încât $(G, \circ)$ $și$ (H, Δ) să fie grupuri abeliene izomorfe.

Subiectul 2.

Pe mulțimea $G = (1, +\infty)$ definim legea de compoziție asociativă $x \circ y = \sqrt[3]{x^{\log_2 y}}$ pentru orice $x, y \in G$. Arătați că:

a) $x \circ y = 2^{\frac{1}{3}\log_2 x \cdot \log_2 y}$, pentru orice $x, y \in G$;

b) pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, există $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in G, x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$ astfel încât $x_1 \circ x_2 \circ x_3 \circ \dots \circ x_n$ să fie număr natural;

c) $2022 \circ 2024 < 2023 \circ 2023$.

Subiectul 3.

În urma unui accident, la o fabrică de produse chimice, se produce o poluare a mediului din apropierea fabricii. Coeficientul de poluare este modelat prin numărul real $I_n = 100 \cdot \int_1^2 \frac{dx}{x^n\sqrt{1+x^2}}$, $n \in \mathbb{N}$. I_0 este coeficientul de poluare imediat după accident, I_n este coeficientul de poluare, în ziua „n”, după accident. Mediul este considerat nepoluat dacă coeficientul de poluare este cel mult egal cu 5.

a) Arătați că $I_0 > 50$.

b) Demonstrați că, în timp, coeficientul de poluare se micșorează (altfel spus arătați că $I_n \geq I_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

c) Arătați că, în cel mult 20 de zile, mediul devine nepoluat.

Subiectul 4.

Funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numește asociată funcției continue $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dacă $g(x) + \int_0^x f(x - t)dt = e^x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) Determinați funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asociată funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{|x|+1}$.

b) Dacă $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este asociată funcției continue $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, arătați că g este derivabilă și $g'(x) = e^x - f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

c) Determinați funcția continuă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dacă, funcția asociată acesteia, este egală cu funcția f.

Notă: *Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

MINISTERUL EDUCAȚIEI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ – 11 martie 2023

Secțiunea H1

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

Filiera tehnologică – toate profilurile

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a IX –a

Subiectul 1.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2m+5}{5-2m}x+2, m\in\mathbb{R}-\left\{\frac{5}{2}\right\}$.

a) Determinați cel mai mare număr întreg *m* pentru care funcția *f* este strict crescătoare.

b) Pentru *m=2* determinați funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=ax+b, a,b\in\mathbb{R}, a\neq 0$ care verifică relația

$$(f\circ g)(x)+(g\circ f)(x)=18x-6,\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}.$$

SOLUȚIE:

a) Pune condiția $\frac{2m+5}{5-2m}>0$.....1p

Obține $m\in\left(-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$.....2p

Găsește *m=2*.....1p

b) Determină $(f\circ g)(x)=9ax+9b+2$ și $(g\circ f)(x)=9ax+2a+b$.....1p

Obține $18ax+2a+10b+2=18x-6$ și determină $a=1$ și $b=-1$ 2p

Subiectul 2.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea $5f(x)+2f(-x)=2x^3+5x$, pentru orice număr real *x*.

a) Determinați funcția *f*.

b) Demonstrați că funcția *f* este o funcție impară.

c) Calculați suma $S=f(-100)+f(-99)+f(-98)+\cdots+f(99)+f(100)$.

SOLUȚIE:

a) Deduce $5f(-x)+2f(x)=-2x^3-5x$.....1p

Determină $f(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{3}x$.....2p

b) Verifică relația $f(-x)=-f(x), (\forall)x\in\mathbb{R}$.....1p

c) Observă că $f(-n)+f(n)=0, (\forall)\ n\in\{1,2,\dots,100\}$.....2p

Calculează $S=f(0)=0$.....1p

Subiectul 3.

Se consideră ecuația $(sina + sinb)x^2 - 2(cosa + cosb)x - sina - sinb = 0, unde\ a, b \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

a) Demonstrați identitatea $(cosa + cosb)^2 + (sina + sinb)^2 = 4cos^2\frac{a-b}{2}$.

b) Arătați că ecuația are rădăcini reale și distincte pentru orice $a, b \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

c) Determinați valoarea sumei a+b știind că $x_1^2 + x_2^2 = 2, unde\ x_1\ și\ x_2$ sunt rădăcinile ecuației.

SOLUȚIE:

a) Obține $(cosa + cosb)^2 + (sina + sinb)^2 = 2 + 2cos(a - b)$..........2p
Aplică formula $1 + cos2x = 2cos^2x$ și finalizează..........1p

b) Calculează $\Delta = 4[(cosa + cosb)^2 + (sina + sinb)^2] = 16cos^2\frac{a-b}{2}$..........1p
Demonstrează $cos\frac{a-b}{2} \neq 0, (\forall)a, b \in (0, \frac{\pi}{2}]$ și deduce că $\Delta > 0$, deci ecuația are rădăcini reale distincte..........1p

c) Scrie relațiile lui Viete și obține $x_1^2 + x_2^2 = \frac{4(cosa+cosb)^2}{(sina+sinb)^2} + 2$..........1p
Obține $2cos\frac{a+b}{2}cos\frac{a-b}{2} = 0, și\ cum\ cos\frac{a-b}{2} \neq 0, (\forall)a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow a + b = \pi$..........1p

Subiectul 4.

La începutul unui concurs de orientare turistică participanților li se indică traseul de urmat: din punctul de plecare P se parcurg 500m spre nord, apoi 300m spre est, 900m spre sud și 600m spre vest, ajungând în final la sosire în punctul S.
Se consideră un sistem de coordonate cu originea în P , axa Px pe direcția vest-est (sensul spre est) și axa Py pe direcția sud-nord (sensul spre nord).

a) Trasați, în sistemul ales, traiectoria unui concurent care a străbătut întreg traseul, la scara 1:10 000 și determinați coodonatele punctului de sosire S.

b) Calculați modulul vectorului $\overrightarrow{PS}$ din desenul trasat.

c) Un concurent străbate întreg traseul cu viteza constantă de 5km/h, iar un arbitru parcurge doar distanța $|\overrightarrow{PS}|$ cu viteza constantă de 1,25km/h. Stabiliți care dintre cei doi ajunge primul în punctul S.

SOLUȚIE:

a) Realizează desenul corespunzător traseului:
PA=500m, rezultă pe desen PA=5cm, deci A(0,5)..........1p
Deduce B(3,5), C(3,-4) și S(-3,-4)..........2p

b) Calculează $|\overrightarrow{PS}| = 5$..........1p

c) PA+AB+BC+CS=2,3km și PS=0,5km..........2p
Obține $t_c = \frac{2,3}{5} > t_a = \frac{0,5}{1,25}$ și deduce că arbitrul ajunge primul..........1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ – 11 martie 2023

Secțiunea H1

Filiera tehnologică – toate profilurile

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a X–a

Subiectul 1.

a) Demonstrați că $(\log_3 36)\cdot(\log_{\sqrt{6}} 3)-(\log_5 8)\cdot(\log_{2\sqrt{2}} 5)=2$.

b) Demonstrați că $\dfrac{1}{\log_2 6+\log_2{}^2 3}+\dfrac{1}{\log_3 6+\log_3{}^2 2}+\dfrac{1}{1+\log_2 3+\log_3 2}=1$.

SOLUȚIE:

a) $(\log_3 36)\cdot(\log_{\sqrt{6}} 3)=2\cdot(\log_3 6)\cdot 2\cdot(\log_6 3)=4\cdot\log_3 6\cdot\log_6 3=4$ 1p

$(\log_5 8)\cdot(\log_{2\sqrt{2}} 5)=2\cdot\log_5 2\sqrt{2}\cdot\log_{2\sqrt{2}} 5=2$ 1p

$(\log_3 36)\cdot(\log_{\sqrt{6}} 3)-(\log_5 8)\cdot(\log_{2\sqrt{2}} 5)=4-2=2$ 1p

b) $\dfrac{1}{\log_2 6+\log_2{}^2 3}=\dfrac{1}{1+\log_2 3+\log_2{}^2 3}$ 1p

$\dfrac{1}{\log_3 6+\log_3{}^2 2}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\log_2 3}+\dfrac{1}{\log_2{}^2 3}}=\dfrac{\log_2{}^2 3}{1+\log_2 3+\log_2{}^2 3}$ 1p

$\dfrac{1}{1+\log_2 3+\log_3 2}=\dfrac{1}{1+\log_2 3+\dfrac{1}{\log_2 3}}=\dfrac{\log_2 3}{1+\log_2 3+\log_2{}^2 3}$ 1p

$\dfrac{1}{\log_2 6+\log_2{}^2 3}+\dfrac{1}{\log_3 6+\log_3{}^2 2}+\dfrac{1}{1+\log_2 3+\log_3 2}=\dfrac{1+\log_2{}^2 3+\log_2 3}{1+\log_2+\log_2{}^2 3}=1$ 1p

Subiectul 2.

a) Determinați numărul numerelor pare de 10 cifre distincte, știind că pe pozițiile impare se găsesc cifre impare, iar pe pozițiile pare se găsesc cifrele pare.

b) Determinați numărul natural n, știind că dezvoltarea $\left(\sqrt{3}+\sqrt[6]{2}\right)^n$ conține exact 10 termeni raționali.

SOLUȚIE:

a) Cifrele impare se pot permuta în $5!=120$ moduri, iar cifrele pare se pot permuta tot în $5!=120$ moduri, așadar, din regula produsului, avem 14400 numere....................3p

b) $T_{k+1}=C_n^k\sqrt{3}^{\,n-k}\left(\sqrt[6]{2}\right)^k=C_n^k\cdot 3^{\frac{n-k}{2}}\cdot 2^{\frac{k}{6}}$, deci $\dfrac{k}{6}\in\mathbb{N}$, astfel că $k\in\{0,6,12,...,54\}$ 2p

Cum $k\le n$, avem că $n\in\{54,55,56,57,58,59\}$ 1p

Din $\dfrac{n-k}{2}\in\mathbb{N}$, avem că n este par, prin urmare $n\in\{54,56,58\}$ 1p

Subiectul 3. Se consideră $z=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$, unde $i^2=-1$.

a) Demonstrați că $z^2-z+1=0$ și că $z^3=-1$.

b) Determinați numerele complexe a, b, c știind că acestea verifică relațiile $a+b+c=1,\ a+z^2b-zc=2,\ a-zb+z^2c=3$.

SOLUŢIE:

a) Pentru $z^2-z+1=0$, se verifică sau se rezolvă ecuația..........1p

Pentru $z^3=-1$, se verifică, sau se inmulțește $z^2-z+1=0$ cu $z+1$ și se obține că $z^3+1=0$, deci $z^3=-1$..........1p

b) Adunând cele 3 relații, obținem că $3a+b\left(z^2-z+1\right)+c\left(z^2-z+1\right)=6$, deci $a=2$..........2p

Din prima relație avem că $b+c=-1$, iar din a doua relație, $b+z^2c=0$..........1p

Obținem $b=\frac{-3+i\sqrt{3}}{6},\ c=\frac{-3-i\sqrt{3}}{6}$..........2p

Subiectul 4. Un biolog stabilește într-un studiu că o epidemie se răspândește în populația unui sat după legea $f(t)=1-e^{-0.35\cdot t}$, unde $f(t)$ reprezintă procentul din populație care a intrat în contact cu boala, iar *t* reprezintă numărul de săptămâni de la apariția bolii în sat. După cât timp, procentul populației infectate devine 80%?(se poate utiliza $\ln 5\cong 1,6$)

SOLUŢIE:

Din $f(t)=80\%$, obținem că $e^{-0.35t}=\frac{1}{5}$..........3p

Din $e^{0.35t}=5$, obținem că $\frac{7t}{20}=\ln 5$, deci $t=\frac{20\ln 5}{7}$..........3p

$t\cong 4.57$..........1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ – 11 martie 2023

Secțiunea H1

Filiera tehnologică – toate profilurile

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI–a

Subiectul 1.

În mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 2023^n & 7\end{pmatrix}$, unde $n\in\mathbb{N}$.

a) Demonstrați că **nu** există $a,b,c\in\mathbb{R}$ și $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $aA+bB+cI_2=C$.

b) Determinați A^{2023}.

c) Demonstrați că $B^n=I_2+(2^n-1)A,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

SOLUŢIE:

a) Calculează $aA+bB+cI_2=\begin{pmatrix}a+2b+c & a+b\\ 0 & b+c\end{pmatrix}$ **1p**

Precizează că $\begin{pmatrix}a+2b+c & a+b\\ 0 & b+c\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}4 & 5\\ 2023^n & 7\end{pmatrix}$ deoarece $2023^n\neq 0\,,(\forall)\,n\in\mathbb{N}$ **1p**

b) Calculează $A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=A$, $A^3=A^2\cdot A=A\cdot A=A^2=A$

$\Rightarrow$ inductiv $A^{2023}=A$ **1p**

c) Verifică relaţia pentru $n=1: B^1=I_2+(2^1-1)\cdot A\ \Leftrightarrow B=I_2+A$ (adevărată) **1p**

Foloseşte metoda inducţiei matematice :

presupune că $B^k=I_2+(2^k-1)\cdot A$ este adevărată.

Demonstrează că: $B^{k+1}=B^k\cdot B\overset{pp}{=}(I_2+(2^k-1)\cdot A)(I_2+A)=$ **1p**

$=I_2+I_2\cdot A+(2^k-1)\cdot A\cdot I_2+(2^k-1)\cdot A^2\Rightarrow$ folosind $I_2\cdot A=A\cdot I_2=A$ și **1p**

punctul b) $B^{k+1}=I_2+A+(2^k-1)\cdot A+(2^k-1)\cdot A=$

$=I_2+[1+(2^k-1)+(2^k-1)]\cdot A=I_2+(2\cdot 2^k-1)\cdot A=I_2+(2^{k+1}-1)\cdot A$ **1p**

deci , conform principiului inducţiei matematice, relaţia este adevărată, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

Subiectul 2.

Se consideră mulțimea de matrice $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Arătați că dacă $A, B \in G$, atunci $A + B \in G$ și $A \cdot B \in G$.
b) Demonstrați că orice matrice nenulă din G este inversabilă.
c) Demonstrați că dacă $A, B \in G$ și $A \cdot B = O_2$, atunci $A = O_2$ sau $B = O_2$.

SOLUŢIE:

a) Dacă $A, B \in G \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ cu $a, b \in \mathbb{Z}$ şi $B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$ cu $c, d \in \mathbb{Z}$ **1p**

Atunci avem $A + B = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ -(b + d) & a + c \end{pmatrix}$ cu $a + c, b + d \in \mathbb{Z} \Rightarrow A + B \in G$ **1p**

şi $A \cdot B = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{pmatrix}$ cu $ac - bd, ad + bc \in \mathbb{Z} \Rightarrow A \cdot B \in G$ **1p**

b) $A \in G \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ cu $a, b \in \mathbb{Z}$ şi $detA = a^2 + b^2$ **1p**

Dacă $A \neq O_2 \Rightarrow a$ şi b nu sunt simultan 0 deci $a^2 + b^2 \neq 0 \Rightarrow detA \neq 0 \Rightarrow A$ inversabilă **1p**

c) $A \cdot B = O_2 \Leftrightarrow \det(A \cdot B) = detO_2 \Leftrightarrow detA \cdot detB = 0 \Leftrightarrow detA = 0 \; sau \; detB = 0$ **1p**
Dacă $detA = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0 \; deci \; A = O_2$
iar dacă $detB = 0 \Rightarrow c^2 + d^2 = 0 \Rightarrow c = d = 0 \; deci \; B = O_2$ **1p**

Subiectul 3.

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2^x \cdot x, & x < 1 \\ x^2 + 2x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$.

a) Determinați ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.
b) Demonstrați că ecuația $f(x) = 0$ admite cel puțin o soluție în intervalul $[-1, 2]$.
c) Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$ să fie paralelă cu dreapta de ecuație $y = ax + 2$.

SOLUŢIE:

a) Calculează $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2^x \cdot x = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{2^{-x}} =$ (caz $\frac{-\infty}{\infty}$ aplică l'Hospital)= **1p**

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{(x)'}{(2^{-x})'} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{-2^{-x} \cdot ln2} = \left(\frac{1}{-\infty}\right) = 0 \Rightarrow y = 0$ asimptotă orizontală la $-\infty$ pentru graficul funcției f. **1p**

b) Justifică continuitatea funcţiei pentru $x < 1$ şi $x > 1$ (produs de funcţii elementare, respectiv funcţie de gradul al II-lea) **1p**

Calculează $l_s(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (2^x \cdot x) = 2$;

$l_d(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} (x^2 + 2x - 1) = 2$; $\quad f(1) - 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 - 2$

deci $l_s(1) = l_d(1) = f(1)$ adică funcţia e continuă în $x = 1$. **1p**

Fiind continuă pe $\mathbb{R}$, f are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$ şi deoarece **1p**
$f(\;\;1) = 2^{-1} \cdot (\;\;1) = \frac{-1}{2} < 0$; $f(2) = 2^2 \mid 2 \cdot 2 \quad 1 = 7 > 0$ va rezulta că există cel puţin un număr real $c \in [-1; 2]$ a.î. $f(c) = 0$, adică există cel puţin soluţia $x - c$ pentru ecuația $f(x) = 0$.

c) Pentru $x < 1$, $f(x) = 2^x \cdot x$, produs de funcţii elementare, deci este derivabilă pe $(-\infty; 1)$ iar $f'(x) = (2^x \cdot x)' = 2^x ln2 \cdot x + 2^x$. **1p**
Tangenta la grafic în punctul de abscisă $x_0 = 0$ va fi paralelă cu dreapta de ecuaţie $y = ax + 2$ dacă şi numai dacă au pante egale, adică $f'(0) = a \Leftrightarrow 2^0 = a \Leftrightarrow a = 1$. **1p**

Subiectul 4.

La o clasă a XI-a profesorul scrie pe tablă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x+\cos x+x$. Pentru orice $n\geq 1$, notează cu $f_{n+1}(x)=f_n'(x),\ x\in\mathbb{R}$, iar $f_1(x)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$. Propune elevilor săi următorul joc: fiecare dintre ei va ieși la tablă în ordine alfabetică și va scrie rezultatul pentru $f_n(0)$, fiecare elev luându-l pe *n* drept numărul său de la catalog.

a) Ce numere vor fi scrise pe tablă?
b) Dacă în clasă sunt 28 de elevi, aflați care sunt ultimele două numere scrise pe tablă și precizați de câte ori este scris fiecare număr.

SOLUȚIE:

a) Elevul cu numărul 1 la catalog scrie pe tablă
$f_1(0)=f(0)=\sin 0+\cos 0+0=0+1+0=1$.
Elevul cu nr.2 la catalog calculează
$f_2(x)=f_1'(x)=(sinx+cosx+x)'=\cos x-\sin x+1$ deci va scrie pe tablă
$f_2(0)=\cos 0-\sin 0+1=1-0+1=2$.
Cel cu nr.3 va calcula $f_3(x)=f_2'(x)=(\cos x-\sin x+1)'=-\sin x-\cos x$ deci va scrie pe tablă $f_3(0)=-\sin 0-\cos 0=0-1=-1$.
Cel cu nr.4 va calcula $f_4(x)=f_3'(x)=(-\sin x-\cos x)'=-\cos x+\sin x$ deci va scrie pe tablă $f_4(0)=-\cos 0+\sin 0=-1+0=-1$.
Cel cu nr.5 va calcula $f_5(x)=f_4'(x)=(-\cos x+\sin x)'=\sin x+\cos x$ deci va scrie pe tablă $f_5(0)=\sin 0+\cos 0=0+1=1$.
Cel cu nr.6 va calcula $f_5(x)=f_4'(x)=(\sin x+\cos x)'=\cos x-\sin x$ deci va scrie pe tablă $f_6(0)=\cos 0-\sin 0=1-0=1$. **2p**
Cel cu nr.7 va calcula $f_6(x)=f_5'(x)=(\cos x-\sin x)'=-\sin x-\cos x$ deci va scrie pe tablă $f_7(0)=-\sin 0-\cos 0=0-1=-1$.

Se observă că $f_7(x)=f_3(x)$ şi la următoarele derivări vom găsi $f_8(x)=f_4(x)$, $f_9(x)=f_5(x)$, $f_{10}(x)=f_6(x)$, în consecinţa numerele scrise pe tablă începând de la al treilea elev se vor repeta în secvenţe de câte 4 numere (-1; -1; 1;1).
Aşadar numerele scrise pe tablă de elevi vor fi : -1; 1 şi 2. **1p**

b) Obsevăm că numerele scrise în ordinea numerotării din catalog sunt 1 şi 2; urmate de repetarea secvenţei (-1 ; -1; 1; 1) . Astfel că, eliminâd din calcul pe cei 2 elevi de la început ale căror rezultate nu respectă secvenţa menţionată, rămân 26 elevi ale căror rezultate se vor regăsi în 6 secvente complete de câte 4, iar ultimii 2 de la catalog vor scrie primele 2 numere dintr-o secvenţă incompletă de 4 , adică vor scrie -1 şi -1. **2p**
Astfel că 2 apare o dată ; 1 apare o data la început, apoi de câte 2 ori în cele 6 secvenţe care se repetă succesiv, deci de 13 ori, iar -1 apare de câte 2 ori în cele 6 secvente care se repetă şi încă de 2 ori la final, adică de 14 ori. **2p**

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ – 11 martie 2023

Secțiunea H1

Filiera tehnologică – toate profilurile

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE - Clasa a XII–a

Subiectul 1.

Se consideră mulțimea de matrice $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

a) Arătați că, dacă $X\in A$ și $Y\in A$, atunci $X+Y\in A$.
b) Demonstrați că, dacă $X\in A$, $Y\in A$ și $XY=O_2$, atunci $X=O_2$ sau $Y=O_2$.
c) Admitem cunoscut faptul că A este inel în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor. Determinați elementele inversabile ale acestui inel.

SOLUȚIE:

a) Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix}\in A$, unde $a,b\in\mathbb{Z}$ și $Y=\begin{pmatrix} c & d \\ -3d & c \end{pmatrix}\in A$, cu $c,d\in\mathbb{Z}$.

Se obține $X+Y=\begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & d \\ -3d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -3(b+d) & a+c \end{pmatrix}$ și cum $a+c,\ b+d\in\mathbb{Z}\Rightarrow X+Y\in A$ 2p

b) Fie $X,Y\in A$ astfel încît $XY=O_2$. Atunci una din aceste matrice are determinantul nul (altfel XY ar fi inversabilă).

Fie X această matrice, $X=\begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix}$. Cum $\det(X)=0\Rightarrow a^2+3b^2=0$, $a,b\in\mathbb{Z}\Rightarrow a=b=0$, deci $X=O_2$ ... 2p

c) Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix}\in A$ o matrice inversabilă a inelului A. Atunci există $Y=\begin{pmatrix} c & d \\ -3d & c \end{pmatrix}\in A$ astfel încât $XY=I_2$.

Trecând la determinanți, avem $(\det X)(\det Y)=\det(XY)=\det I_2=1$ 1p

Cum $\det X=a^2+3b^2\in\mathbb{N}$ și $\det Y=c^2+3d^2\in\mathbb{N}$, rezultă că $\det X=a^2+3b^2=1$ 1p

Dacă $b\neq 0$, atunci $a^2+3b^2\geq 3$, deci $\Rightarrow b=0$ de unde se obține $a^2=1\Leftrightarrow a=\pm1$. Prin urmare singurele matrice inversabile ale inelului A sunt I_2 și $-I_2$. 1p

Subiectul 2.

Pentru a,b din mulțimea $M=[0,\infty)$ se definește operația $a*b=\ln\left(e^a+e^b-1\right)$.

a) Arătați că pentru orice $a,b\in M$, rezultă $a*b\in M$.
b) Demonstrați că legea de compoziție "$*$" este asociativă.
c) Determinați $a\in M$ astfel încât $\underbrace{a*a*a*\ldots*a}_{de\ 2023\ ori\ a}=2a$.

SOLUȚIE:

a) Fie $a,b\in M$, adică $a,b\geq 0$. Atunci, folosind faptul că funcția funcțiile exponențială și logaritmică de bază e sunt strict crescătoare, avem $a*b=\ln\left(e^a+e^b-1\right)\geq\ln\left(e^0+e^0-1\right)=0$. Deci $a*b\in M$ 1p

b) Fie $a,b,c\in M$. Demonstrează că $(a*b)*c=a*(b*c)$ deoarece:

$(a*b)*c=\ln\left(e^a+e^b-1\right)*c=\ln\left(e^{\ln\left(e^a+e^b-1\right)}+e^c-1\right)=\ln\left(e^a+e^b+e^c-2\right)$ 1p

$a*(b*c)=a*\ln\left(e^b+e^c-1\right)=\ln\left(e^a+e^{\ln\left(e^b+e^c-1\right)}-1\right)=\ln\left(e^a+e^b+e^c-2\right)$ 1p

c) Prin inducție se demonstrează că pentru orice $a\in M$ și orice $n\in\mathbb{N}^*$ avem $\underbrace{a*a*a*\ldots*a}_{de\ n\ ori\ a}=\ln\left(ne^a-n+1\right)$..... 1p

Relația din enunț este echivalentă cu $\ln\left(2023e^a-2022\right)=2a\Leftrightarrow 2023e^a-2022=e^{2a}$. Notând $e^a=t$ se obține ecuația de gradul II, $t^2-2023t+2022=0$ cu soluțiile $t_1=1$ și $t_2=2022$ 2p

Se obține $a_1=0$ și $a_2=\ln 2022$ 1p

Subiectul 3.

Se consideră funcțiile $f,F:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$, $F(x)=a\ln(x+1)+b\ln(x^2+1)+c\cdot arctgx$.

a) Determinați $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția *F* să fie o primitivă a funcției *f*.

b) Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

c) Arătați că orice primitivă a funcției *f* este strict crescătoare pe intervalul $[0,\infty)$.

SOLUȚIE:

a) *F* este primitivă a funcției $f\Rightarrow F$ este derivabilă pe $(-1,\infty)$ și $F'(x)=f(x),\forall x\in(-1,\infty)$.

Se obține $F'(x)=\dfrac{(a+2b)x^2+(2b+c)x+(a+c)}{(x+1)(x^2+1)}$ 2p

Identificând coeficienții, se obține $a=-1,\ b=\dfrac{1}{2},\ c=1$ 1p

b) $\int_0^1 f(x)dx=-\ln(x+1)\Big|_0^1+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1+arctgx\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2$ 2p

c) Dacă *G* este o primitivă oarecare a lui *f* pe $(-1,\infty)$, atunci $G'(x)=f(x)=\dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)}\geq 0,\forall x\in[0,\infty)$, prin urmare *G* este sctrict crescătoare pe $[0,\infty)$. 2p

Subiectul 4.

Consumul de motorină realizat de fiecare mașină a unei firme de curierat, pe durata celor 7 zile dintr-o săptămână, este modelat de o funcție $M:[0,7]\to\mathbb{R}_+$ cu $M(0)=0$, care este derivabilă și verifică relația $M'(t)=(t^2+1)\cdot e^{4-t},\forall t\in[0,7]$, iar $M(t)$ reprezintă cantitatea de motorină consumată în intervalul $[0,t]$ exprimată în litri.

a) Demonstrați că $F(x)=-(x^2+2x+3)e^{4-x}$, $x\in\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x^2+1)e^{4-x}$.

b) Demonstrați că $M(t)=3e^4-(t^2+2t+3)e^{4-t},\ \forall t\in[0,7]$.

c) Verificați dacă lunea (prima zi a săptămânii) fiecare mașină din firmă consumă mai puțin de 53 de litri de motorină.

d) Considerând, pe parcursul unei săptămâni, intervalele zilnice $[0,1],\ [1,2],\ [2,3],\ ...,\ [6,7]$, corespunzătoare zilelor de luni, marți, ..., respectiv duminică, determinați în ce zi a săptămânii se realizează cel mai mare consum de motorină.

SOLUȚIE:

a) Justifică *F* este derivabilă și $F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$ 1p

b) Conform a) $M(t)=-(t^2+2t+3)e^{4-t}+k,\ \forall t\in[0,7],k\in\mathbb{R}$ 1p

și cum $M(0)=0\Rightarrow k=3e^4$, se obține $M(t)=3e^4-(t^2+2t+3)e^{4-t},\ \forall t\in[0,7]$ 1p

c) Lunea, fiecare mașină consumă $M(1)=3e^4-6e^3=3e^3(e-2)<3\cdot 2{,}8^3(2{,}8-2)<53$ litri 1p

d) Pentru fiecare $n=\overline{1,7}$, notăm $c(n)=M(n)-M(n-1)$ consumul de motorină al unei mașini în ziua *n* a săptămânii. Obținem $c(n)=e^{4-n}((e-1)n^2-2n+2e-3)$ 1p

Se arată că $c(n)<c(n-1)$ (calcul sau demonstrează că funcția *c* este descrescătoare) 1p

Prin urmare, cel mai mare consum de motorină se înregistrează lunea 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEȚEANĂ - 11 martie 2023

Secțiunea H2

Filiera Teoretică: profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a IX-a

Subiectul 1.

a) Fie mulțimile $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,/\,\frac{|x^2-16|}{|5x-8|-13}\le 0\right\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{Z}\,/\,\sqrt{\frac{5-x}{36}}\in\mathbb{Q}\right\}$.

Aflați elementele mulțimii $A\cap B$.

b) Rezolvați ecuația $9x^2+y^2=12x+7y$ pentru x,y numere întregi.

SOLUȚIE:

a) $A=\{-4,0,1,2,3,4\}$ **2p**

$\sqrt{5-x}\in\mathbb{Q}\Rightarrow 5-x$ pătrat perfect **1p**

Se verifică pe rând valorile din A și se obține $A\cap B=\{-4,1,4\}$ **1p**

b) $(3x-2)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{65}{4}\ /\cdot 4$ **1p**

$(6x-4)^2+(2y-7)^2=65$ **1p**

Cum $x,y\in\mathbb{Z}$, singurele cazuri sunt $6x-4=\pm1, 2y-7=\pm8$; $6x-4=\pm8, 2y-7=\pm1$;
$6x-4=\pm4, 2y-7=\pm7$ sau $6x-4=\pm7, 2y-7=\pm4$

de unde $(x,y)\in\{(0,0),(0,7),(2,4),(2,3)\}$ **1p**

Subiectul 2.

Se consideră șirurile $(a_n)_{n\ge1}$ și $(b_n)_{n\ge1}$ definite prin $a_1=2$, $a_{n+1}=\frac{5a_n+3}{a_n+3}$, $b_n=\frac{a_n-3}{a_n+1}$, pentru oricare $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Arătați că șirul $(b_n)_{n\ge1}$ este o progresie geometrică și aflați formula termenului general al șirului $(b_n)_{n\ge1}$.

b) Arătați că $a_n\ge 2$ pentru oricare $n\in\mathbb{N}^*$.

SOLUȚIE:

a) $b_{n+1}=\frac{a_{n+1}-3}{a_{n+1}+1}=\frac{\frac{5a_n+3}{a_n+3}-3}{\frac{5a_n+3}{a_n+3}+1}=\frac{2a_n-6}{6a_n+6}=\frac{1}{3}\cdot b_n$, pentru oricare $n\in\mathbb{N}^*$, ... **2p**

deci $(b_n)_{n\ge1}$ este o progresie geometrică de rație $\frac{1}{3}$ **1p**

$b_1=-\frac{1}{3}, b_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ **1p**

b) Inducție $p(n): a_n\ge 2, \forall n\in\mathbb{N}^*$, $p(1)$ adevărat **1p**

Presupunem $p(k)$ adevărat și demonstrăm $p(k+1)$ adevărat.

$a_{k+1}=5-\frac{12}{a_k+3}$

$a_k+3\ge 5\Rightarrow -\frac{12}{a_k+3}\ge -\frac{12}{5}$ de unde $a_{k+1}\ge\frac{13}{5}>2$, deci $p(k+1)$ adevărat. Finalizare. **2p**

Subiectul 3.

Două bazine sunt umplute cu apă, fiecare prin câte un robinet diferit. Robinetul primei piscine are pe parcursul primei ore debitul de a litri/oră. Pe parcursul celei de-a doua ore debitul este înjumătățit. Pe parcursul celei de-a treia ore debitul este înjumătățit din nou față de cel anterior și tot așa mai departe, în fiecare oră.

Robinetul celui de-al doilea bazin are pe parcursul primei ore debitul tot de a litri/oră. Pe durata celei de-a doua ore debitul este dublu, pe parcursul cei de-a treia ore debitul este dublu față de cel anterior și tot așa mai departe. Știind că cele două robinete umplu bazinele în același număr de ore, aflați raportul dintre volumele celor două bazine.

SOLUŢIE:

Fie V_1 și V_2 volumele celor două piscine.

După n ore, volumul primei piscine este $V_1 = a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \frac{a}{2^3} + \cdots + \frac{a}{2^{n-1}} = 2a \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ **3p**

După n ore, volumul celei de a doua piscine este $V_2 = a + 2a + 2^2a + \cdots + 2^{n-1}a = a(2^n - 1)$ **3p**

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2^{n-1}}$ **1p**

Subiectul 4.

Fie dreptunghiul $ABCD$ și triunghiul dreptunghic ABE cu $\sphericalangle A = 90^0$. Știind că $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EN} = 2 \cdot \overrightarrow{NB}$ și $EC \cap AB = \{M\}$, se cere:

a) Să se arate că punctele D, M și N sunt coliniare.

b) Dacă M este ortocentrul triunghiului EDB, P este mijlocul lui DN și Q este mijlocul lui EF, $EC \cap DB = \{F\}$, arătați că $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ} = \vec{0}$.

SOLUŢIE:

a) $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ **1p**

$\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}\right)$ **2p**

$\overrightarrow{DN} = \frac{4}{3} \cdot \overrightarrow{AE} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{4}{3} \cdot \overrightarrow{DM}$, deci D, M și N sunt coliniare **1p**

b) Cum ΔBDE isoscel de bază ED deducem că BA este bisectoarea $\sphericalangle EBD$ și deci $MN = MF$ **1p**

Din **a)** deducem că $\frac{DM}{MN} = 3$ și deci, $PM = MN$ **1p**

ΔBDE isoscel de bază ED rezultă că $DN = EF \Rightarrow PN = QF$ si deci $MQ = MF$, de unde concluzia. ... **1p**

MINISTERUL EDUCAȚIEI

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEȚEANĂ - 11 martie 2023

Secțiunea H2

Filiera Teoretică: profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE - Clasa a X -a

Subiectul 1.

Se consideră șirul $(z_n)_{n\geq 1}\subset\mathbb{C}$, definit astfel: $z_n=(1+i)^n+(1-i)^n$, unde $i^2=-1$.

a) Demonstrați că $z_n\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) Calculați suma $S=\sum\limits_{k=1}^{2023}z_k$.

SOLUȚIE:

a) $\overline{z_n}=\overline{(1+i)^n+(1-i)^n}=\left(\overline{1+i}\right)^n+\left(\overline{1-i}\right)^n=(1-i)^n+(1+i)^n$ 2p

$\overline{z_n}=z_n\Rightarrow z_n\in\mathbb{R}$ 1p

b) $S=\sum\limits_{k=1}^{2023}(1+i)^k+\sum\limits_{k=1}^{2023}(1-i)^k=S_1+S_2$ 1p

$S_1=\sum\limits_{k=1}^{2023}(1+i)^k=(1+i)\dfrac{(1+i)^{2023}-1}{1+i-1}=\dfrac{(1+i)^{2024}-1-i}{i}=-2^{1012}\cdot i+i-1$ 1p

$S_2=\sum\limits_{k=1}^{2023}(1-i)^k=(1-i)\dfrac{(1-i)^{2023}-1}{1-i-1}=\dfrac{(1-i)^{2024}-1+i}{i}=2^{1012}\cdot i-i-1$ 1p

$S=S_1+S_2=-2$ 1p

Subiectul 2.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)^x+a\cdot\left(\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^x$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Pentru $a=1$ demonstrați că *f* este funcție pară.

b) Pentru $a=-2$ rezolvați ecuația $f(x)=-1$.

SOLUȚIE:

a) Observă că $\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}=1$ 1p

Pentru $a=1\Rightarrow f(x)=\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)^x+\left(\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^x$

$f(-x)=\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)^{-x}+\left(\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^{-x}=\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)^x}+\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^x}=$ 1p

$=\dfrac{\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)^x+\left(\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^x}{\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)^x\cdot\left(\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^x}=\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)^x+\left(\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^x=f(x)\Rightarrow$ *f* este pară 1p

b) Pentru $a=-2$, ecuația $f(x)=-1$ devine $\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)^x-2\cdot\left(\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^x=-1$ 1p

Substituie $\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)^x=t$, $t>0\Rightarrow\left(\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^x=\dfrac{1}{t}$ 1p

Obține ecuația $t^2+t-2=0$ cu soluția care convine $t=1\Rightarrow x=0$ 2p

Subiectul 3.

Să se demonstreze că $x\log_2\left(2^y+2^z\right)+y\log_2\left(2^z+2^x\right)+z\log_2\left(2^x+2^y\right)\le 2\left(x^2+y^2+z^2\right)$, pentru orice numere $x,y,z\ge 1$.

SOLUȚIE:

Cum $y\ge 1,\ z\ge 1\Rightarrow \frac{1}{2^y}\le\frac{1}{2}$ şi $\frac{1}{2^z}\le\frac{1}{2}$, adunând se obține $\frac{1}{2^y}+\frac{1}{2^z}\le 1$ 2p

$\frac{2^y+2^z}{2^y\cdot 2^z}\le 1\Leftrightarrow 2^y+2^z\le 2^{y+z}$ 1p

$\log_2\left(2^y+2^z\right)\le y+z$ 1p

Se obține $\sum x\cdot\log_2\left(2^y+2^z\right)\le\sum x\cdot\left(y+z\right)=2\sum xy$ 1p

Dar, $2\sum xy\le 2\sum x^2$ 1p

Finalizează $\sum x\cdot\log_2\left(2^y+2^z\right)\le 2\sum x^2$ 1p

Subiectul 4.

Două puncte mobile *A*, *B* se deplasează în reperul cartezian $\left(xOy\right)$ după traiectoriile $y_A=\log_5\left(7^x-2\right)$ şi respectiv $y_B=\log_7\left(5^x+2\right)$. Să se determine la ce distanță de originea *O* a reperului se întâlnesc cele două puncte mobile.

SOLUȚIE:

Impune condiția de intersecție $y_A=y_B=y$ 1p

Se obține $\begin{cases} y=\log_5\left(7^x-2\right) \\ y=\log_7\left(5^x+2\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7^x-2=5^y \\ 5^x+2=7^y\end{cases}$ 1p

Rezultă $5^x+7^x=5^y+7^y$ 1p

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\Rightarrow\mathbb{R}, f\left(x\right)=5^x+7^x$

Funcția *f* este sumă de funcții strict crescătoare, deci este strict crescătoare $\Rightarrow$ *f* este injectivă $\Rightarrow x=y$ …..…. 1p

Se obține ecuația $7^x=5^x+2\Leftrightarrow\left(\frac{5}{7}\right)^x+2\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^x=1$ cu soluția unică $x=1\Rightarrow y=1$, deci cele 2 puncte se întâlnesc în punctul $M\left(1,1\right)$ 2p

Distanța $OM=\sqrt{2}$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEȚEANĂ - 11 martie 2023

Secțiunea H2

Filiera Teoretică: profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE - Clasa a XI-a

Subiectul 1. Se considera matricea $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$ şi $X(a)=I_2+aA,\ a\in\mathbb{R}$.

a) Arătaţi că $X(a)X(b)=X(ab+a+b)$, $(\forall)a,b\in\mathbb{R}$ şi determinaţi perechile de numere întregi (a,b) astfel încât $X(a)X(b)=I_2$.

b) Aflaţi numărul real a astfel încât $det(X(a)X(-a))\geq 3a+3$.

c) Aflaţi matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât are loc relaţia $X\cdot X(1)=A$.

SOLUŢIE:

a) Calculează $X(a)X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+(a+b+ab)A=X(a+b+ab)$ ……………………......1p

Scrie $X(a)X(b)=X(a+b+ab)=X((a+1)(b+1)-1)=X(0)$ deci $(a+1)(b+1)=1$, $(a,b)\in\{(-2,-2),(0,0)\}$…2p

b) Calculează $det(X(a)\cdot X(-a))=1-a^2$ …………………………………………………......................1p

Rezolvă inecuaţia $1-a^2\geq 3a+3\Rightarrow a\in[-2,-1]$ ………………………………………….....................1p

c) Calculează $X^{-1}(1)=\begin{pmatrix}1&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ....……………………………………….......1p

Află matricea $X=X^{-1}(1)\cdot A=\begin{pmatrix}0&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ……………………………………………………….........1p

Subiectul 2.

Fie funcţia $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\ln(x+1)-\ln(x-1)$.

a) Determinaţi ecuaţiile asimptotelor la graficul funcţiei f.

b) Calculaţi: $\lim\limits_{x\to\infty}x(f(x)-2x)$.

c) Arătaţi că ecuaţia $f(x+2)=f(x)$ are cel puţin o soluţie în intervalul $(1,\infty)$.

SOLUŢIE:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}2x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=2+\infty=\infty$, deci $x=1$ este asimptotă verticală…………………………1p

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}2x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\infty+\ln 1=\infty$ deci graficul nu are asimptotă orizontală………...……………........1p

Cum $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=2$, $n=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-mx=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\ln 1=0\Rightarrow$ $y=2x$ este as oblică spre $+\infty$ …..1p

b) Calculeaza $\lim\limits_{x\to\infty}x(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\ln e^2=2$ ……………………………….2p

c) Considerăm funcţia continuă $g:(1,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=f(x+2)-f(x)=4+\ln\left(\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}\right)$..............…..1p

Cum $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=4$ şi $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}g(x)=-\infty$, există cel puţin o soluţie în intervalul $(1,\infty)$ ……………………...……1p

Subiectul 3.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că $\left|f\left(x\right)-x\right|\le x^2$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

a) Calculaţi $f(0)$.

b) Demonstraţi că funcţia f este continuă în $x_0=0$.

SOLUŢIE:

a) pentru $x = 0$ obţine $\left|f\left(0\right)\right|\le 0$, deci $f(0) = 0$……………………………………………………….……….….3p

b) Din inegalitatea din enunț obținem: $-x^2\le f\left(x\right)-x\le x^2,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$-x^2+x\le f\left(x\right)\le x^2+x,\forall x\in\mathbb{R}$ ………………..…………………………………..................................2p

Din criteriul cleștelui avem $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=0$. Cum $f(0) = 0$ rezultă continuitatea funcției în $x_0=0$ …............2p

Subiectul 4.

Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ care apare afișată pe monitorul unui calculator.

a) Printr-un program, la un prim pas, matricea A este înlocuită pe monitorul calculatorului cu pătratul ei. Procesul se repetă şi la pasul doi apare afişat A^3, la pasul următor apare A^4 și se reia procesul de atâtea ori de câte ori a fost comandat de către programator. Aflați câți pași trebuie să comande programatorul pentru ca pe monitor să apară la final o matrice cu suma tuturor elementelor egală cu 1025.

b) Printr-un nou program, la primul pas, elementele unei linii oarecare ale matricei A sunt mărite cu 1 și noua matrice obținută în acest mod înlocuieşte matricea A afișată inițial pe monitorul calculatorului. Procesul se repetă în mod automat cu elementele unei linii oarecare, aceeași sau oricare din celelalte două, din noua matrice afișată pe monitor și se reia de atâtea ori de câte ori a fost programat. Aflaţi câţi paşi trebuie să comande programatorul pentru ca pe monitor să apară la final o matrice cu suma tuturor elementelor egală cu 1025.

SOLUŢIE:

a) Calculează A^2, A^3 ……………………………………………………………………………….….... 1p

Demonstrează prin inducţie că $A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\\ 0 & 1 & 0\\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\end{pmatrix}$ …………………………………………………... 2p

și se obține ecuația $2^{n-1}\cdot 4+1=1025$ cu soluția n = 9, deci vor fi 8 paşi . ……………………………….2p

b)La fiecare pas suma elementelor noii matrice crește cu 3 ..………………………………….................1p

obținând astfel *5+ 3n = 1025*, deci *n = 340* ………………………………………………………...1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ - 11 martie 2023

Secțiunea H2

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică: profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE - Clasa a XII -a

Subiectul 1.

Pentru $a \in \mathbb{R}$ considerăm mulțimea $G_a = (a, +\infty)$ și legea de compoziție pe G_a definită prin $x * y = xy - ax - ay + a^2 + a$, pentru orice $x, y \in G_a$.

a) Arătați că $(G_a, *)$ este grup abelian.
b) Demonstrați că $f_a: G_a \to \mathbb{R}, f_a(x) = \ln(x - a)$ este izomorfism între grupurile $(G_a, *)$ și $(\mathbb{R}, +)$.
c) Definiți o lege de compoziție „$\circ$" pe $G = (2023, +\infty)$ și o lege de compoziție „Δ" pe $H = (2024, +\infty)$ astfel încât $(G, \circ)$ $și$ (H, Δ) să fie grupuri abeliene izomorfe.

SOLUȚIE:

a) $x * y = (x - a)(y - a) + a \in (a, +\infty)$. „ $*$ " este asociativă, comutativă, are elementul neutru
$e = a + 1 \in G_a$ și orice $x \in G_a$ este inversabil și $x' = \frac{ax - a^2 + 1}{x - a} \in G_a$ 3p
b) f este bijectivă și $f(x * y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in G_a$ 2p
c) $G = G_{2023}$, definim $x \circ y = xy - 2023x - 2023y + 2023^2 + 2023$, $H = G_{2024}$, definim
$x\Delta y = xy - 2024x - 2024y + 2024^2 + 2024$, ... 1p
$f_{2023}: G \to \mathbb{R}$ este izomorfism între $(G, \circ)$ și $(\mathbb{R}, +)$, iar $f_{2024}^{-1}: \mathbb{R} \to H$, izomorfism între
$(\mathbb{R}, +)$ și (H, Δ), deci $f_{2024}^{-1} \circ f_{2023}: G \to H$ este izomorfism între $(G, \circ)$ și (H, Δ) 1p

Obs.

Cum $f_{2023}(x) = \ln(x - 2023)$, $f_{2024}(x) = \ln(x - 2024)$, găsim $f_{2024}^{-1}(x) = e^x + 2024$ și

$$f_{2024}^{-1} \circ f_{2023}(x) = x + 1$$

Subiectul 2.

Pe mulțimea $G = (1, +\infty)$ definim legea de compoziție asociativă $x \circ y = \sqrt[3]{x^{\log_2 y}}$ pentru orice $x, y \in G$.
Arătați că:

a) $x \circ y = 2^{\frac{1}{3}\log_2 x \cdot \log_2 y}$, pentru orice $x, y \in G$;
b) pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, există $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in G, x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$ astfel încât $x_1 \circ x_2 \circ x_3 \circ \ldots \circ x_n$ să fie număr natural;
c) $2022 \circ 2024 < 2023 \circ 2023$.

SOLUȚIE:

a) Fie $a = x \circ y$ și $b = 2^{\frac{1}{3}\log_2 x \cdot \log_2 y}$.

Atunci $\log_2 a = \log_2 \sqrt[3]{x^{\log_2 y}} = \frac{1}{3}\log_2 x^{\log_2 y} = \frac{1}{3}\log_2 x \cdot \log_2 y = \log_2 b \Rightarrow a = b$ 2p

Sau: Deoarece $x = 2^{\log_2 x}$, $x \circ y = x^{\frac{1}{3}\log_2 y} = 2^{\frac{1}{3}\log_2 x \cdot \log_2 y}$.

b) Prin inducție matematică
$x_1 \circ x_2 \circ x_3 \circ \ldots \circ x_n = 2^{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \log_2 x_1 \cdot \log_2 x_2 \cdot \log_2 x_3 \cdot \ldots \cdot \log_2 x_n}$ (folosind asociativitatea și punctul a.) 1p
Alegem $x_1 = 2^{3 \cdot 1}, x_2 = 2^{3 \cdot 2}, x_3 = 2^{3 \cdot 3}, \ldots, x_n = 2^{3 \cdot n}, x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$ 1p
Atunci $\log_2 x_1 \cdot \log_2 x_2 \cdot \log_2 x_3 \cdot \ldots \cdot \log_2 x_n = 3^n \cdot n! \implies x_1 \circ x_2 \circ x_3 \circ \ldots \circ x_n = 2^{3 \cdot n!} \in \mathbb{N}$ 1p
c) Trebuie arătat că $\log_2 2022 \cdot \log_2 2024 < (\log_2 2023)^2$ 1p
Folosind $a \cdot b < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$, deducem că $\log_2 2022 \cdot \log_2 2024 < \left(\frac{\log_2 2022 + \log_2 2024}{2}\right)^2$
$< \left(\frac{\log_2(2022 \cdot 2024)}{2}\right)^2 < \left(\frac{\log_2 2023^2}{2}\right)^2 = (\log_2 2023)^2$, $(2022 \cdot 2024 = (2023 - 1) \cdot (2023 + 1) =$
$2023^2 - 1 < 2023^2)$. 1p

Subiectul 3.

În urma unui accident, la o fabrică de produse chimice, se produce o poluare a mediului din apropierea fabricii. Coeficientul de poluare este modelat prin numărul real $I_n = 100 \cdot \int_1^2 \frac{dx}{x^n\sqrt{1+x^2}}$, $n \in \mathbb{N}$. I_0 este coeficientul de poluare imediat după accident, I_n este coeficientul de poluare, în ziua „n", după accident. Mediul este considerat nepoluat dacă coeficientul de poluare este cel mult egal cu 5.

a) Arătați că $I_0 > 50$.
b) Demonstrați că, în timp, coeficientul de poluare se micșorează (altfel spus arătați că $I_n \geq I_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$).
c) Arătați că, în cel mult 20 de zile, mediul devine nepoluat.

SOLUȚIE:

a) $I_0 = 100 \cdot \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = 100 \cdot \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\Big|_1^2 = 100 \ln \frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}} = 50 \ln \frac{9+4\sqrt{5}}{3+2\sqrt{2}} > 50 \ln 3 > 50$................ 3p
b) $I_n - I_{n+1} = 100 \cdot \int_1^2 \frac{x-1}{x^{n+1}\sqrt{1+x^2}} dx \geq 0$, deoarece $f(x) = \frac{x-1}{x^{n+1}\sqrt{1+x^2}} \geq 0, \forall x \in [1,2]$ 2p
c) $I_{20} = 100 \cdot \int_1^2 \frac{1}{x^{20}\sqrt{1+x^2}} dx < 100 \int_1^2 \frac{1}{x^{21}} dx = 100 \cdot \frac{x^{-2}}{-2}\Big|_1^2 = 5\left(1 - \frac{1}{2^{20}}\right) < 5$ 2p

Subiectul 4.

Funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numește asociată funcției continue $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dacă $g(x) + \int_0^x f(x-t)dt = e^x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) Determinați funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asociată funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{|x|+1}$.
b) Dacă $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este asociată funcției continue $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, arătați că g este derivabilă și $g'(x) = e^x - f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
c) Determinați funcția continuă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dacă, funcția asociată acesteia, este egală cu funcția f.

SOLUȚIE:

a) $g(x) = e^x - \int_0^x f(x-t)dt = e^x - \int_0^x \frac{1}{|x-t|+1} dt$ 1p
Dacă $x \geq 0$, cum $t \in [0,x] \Rightarrow x - t \geq 0 \Rightarrow g(x) = e^x - \int_0^x \frac{1}{x-t+1} dt = e^x + \ln|x-t+1|\big|_0^x$
$= e^x - \ln(x+1)$ 1p
Dacă $x < 0$, cum $t \in [x,0] \Rightarrow x - t \leq 0 \Rightarrow g(x) = e^x - \int_0^x \frac{1}{t-x+1} dt = e^x - \ln|t-x+1|\big|_0^x$
$= e^x + \ln(1-x)$ 1p
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} e^x + \ln(1-x), & x < 0 \\ e^x - \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$

b) Fie F primitivă a funcției f, atunci $g(x) = e^x + F(x-t)|_0^x = e^x + F(0) - F(x)$ 1p
g este derivabilă și $g'(x) = e^x - f(x)$ 1p

c) Dacă f este asociată funcției continue f, atunci f este derivabilă și $f'(x) = e^x - f(x) \Rightarrow \left(e^x f(x)\right)'$
$= e^{2x} \Rightarrow e^x f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}, \ C \in \mathbb{R}$ 1p
Cum $f(0) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$ și atunci $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ 1p