Ministerul Educației

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ 1902-2023

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a V-a

Problema 1. Aflați toate numerele naturale de forma $\overline{abcd}$, știind că numerele $\overline{ab}, \overline{cb}$ și d sunt prime, iar $\overline{ab}^2 + \overline{cb}^2 + d^2 = 2022$.

Gazeta Matematică

Problema 2. Un magazin a vândut 235 de roboți în cele 12 luni ale unui an. În fiecare lună au fost vânduți fie câte 16, fie câte 20, fie câte 25 de roboți. Determinați numărul de luni în care au fost vânduți exact 20 de roboți.

Problema 3. Spunem că 13 numere naturale nenule formează un grup *deosebit* dacă numerele grupului sunt consecutive. Determinați:

a) câte grupuri deosebite au suma numerelor egală cu un pătrat perfect de trei cifre;

b) numărul maxim de numere prime aflate într-un grup deosebit.

Problema 4. Se scriu pe tablă, unul după altul, toate numerele naturale de la 1 la 30000, formând o secvență lungă de cifre:

$$123456789101112\ldots30000.$$

De câte ori apare 2023 în această secvență?

Timp de lucru 2 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a V-a – soluții și bareme

Problema 1. Aflați toate numerele naturale de forma $\overline{abcd}$, știind că numerele $\overline{ab}, \overline{cb}$ și d sunt prime, iar $\overline{ab}^2 + \overline{cb}^2 + d^2 = 2022$.

Gazeta Matematică

Soluție. Fiind prime, numerele $\overline{ab}$ și $\overline{cb}$ sunt impare. Ca urmare, $\overline{ab}^2 + \overline{cb}^2$ este număr par și, cum 2022 este par, rezultă că d este par. Dar d este număr prim, deci $d = 2$. **2p**

Relația din enunț devine $\overline{ab}^2 + \overline{cb}^2 = 2018$. Deoarece $47^2 = 2209 > 2018$, deducem că numerele $\overline{ab}$ și $\overline{cb}$ pot fi cel mult egale cu 43. . . . . **1p**

Cei doi termeni din suma $\overline{ab}^2 + \overline{cb}^2$ au aceeași ultimă cifră, aceasta fiind impară, iar ultima cifră a sumei este 8. Obținem că b poate fi 3 sau 7. . . . . **1p**

Pentru $b = 7$, numerele prime $\overline{ab}$ și $\overline{cb}$ pot lua doar valorile 17 sau 37. Cum $17^2 = 289$, iar $37^2 = 1369$, suma $\overline{a7}^2 + \overline{c7}^2$ nu poate fi egală cu 2018. . . . . **1p**

Pentru $b = 3$, numerele prime $\overline{ab}$ și $\overline{cb}$ pot lua valorile 13, 23 sau 43. Cum $13^2 = 169$, $23^2 = 529$ și $43^2 = 1849$, egalitatea $\overline{ab}^2 + \overline{cb}^2 = 2018$ are loc doar pentru $\overline{ab} = 13$ și $\overline{cb} = 43$ sau $\overline{ab} = 43$ și $\overline{cb} = 13$. Așadar, problema are două soluții: $\overline{abcd} = 1342$ și $\overline{abcd} = 4312$. **2p**

Problema 2. Un magazin a vândut 235 de roboți în cele 12 luni ale unui an. În fiecare lună au fost vânduți fie câte 16, fie câte 20, fie câte 25 de roboți. Determinați numărul de luni în care au fost vânduți exact 20 de roboți.

Soluție. În fiecare dintre cele 12 luni ale anului s-au vândut cel puțin câte 16 roboți. Dacă în fiecare lună s-ar fi vândut exact câte 16 roboți, atunci numărul de roboți vânduți ar fi fost egal cu $12 \cdot 16 = 192$ **2p**

Diferența de $235 - 192 = 43$ de roboți provine din lunile în care s-au vândut câte 20 de roboți (deci câte 4 în plus) și din lunile în care s-au vândut câte 25 de roboți (deci câte 9 în plus).

Notând cu a numărul de luni în care s-au vândut câte 20 roboți și cu b numărul de luni în care s-au vândut câte 25 de roboți, obținem $4 \cdot a + 9 \cdot b = 43$ **2p**

Rezultă $b \leqslant 4$ și b impar, deci $b = 1$ sau $b = 3$. **1p**

Dacă $b = 1$, atunci $4 \cdot a = 34$, imposibil. **1p**

Dacă $b = 3$, atunci $a = 4$, deci numărul de luni în care au fost vânduți câte 20 de roboți este egal cu 4 . . . . **1p**

Soluție alternativă 1. Fie x, y, z numărul lunilor în care s-au vândut câte 16, 20 respectiv 25 de roboți. Atunci $16x + 20y + 25z = 235$, adică $x + 5(3x + 4y + 5z) = 235$, de unde rezultă că $x = 5 \cdot [47 - (3x + 4y + 5z)]$. Ca urmare, x este divizibil cu 5 . . . . **4p**

Cum $x \leqslant 12$ (x este un număr de luni), obținem $x = 5$ sau $x = 10$ **1p**

Pentru $x = 10$, rezultă $16 \cdot 10 + 20y + 25z = 235$, de unde $4y + 5z = 15$ sau $4(y + z) + z = 15$. Cum $y + z = 12 - x = 2$, obținem $z = 7$, imposibil, deoarece $y + z = 2$ **1p**

Pentru $x = 5$, rezultă $16 \cdot 5 + 20y + 25z = 235$, de unde $4y + 5z = 31$ sau $4(y + z) + z = 31$. Cum $y + z = 12 - x = 7$, obținem $z = 3$, de unde $y = 7 - z = 4$, deci numărul de luni în care au fost vânduți câte 20 de roboți este egal cu 4 . . . . **1p**

Soluție alternativă 2. Fie x, y, z numărul lunilor în care s-au vândut câte 16, 20 respectiv 25 de roboți. Atunci $16x + 20y + 25z = 235$, de unde rezultă z impar și $z \leqslant 9$ **2p**

Dacă z este unul dintre numerele 1, 5 sau 9, din relația $16x + 20y = 235 - 25z$ obținem că $16x + 20y$ este egal cu 210, 110, respectiv 10, dar $16x + 20y$ este divizibil cu 4, iar 210, 110 și 10 nu sunt, deci nu se obțin soluții **3p**

Pentru $z = 7$, avem $16x+20y = 60$ și $x+y = 5$, de unde obținem $4x+5y = 15$ și $4x+4y = 20$, contradicție **1p**

Pentru $z = 3$, avem $16x + 20y = 160$ și $x + y = 9$, de unde obținem $4x + 5y = 40$ și $4x + 4y = 36$, deci $y = 4$ (și $x = 5$). Așadar, numărul de luni în care au fost vânduți câte 20 de roboți este egal cu 4 .... **1p**

Problema 3. Se spune că 13 numere naturale nenule formează un grup *deosebit* dacă numerele grupului sunt consecutive. Determinați:

a) câte grupuri deosebite au suma numerelor egală cu un pătrat perfect de trei cifre;

b) numărul maxim de numere prime aflate într-un grup deosebit.

Soluție. a) Notăm cu $a, a+1, a+2, \ldots, a+12$ cele 13 numere consecutive care formează un grup deosebit. Atunci suma lor este $13a + 78 = 13 \cdot (a + 6)$. **1p**

Cum cel mai mare pătrat perfect de trei cifre este 961, iar numărul $13 \cdot (a + 6)$ este divizibil cu 13, deducem că valoarea lui $13 \cdot (a + 6)$ poate fi 169 sau 676, acestea fiind singurele pătrate perfecte de trei cifre divizibile cu 13. .... **1p**

Obținem că a poate fi 7 sau 46. În concluzie există două grupuri deosebite având proprietatea cerută. **1p**

b) Pentru $a = 1$, în grupul deosebit $1, 2, 3, \ldots, 13$ se află 6 numere prime, iar pentru $a = 2$, în grupul deosebit $2, 3, 4, \ldots, 14$ se află tot 6 numere prime. **2p**

Dacă $a \geqslant 3$, printre cele 13 numere ale grupului deosebit se află cel puțin 6 numere pare neprime. De asemenea, cum în grup se află cel puțin trei numere impare consecutive mai mari decât 3, unul dintre ele este divizibil cu 3, deci nu este prim. Deducem că în grup vor fi cel mult 6 numere prime. Astfel, numărul maxim de numere prime este 6. .... **2p**

Problema 4. Se scriu pe tablă, unul după altul, toate numerele naturale de la 1 la 30000, formând o secvență lungă de cifre:

$$123456789101112\ldots30000.$$

De câte ori apare 2023 în această secvență?

Soluție. Secvența 2023 apare în scrierea numerelor $2023, 12023, 22023$ și a numerelor 20230, 20231, 20232, ..., 20239, în total fiind 13 apariții. **3p**

În plus, 2023 mai poate apărea *lipind* sfârșitul unui număr de începutul numărului următor. Avem cazurile:

- 202|3 apare o singură dată: 3202|3203. .... **1p**
- 20|23, va apărea de 11 ori: 2320|2321 și de la 23020|23021 la 23920|23921 .... **2p**

Cazul 2|023 este imposibil deoarece nu există număr care să înceapă cu 0, deci numărul total de apariții este $13 + 11 + 1 = 25$. **1p**

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a VI-a

Problema 1. Elementele unei mulțimi A sunt 13 numere naturale consecutive, elementele unei mulțimi B sunt 12 numere naturale consecutive, iar elementele mulțimii $A \cup B$ sunt 15 numere naturale consecutive.

a) Determinați numărul elementelor mulțimii $A \setminus B$.

b) Dacă, în plus, suma elementelor mulțimii A este egală cu suma elementelor mulțimii B, determinați cele două mulțimi.

Gazeta Matematică

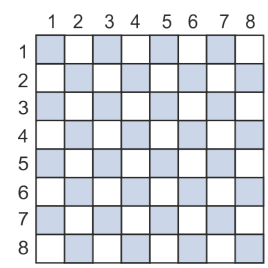
Problema 2. Fie ABC un triunghi isoscel, cu $AB = AC$ și $\sphericalangle ABC = 72°$. Pe dreapta BC considerăm punctul D astfel încât C să aparțină segmentului BD și $CD = AB$.

a) Arătați că AC este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAD$.

b) Pe paralela la AB dusă prin D luăm punctul E, în același semiplan cu A față de BD, astfel încât $DE = DB$. Fie F punctul de intersecție a dreptelor AD și BE. Demonstrați că dreptele AC și AE sunt perpendiculare și $AF = FC = BC$.

Problema 3. Considerăm tabloul din figura alăturată. În fiecare pătrățel al lui scriem câte un număr întreg, astfel încât suma numerelor scrise în pătrățelele albe să fie 23, iar suma numerelor scrise în pătrățelele de pe coloanele cu număr impar să fie 40. Înlocuim apoi numerele din pătrățelele albe cu opusele lor.

Cât este acum suma numerelor din pătrățelele de pe liniile cu număr impar?



Problema 4. Determinați numerele naturale n pentru care cel mai mare divizor prim al numărului $n^2 + 2$ este egal cu cel mai mare divizor prim al numărului $n^2 + 2n + 3$.

Timp de lucru 2 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a VI-a – soluții

Problema 1. Elementele unei mulțimi A sunt 13 numere naturale consecutive, elementele unei mulțimi B sunt 12 numere naturale consecutive, iar elementele mulțimii $A \cup B$ sunt 15 numere naturale consecutive.

a) Determinați numărul elementelor mulțimii $A \setminus B$.

b) Dacă, în plus, suma elementelor mulțimii A este egală cu suma elementelor mulțimii B, determinați cele două mulțimi.

Gazeta Matematică

Soluție. a) Elementele mulțimii $A \setminus B$ sunt elementele mulțimii $A \cup B$ care nu sunt în B; ele sunt în număr de $15 - 12 = 3$ **2p**

b) Suma elementelor din $A \setminus B$ este egală cu suma elementelor din $B \setminus A$ **1p**

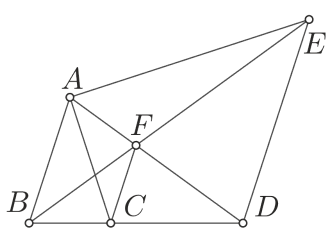
Fie $A \cap B = \{n, n+1, n+2, \ldots, n+9\}$, $n \in \mathbb{N}$. Cum $A \setminus B$ are 3 elemente și $B \setminus A$ are două elemente, avem $n \geqslant 3$, $A \setminus B = \{n-3, n-2, n-1\}$ și $B \setminus A = \{n+10, n+11\}$ **2p**

Obținem $n-3+n-2+n-1 = n+10+n+11$, $n = 27$, $A = \{24, 25, 26, 27, \ldots, 36\}$ și $B = \{27, 28, 29, \ldots, 38\}$ **2p**

Problema 2. Fie ABC un triunghi isoscel, cu $AB = AC$ și $\sphericalangle ABC = 72°$. Pe dreapta BC considerăm punctul D astfel încât C să aparțină segmentului BD și $CD = AB$.

a) Arătați că AC este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAD$.

b) Pe paralela la AB dusă prin D luăm punctul E, în același semiplan cu A față de BD, astfel încât $DE = DB$. Fie F punctul de intersecție a dreptelor AD și BE. Demonstrați că dreptele AC și AE sunt perpendiculare și $AF = FC = BC$.



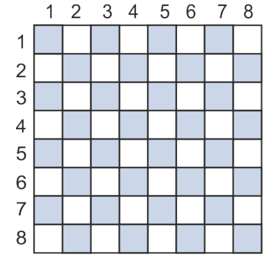
Soluție. a) Avem $\sphericalangle BAC = 36°$. Cum triunghiul ACD este isoscel cu $\sphericalangle ACD = 180° - 72° = 108°$, rezultă că $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ADC = 36°$, deci AC este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAD$. **2p**

b) Deoarece $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BAD = 72°$, rezultă că triunghiul ABD este isoscel, deci $AD = BD$. Cum $DE = DB$, rezultă că triunghiul ADE este isoscel, deci $\sphericalangle DAE = (180° - \sphericalangle ADE) : 2 = (180° - 72°) : 2 = 54°$. Astfel, $\sphericalangle CAE = \sphericalangle CAD + \sphericalangle DAE = 36° + 54° = 90°$ **2p**

Din $\sphericalangle AFB = 180° - \sphericalangle BAF - \sphericalangle ABF = 72°$ rezultă $\triangle BAC \equiv \triangle ABF$ (L.U.L.), de unde $BC = AF$. Cum $BD = AD$, rezultă $CD = FD$. Astfel, $\triangle BAC \equiv \triangle CDF$ (L.U.L.), deci $BC = FC$ **3p**

Problema 3. Considerăm tabloul din figura alăturată. În fiecare pătrățel al lui scriem câte un număr întreg, astfel încât suma numerelor scrise în pătrățelele albe să fie 23, iar suma numerelor scrise în pătrățelele de pe coloanele cu număr impar să fie 40. Înlocuim apoi numerele din pătrățelele albe cu opusele lor.

Cât este acum suma numerelor din pătrățelele de pe liniile cu număr impar?



Soluție. Fie a_p suma numerelor din pătrățelele albe de pe liniile cu număr par și a_i suma numerelor din pătrățelele albe de pe liniile cu număr impar. Avem $a_i + a_p = 23$ **2p**

Mulțimea pătrățelelor negre din coloanele cu număr impar coincide cu mulțimea pătrățelelor negre din liniile cu număr impar, iar mulțimea pătrățelelor albe din coloanele cu număr impar coincide cu mulțimea pătrățelelor albe din liniile cu număr par. **2p**

Fie n suma numerelor din pătrățelele negre de pe coloanele cu număr impar. Din cele de mai sus și din ipoteză, știm că $n + a_p = 40$ și avem de calculat $n - a_i$.

Rezultă $n - a_i = (n + a_p) - (a_i + a_p) = 17$ **3p**

Problema 4. Determinați numerele naturale n pentru care cel mai mare divizor prim al numărului $n^2 + 2$ este egal cu cel mai mare divizor prim al numărului $n^2 + 2n + 3$.

Soluție. Un divizor comun d al numerelor date divide și numerele $n^2+2n+3-(n^2+2) = 2n+1$, $n \cdot (2n + 1) = 2n^2 + n$, $2n^2 + n - 2 \cdot (n^2 + 2) = n - 4$, $2n + 1 - 2 \cdot (n - 4) = 9$ **2p**

Astfel, dacă d este prim, atunci $d = 3$, iar singurul factor prim care mai poate apărea în descompunerea numerelor date este 2, la cel mult unul dintre ele. În plus, măcar unul dintre numere are exponentul lui 3 cel mult 2 . . . . **1p**

Dacă n este par, atunci $n^2 + 2$ este par, dar nu este divizibil cu 4 și putem avea cazurile: I) $n^2 + 2 = 2 \cdot 3$; II) $n^2 + 2 = 2 \cdot 3^2$; III) $n^2 + 2n + 3 = 3$; IV) $n^2 + 2n + 3 = 3^2$. Obținem doar soluția $n = 4$ (corespunzătoare cazului II) **2p**

Dacă n este impar, atunci $n^2 + 2n + 3$ este par, dar nu este divizibil cu 4 și putem avea cazurile: V) $n^2 + 2n + 3 = 2 \cdot 3$; VI) $n^2 + 2n + 3 = 2 \cdot 3^2$; VII) $n^2 + 2 = 3$; VIII) $n^2 + 2 = 3^2$. Obținem doar soluția $n = 1$ (corespunzătoare cazurilor V și VII) **2p**

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a VII-a

Problema 1. Determinați toate perechile (x, y) de numere reale care verifică relația

$$3 \cdot \left\{\frac{3x+2}{3}\right\} + 4 \cdot \left[\frac{4y+3}{4}\right] = 4 \cdot \left\{\frac{4y+3}{4}\right\} + 3 \cdot \left[\frac{3x+2}{3}\right] = 18.$$

Notațiile $\{a\}$ și $[a]$ reprezintă partea fracționară, respectiv partea întreagă a numărului real a.

Gazeta Matematică

Problema 2. Determinați numerele întregi a, b, c, d care îndeplinesc simultan condițiile $a+b+c=2d$ și $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=d^2$.

Problema 3. Se consideră un pătrat $ABCD$ și se notează cu M mijlocul laturii CD. Perpendiculara din C pe BM intersectează dreptele BM și AB în punctele N, respectiv E. Dreapta BM intersectează dreapta AD în P, iar mijlocul segmentului BN se notează cu F. Arătați că:

a) triunghiurile CBE și BAP sunt congruente;

b) segmentele AN și DF sunt congruente și perpendiculare.

Problema 4. Fie triunghiul ABC care are $\sphericalangle ABC = 90°$ și $\sphericalangle BCA = 30°$. Fie AD bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$, $D \in BC$, și $BE \perp AC$, $E \in AC$. Notăm cu M intersecția dreptelor AD și BE, iar cu P mijlocul lui CM. Arătați că $AC = 4 \cdot DP$.

Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a VII-a – soluții

Problema 1. Determinați toate perechile (x, y) de numere reale care verifică relația

$$3 \cdot \left\{\frac{3x+2}{3}\right\} + 4 \cdot \left[\frac{4y+3}{4}\right] = 4 \cdot \left\{\frac{4y+3}{4}\right\} + 3 \cdot \left[\frac{3x+2}{3}\right] = 18.$$

Notațiile $\{a\}$ și $[a]$ reprezintă partea fracționară, respectiv partea întreagă a numărului real a.

Gazeta Matematică

Soluție. Deoarece $0 \leqslant \{a\} < 1$ și $[b]$ este număr întreg, egalitatea $3\{a\} + 4[b] = 18$ are loc doar în cazul $\{a\} = \frac{2}{3}$ și $[b] = 4$ **2p**

Deoarece $0 \leqslant \{c\} < 1$ și $[d]$ este număr întreg, egalitatea $4\{c\} + 3[d] = 18$ are loc doar în cazurile $\{c\} = 0$, $[d] = 6$ (I), sau $\{c\} = \frac{3}{4}$, $[d] = 5$ (II) **3p**

În cazul (I) obținem $\frac{3x+2}{3} = 6 + \frac{2}{3}$ și $\frac{4y+3}{4} = 4$, deci $x = 6$, $y = \frac{13}{4}$. În cazul (II) obținem $\frac{3x+2}{3} = 5 + \frac{2}{3}$ și $\frac{4y+3}{4} = 4 + \frac{3}{4}$, deci $x = 5$, $y = 4$. Perechile sunt $(6, \frac{13}{4})$ și $(5, 4)$ **2p**

Problema 2. Determinați numerele întregi a, b, c, d care îndeplinesc simultan condițiile $a + b + c = 2d$ și $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = d^2$.

Soluție. Dacă $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0$, atunci $d \geqslant 0$. Avem $d^2 = \sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc} \leqslant a + a + b \leqslant 2a + 2b + 2c \leqslant 4d$, cel puțin una dintre inegalități fiind strictă, de unde $d \in \{0, 1, 2, 3\}$ **2p**

Cazul I: $d = 0$. Atunci $a = b = c = 0$ **1p**

Cazul II: $d = 1$. Atunci $a + b + c = 2$ și $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$, deci $a = b = 1$, $c = 0$ **1p**

Cazul III: $d \in \{2, 3\}$. Pentru $d = 2$ avem posibilitățile $(2, 1, 1)$, $(2, 2, 0)$, $(3, 1, 0)$, $(4, 0, 0)$, iar pentru $d = 3$ avem posibilitățile $(3, 2, 1)$, $(3, 3, 0)$, $(4, 2, 0)$, $(4, 1, 1)$, $(5, 1, 0)$, $(6, 0, 0)$; niciuna nu convine **1p**

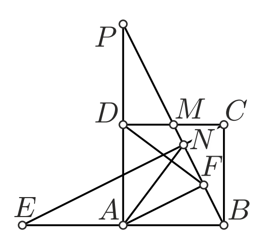
În cazul în care cel puțin unul dintre numere este negativ, atunci toate sunt mai mici sau egale cu 0, iar $-a$, $-b$, $-c$, $-d$ verifică egalitățile din enunț **1p**

Obținem soluțiile $(0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -1, -1), (-1, 0, -1), (-1, -1, 0)$ ... **1p**

Problema 3. Se consideră un pătrat $ABCD$ și se notează cu M mijlocul laturii CD. Perpendiculara din C pe BM intersectează dreptele BM și AB în punctele N, respectiv E. Dreapta BM intersectează dreapta AD în P, iar mijlocul segmentului BN se notează cu F. Arătați că:

a) triunghiurile CBE și BAP sunt congruente;

b) segmentele AN și DF sunt congruente și perpendiculare.



Soluție. a) Deoarece $CB = BA$ și $\sphericalangle CEB = \sphericalangle BPA$ (au fiecare complement $\sphericalangle EBP$), deducem că triunghiurile dreptunghice $\triangle CBE$ și $\triangle BAP$ sunt congruente. **3p**

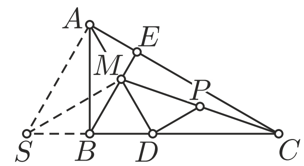
b) Notăm cu T intersecția dreptelor EC și AP. DM și AT sunt linii mijlocii în triunghiurile dreptunghice APB și BEC, deci A este mijlocul lui BE. Prin urmare $AF \parallel NE$, de unde $AF \perp BP$ **1p**

FD și AN sunt mediane corespunzătoare ipotenuzelor în triunghiuri dreptunghice, deci $FD = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}BE = AN$ **1p**

$BN = AF$, deoarece sunt înălțimile corespunzătoare ipotenuzelor în triunghiuri congruente, așadar $\triangle ADF \equiv \triangle BAN$. **1p**

Cum $\sphericalangle FDA + \sphericalangle NAD = \sphericalangle NAB + \sphericalangle NAD = 90°$, avem $AN \perp DF$ **1p**

Problema 4. Fie triunghiul ABC care are $\sphericalangle ABC = 90^\circ$ și $\sphericalangle BCA = 30^\circ$. Fie AD bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$, $D \in BC$, și $BE \perp AC$, $E \in AC$. Notăm cu M intersecția dreptelor AD și BE, iar cu P mijlocul lui CM. Arătați că $AC = 4 \cdot DP$.



Soluție. Din teorema unghiului de 30° avem $AC = 2AB$ .. **1p**

Deoarece $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACD = 30^\circ$, triunghiul ADC este isoscel, cu $DA = DC$ **1p**

Cum $\sphericalangle ADB = \sphericalangle MBD = 60^\circ$, triunghiul MBD este echilateral. Reiese astfel că $MB = BD = \frac{1}{2}AD$, deci punctul M este mijlocul lui AD **2p**

Notăm cu S simetricul lui D față de B. Atunci triunghiul ADS este echilateral. Reiese $DS = AD = CD$, deci DP este linie mijlocie în triunghiul CSM. Cum $AB = SM$ (mediane în triunghiul echilateral ADS), rezultă $DP = \frac{1}{2}MS = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{4}AC$ **3p**

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a VIII-a

Problema 1. Fie $SABCD$ o piramidă având ca bază paralelogramul $ABCD$. Pe muchiile SA, SB, SC și SD se consideră punctele M, N, P, respectiv Q astfel încât $MNPQ$ să fie un paralelogram.

a) Dacă $ABCD$ este un romb, arătați că $MNPQ$ este un romb.

b) Dacă $ABCD$ este un dreptunghi, arătați că $MNPQ$ este un dreptunghi.

Gazeta Matematică

Problema 2. Un triplet (a, b, c) de numere întregi se numește *artistic* dacă numărul $\dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c}$ este întreg.

a) Determinați numerele întregi n pentru care tripletele $(n, n+1, n+3)$ sunt artistice.

b) Dacă (x, y, z) este un triplet artistic, arătați că numărul $\dfrac{x^4+y^4+z^4}{x+y+z}$ este întreg.

Problema 3. Determinați numerele naturale nenule a, b și c care verifică simultan condițiile:

(i) $(a^2+b^2)(c^2+2023^2) = (ab+2023c)^2$;

(ii) $(a^2+2023^2)(b^2+c^2) = (2023a+bc)^2$;

(iii) cel mai mare divizor comun al numerelor a, b, c și 2023 este egal cu 1.

Problema 4. Se consideră un tetraedru $ABCD$ în care $\widehat{BAC}+\widehat{CAD}+\widehat{DAB} = 180°$, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DAB}$, iar proiecția vârfului D pe planul (ABC) este ortocentrul triunghiului ABC. Demonstrați că $AB = AC$ și $DB = DC$.

Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

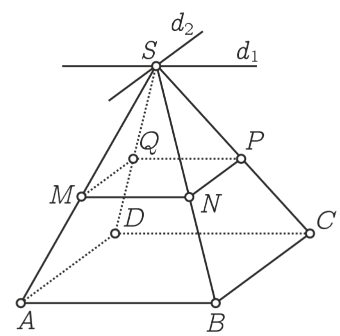
CLASA a VIII-a – soluții

Problema 1. Fie $SABCD$ o piramidă având ca bază paralelogramul $ABCD$. Pe muchiile SA, SB, SC și SD se consideră punctele M, N, P, respectiv Q astfel încât $MNPQ$ să fie un paralelogram.

a) Dacă $ABCD$ este un romb, arătați că $MNPQ$ este un romb.

b) Dacă $ABCD$ este un dreptunghi, arătați că $MNPQ$ este un dreptunghi.

Gazeta Matematică



Soluție. Fie $d_1 = (SAB) \cap (SCD)$ și $d_2 = (SBC) \cap (SDA)$. Cum $AB \parallel CD$, $AB \subset (SAB)$ și $CD \subset (SCD)$, din teorema acoperișului rezultă că $AB \parallel CD \parallel d_1$. Deoarece $MN \parallel PQ$, $MN \subset (SAB)$ și $PQ \subset (SCD)$, din teorema acoperișului rezultă că $MN \parallel PQ \parallel d_1$, prin urmare $AB \parallel CD \parallel MN \parallel PQ \parallel d_1$.

Analog se arată că $BC \parallel DA \parallel NP \parallel QM \parallel d_2$. **3p**

a) Folosind teorema fundamentală a asemănării, obținem

$$\frac{MN}{AB} = \frac{SN}{SB} = \frac{NP}{BC}.$$

Dacă $ABCD$ este un romb, atunci $AB = BC$. Deducem că $MN = NP$, prin urmare paralelogramul $MNPQ$ este, și el, un romb. **2p**

b) Unghiurile cu laturile respectiv paralele sunt congruente sau suplementare.

Dacă $ABCD$ este un dreptunghi, atunci $\widehat{ABC} = 90°$. Întrucât $MN \parallel AB$ și $NP \parallel BC$, obținem că $\widehat{MNP} = 90°$, prin urmare paralelogramul $MNPQ$ este, și el, un dreptunghi. ... **2p**

Problema 2. Un triplet (a, b, c) de numere întregi se numește *artistic* dacă numărul $\dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c}$ este întreg.

a) Determinați numerele întregi n pentru care tripletele $(n, n+1, n+3)$ sunt artistice.

b) Dacă (x, y, z) este un triplet artistic, arătați că numărul $\dfrac{x^4+y^4+z^4}{x+y+z}$ este întreg.

Soluție. a) Tripletul $(n, n+1, n+3)$, $n \in \mathbb{Z}$, este artistic dacă și numai dacă numărul $\dfrac{3n^2+8n+3}{3n+4} = n + \dfrac{4n+3}{3n+4}$ este întreg.

Rezultă că $3n+4$ divide numărul $4(3n+4) - 3(4n+3) = 7$, de unde $n \in \{-1, 1\}$. Se verifică faptul că ambele variante convin (găsim tripletele artistice $(-1, 0, 2)$, respectiv $(1, 2, 4)$). ... **3p**

b) Deoarece numerele $x+y+z$ și $\dfrac{xy+yz+zx}{x+y+z}$ sunt întregi, rezultă că $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z} = (x+y+z) - 2 \cdot \dfrac{xy+yz+zx}{x+y+z}$ este număr întreg. **2p**

Apoi, $\dfrac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{x+y+z} = (xy+yz+zx) \cdot \dfrac{xy+yz+zx}{x+y+z} - 2xyz$ este număr întreg. ... **1p**

În concluzie, $\dfrac{x^4+y^4+z^4}{x+y+z} = \left(x^2+y^2+z^2\right) \dfrac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z} - 2 \cdot \dfrac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{x+y+z}$ este număr întreg. **1p**

Problema 3. Determinați numerele naturale nenule a, b și c care verifică simultan condițiile:
(i) $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+2023^2\right)=(ab+2023c)^2$;
(ii) $\left(a^2+2023^2\right)\left(b^2+c^2\right)=(2023a+bc)^2$;
(iii) cel mai mare divizor comun al numerelor a, b, c și 2023 este egal cu 1.

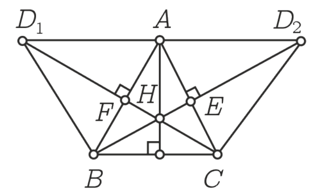
Soluție. Scădem membru cu membru egalitățile (i) și (ii) și obținem, prin calcul direct, că $\left(a^2-c^2\right)\left(b^2-2023^2\right)=0$. Cum $a,b,c\in\mathbb{N}^*$, deducem că $a=c$ sau $b=2023$. **3p**

Dacă $a=c$, din (i) rezultă $\left(a^2-2023b\right)^2=0$, deci $a^2=2023b=7\cdot 17^2\cdot b$. Așadar $7\mid b$ și $7\mid a=c$, prin urmare cel mai mare divizor comun al numerelor a,b,c și 2023 este cel puțin egal cu 7, în contradicție cu (iii). **2p**

Dacă $b=2023$, din (i) rezultă că $\left(ac-2023^2\right)^2=0$, deci $ac=2023^2=7^2\cdot 17^4$.
Ținând cont de (iii), deducem că a și c sunt prime între ele și obținem soluțiile:
$(a,b,c)\in\left\{\left(1,2023,2023^2\right),\left(7^2,2023,17^4\right),\left(17^4,2023,7^2\right),\left(2023^2,2023,1\right)\right\}$. **2p**

Problema 4. Se consideră un tetraedru $ABCD$ în care $\widehat{BAC}+\widehat{CAD}+\widehat{DAB}=180^\circ$, $\widehat{ABC}\equiv\widehat{DAB}$, iar proiecția vârfului D pe planul (ABC) este ortocentrul triunghiului ABC. Demonstrați că $AB=AC$ și $DB=DC$.

Soluție. Fie BE și CF înălțimile din B, respectiv C ale triunghiului ABC, iar H punctul lor de intersecție.



Din teorema celor trei perpendiculare, obținem că $DE\perp AC$ și $DF\perp AB$. **1p**

Desfășurăm tetraedrul în planul (ABC). Notăm cu D_1 poziția în care ajunge vârful D al triunghiului DAB și cu D_2 poziția în care ajunge vârful D al triunghiului DAC. **1p**

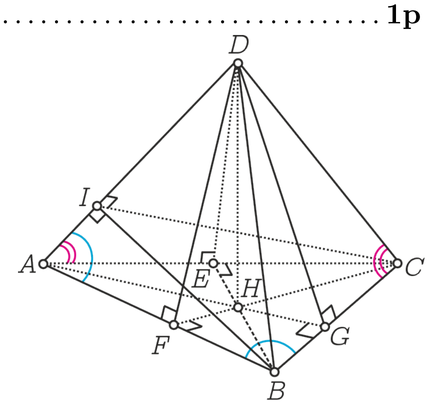
Perpendicularitățile $DE\perp AC$ și $DF\perp AB$ se mențin și pe desfășurare. Deducem că, pe desfășurare, punctele D_1, F și C, respectiv D_2, E și B sunt coliniare. **1p**

Din $\widehat{BAC}+\widehat{CAD}+\widehat{DAB}=180^\circ$ rezultă că punctele D_1, A și D_2 sunt coliniare; evident că A este mijlocul segmentului D_1D_2. .... **1p**

Deoarece $\widehat{ABC}\equiv\widehat{DAB}$, dreptele D_1D_2 și BC sunt paralele, așadar patrulaterul D_1D_2CB este un trapez, ale cărui diagonale se intersectează în H. Dreapta AH trece prin mijlocul bazei mari, deci conține și mijlocul bazei mici BC. Dar AH este înălțime a triunghiului ABC. Fiind și mediană, urmează că triunghiul ABC este isoscel, cu $AB=AC$ **2p**

Dreapta AH este mediatoarea comună a bazelor trapezului D_1D_2CB, așadar acesta este un trapez isoscel. Astfel, $D_1B=D_2C$, deci $DB=DC$. **1p**

Soluție alternativă. Din $\widehat{BAC}+\widehat{CAD}+\widehat{DAB}=180^\circ$, $\widehat{ABC}\equiv\widehat{DAB}$ și $\widehat{BAC}+\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=180^\circ$ rezultă că $\widehat{CAD}\equiv\widehat{ACB}$ **1p**



Fie H ortocentrul triunghiului ABC, BE, CF și AG înălțimile triunghiului ABC. Din teorema celor trei perpendiculare rezultă $DE\perp AC$, $DF\perp AB$ și $DG\perp BC$....... **1p**

Triunghiurile ABG și DAF sunt asemenea, așadar avem $\dfrac{AG}{AB}=\dfrac{DF}{AD}$, deci $AG\cdot AD=DF\cdot AB$. **1p**

Triunghiurile ACG și DAE sunt asemenea, deci $\dfrac{AG}{AC} = \dfrac{DE}{AD}$, adică $AG \cdot AD = DE \cdot AC$. . . **1p**

Așadar $DF \cdot AB = DE \cdot AC$, deci $\mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{ACD}$ **1p**

Din $AG \perp BC$ și $DG \perp BC$ rezultă $BC \perp (ADG) \Rightarrow BC \perp AD$. Dacă $BI \perp AD$ cu $I \in AD$, atunci $AD \perp (BIC)$. **1p**

Rezultă că $CI \perp AD$, deci $\mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{ACD} \Leftrightarrow BI = CI$, de unde deducem că triunghiurile AIB și AIC sunt congruente, deci $AB = AC$. Analog deducem că triunghiurile DIB și DIC sunt congruente, deci $DB = DC$. **1p**

Ministerul Educației
Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a IX-a

Problema 1. Fie triunghiul ABC.

a) Arătați că bisectoarea interioară a unghiului A și bisectoarele exterioare ale unghiurilor B și C se intersectează într-un punct I_A.

b) Notăm cu M, N și P proiecțiile punctului I_A pe dreptele AC, BC respectiv AB. Arătați că, dacă $\overrightarrow{I_AM} + \overrightarrow{I_AP} = \overrightarrow{I_AN}$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Gazeta Matematică

Problema 2. a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$[x]^2 - x = -0,99.$$

b) Arătați că, pentru orice $a \leq -1$, ecuația $[x]^2 - x = a$ **nu** are soluții reale.

Problema 3. Dacă x, y, z sunt numere pozitive cu $x + y + z = 1$, arătați că:

a)
$$1 - \frac{x^2 - yz}{x^2 + x} = \frac{(1-y)(1-z)}{x^2 + x};$$

b)
$$\frac{x^2 - yz}{x^2 + x} + \frac{y^2 - zx}{y^2 + y} + \frac{z^2 - xy}{z^2 + z} \leq 0.$$

Problema 4. Determinați funcțiile strict crescătoare $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ care au proprietatea:

numărul $f(x) \cdot f(y)$ divide numărul $(1 + 2x) \cdot f(y) + (1 + 2y) \cdot f(x)$,

pentru orice numere naturale x și y.

Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a IX-a – soluții

Problema 1. Fie triunghiul ABC.

a) Arătați că bisectoarea interioară a unghiului A și bisectoarele exterioare ale unghiurilor B și C se intersectează într-un punct I_A.

b) Notăm cu M, N și P proiecțiile punctului I_A pe dreptele AC, BC respectiv AB. Arătați că, dacă $\overrightarrow{I_AM} + \overrightarrow{I_AP} = \overrightarrow{I_AN}$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Gazeta Matematică

Soluție. a) Dacă I_A este punctul de intersecție al bisectoarelor exterioare ale unghiurilor B și C, atunci I_A se află în interiorul unghiului A și este egal depărtat de laturile AB și BC respectiv de BC și AC. Prin tranzitivitate, I_A este egal depărtat de laturile AB și AC ale unghiului A, este interior unghiului A, deci se află pe bisectoarea interioară a unghiului A.

.... **2p**

b) Din condiția $\overrightarrow{I_AM} + \overrightarrow{I_AP} = \overrightarrow{I_AN}$ deducem că patrulaterul I_AMNP este paralelogram. De asemenea din punctul a) avem că $I_AM = I_AN = I_AP$, deci I_AMNP este romb iar triunghiurile I_ANP și I_AMN sunt echilaterale.

.... **2p**

Astfel, patrulaterul inscriptibil API_AM are $\measuredangle PI_AM = 120°$, deci $\measuredangle A = 60°$.

.... **1p**

Pe de altă parte, B este unghi exterior patrulaterului inscriptibil I_APBN deci $\measuredangle B = \measuredangle PI_AN = 60°$ și C este unghi exterior patrulaterului inscriptibil I_AMCN deci $\measuredangle C = \measuredangle MI_AN = 60°$. Astfel, triunghiul ABC are toate unghiurile de $60°$, deci este echilateral.

.... **2p**

Problema 2. a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$[x]^2 - x = -0,99.$$

b) Arătați că, pentru orice $a \leq -1$, ecuația $[x]^2 - x = a$ **nu** are soluții reale.

Soluție.

a) Ecuația se scrie echivalent $[x]^2 - [x] = \{x\} - 0,99$, prin urmare $\{x\} - 0,99 \in \mathbb{Z}$.

.... **1p**

Cum $0 < \{x\} < 1$ deducem că $-0,99 < \{x\} - 0,99 < 0,01$ de unde $\{x\} - 0,99 = 0$ deci $\{x\} = 0,99$ **1p**

De asemenea, din $[x]^2 - [x] = 0$ deducem că $[x] = 0$ sau $[x] = 1$ deci $x \in \{0,99;\ 1,99\}$.

.... **1p**

b) Ecuația se scrie echivalent $[x]^2 - [x] = \{x\} + a$. Presupunem, prin absurd, că există $a \leq -1$ pentru care ecuația are soluții reale. Atunci, cum $\{x\} < 1$, avem $[x]^2 - [x] = \{x\} + a < 0$.

.... **2p**

Notând $[x] = y \in \mathbb{Z}$, avem $y(y-1) < 0$, deci $y \in (0, 1)$, ceea ce este absurd.

.... **2p**

Problema 3. Dacă x, y, z sunt numere pozitive cu $x + y + z = 1$, arătați că

a)

$$1 - \frac{x^2 - yz}{x^2 + x} = \frac{(1-y)(1-z)}{x^2 + x};$$

b)

$$\frac{x^2 - yz}{x^2 + x} + \frac{y^2 - zx}{y^2 + y} + \frac{z^2 - xy}{z^2 + z} \leq 0.$$

Soluție. a) $1 - \dfrac{x^2 - yz}{x^2 + x} = \dfrac{x + yz}{x^2 + x} = \dfrac{1 - y - z + yz}{x^2 + x} = \dfrac{(1-y)(1-z)}{x^2 + x}$.

.... **2p**

b) Folosind a), inegalitatea se rescrie

$$\frac{(1-y)(1-z)}{x(x+1)} + \frac{(1-z)(1-x)}{y(y+1)} + \frac{(1-x)(1-y)}{z(z+1)} \geq 3$$

adică

$$\frac{(x+z)(x+y)}{x[(x+z)+(x+y)]} + \frac{(y+z)(y+x)}{y[(y+z)+(y+x)]} + \frac{(z+y)(z+x)}{z[(z+y)+(z+x)]} \geq 3.$$

.... **2p**

Aplicând inegalitatea dintre media aritmetică și media armonică deducem

$$\frac{(x+z)(x+y)}{x[(x+z)+(x+y)]} + \frac{(y+z)(y+x)}{y[(y+z)+(y+x)]} + \frac{(z+y)(z+x)}{z[(z+y)+(z+x)]} \geq$$

$$\geq \frac{9}{\frac{x}{x+y} + \frac{x}{x+z} + \frac{y}{y+z} + \frac{y}{y+x} + \frac{z}{z+y} + \frac{z}{z+x}} = \frac{9}{1+1+1} = 3.$$

.... **3p**

Variantă soluție b). Folosind a), inegalitatea se rescrie

$$(1-x)(1-y)(1-z)\left(\frac{1}{x - x^3} + \frac{1}{y - y^3} + \frac{1}{z - z^3}\right) \geq 3.$$

.... **2p**

Aplicând inegalitatea dintre media aritmetică și media armonică avem

$$\frac{1}{x - x^3} + \frac{1}{y - y^3} + \frac{1}{z - z^3} \geq \frac{9}{(x+y+z) - (x^3 + y^3 + z^3)} = \frac{9}{1 - (x^3 + y^3 + z^3)} =$$

$$= \frac{9}{(x+y+z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3)} = \frac{9}{3(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{3}{(1-x)(1-y)(1-z)}.$$

.... **3p**

și inegalitatea este demonstrată.

Problema 4. Determinați funcțiile strict crescătoare $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ care au proprietatea:

numărul $f(x) \cdot f(y)$ divide numărul $(1+2x) \cdot f(y) + (1+2y) \cdot f(x)$,

pentru orice numere naturale x și y.

Soluție. a) Pentru $x = y = 0$ deducem $f^2(0) \mid 2f(0)$, de unde $f(0) \in \{0, 1, 2\}$. **1p**

Dacă $f(0) = 0$, pentru $y = 0$ avem $0 \mid f(x), \forall x \in \mathbb{N}$, deci $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{N}$, ceea ce contrazice faptul că f este strict crescătoare. **1p**

Dacă $f(0) = 1$, pentru $y = 0$, avem $f(x) \mid (2x+1) + f(x), \forall x \in \mathbb{N}$, prin urmare $f(x) \mid 2x+1, \forall x \in \mathbb{N}$. **1p**

Presupunând că $f(k) = 2k+1$, pentru un k natural oarecare, avem $f(k+1) \mid 2k+3$, și cum $f(k+1) > f(k) = 2k+1$ obținem $f(k+1) = 2k+3$, adică $f(x) = 2x+1, \forall x \in \mathbb{N}$.
.... **1p**

Dacă $f(0) = 2$, pentru $y = 0$, avem $2f(x) \mid 2(2x+1) + f(x), \forall x \in \mathbb{N}$, prin urmare $\dfrac{2(2x+1)+f(x)}{2f(x)} = \dfrac{2x+1}{f(x)} + \dfrac{1}{2} \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}$. **1p**

Presupunând că $f(k) = 4k+2$, pentru un k natural oarecare, avem $\dfrac{2k+3}{f(k+1)} + \dfrac{1}{2} \in \mathbb{N}$ și cum $f(k+1) > f(k) = 4k+2$ obținem $0 < \dfrac{2k+3}{f(k+1)} + \dfrac{1}{2} < \dfrac{2k+3}{4k+2} + \dfrac{1}{2} \leq 2$. Astfel $\dfrac{2k+3}{f(k+1)} + \dfrac{1}{2} = 1$, prin urmare $f(k+1) = 4k+6$, adică $f(x) = 4x+2, \forall x \in \mathbb{N}$. **1p**

Ambele funcții verifică proprietatea din enunț. **1p**

Notă. Pentru omiterea cazului $f(0) = 0$ se scade un punct.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a X-a

Problema 1. Determinați toate soluțiile reale ale ecuației

$$2^{x-1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 3.$$

Supliment Gazeta Matematică

Problema 2. Pe arcul mic AB al cercului circumscris triunghiului echilateral ABC se consideră punctul N astfel încât măsura arcului NB este 30°. Din punctul N se duc perpendiculare pe latura AC, respectiv AB. Acestea intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului ABC în punctele M, respectiv I.

a) Demonstrați că triunghiul IMN este echilateral.

b) Dacă H_1, H_2 și H_3 reprezintă ortocentrele triunghiurilor NAB, IBC, respectiv CAM, demonstrați că triunghiul $H_1H_2H_3$ este echilateral.

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Determinați toate numerele $z \in \mathbb{C}$ pentru care:

$$\left|z^{n+1} - z^n\right| \geq \left|z^{n+1} - 1\right| + \left|z^{n+1} - z\right|.$$

Problema 4. Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care:

$$f(xf(x) + f(y)) = f(f(x^2)) + y,$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a X-a – soluții

Problema 1. Determinați toate soluțiile reale ale ecuației

$$2^{x-1}+2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=3.$$

Supliment Gazeta Matematică

Soluție. Observăm că $x>0$. Ecuația inițială este echivalentă cu $2^x+2\cdot 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=6$. Conform inegalității mediilor obținem:

$$2^x+2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}+2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\geq 3\cdot\sqrt[3]{2^x\cdot 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}=3\cdot 2^{\frac{1}{3}\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)},$$

pentru orice $x>0$. **2p**

Dar $\frac{1}{3}\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\geq\sqrt[3]{x\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}=1$, care conduce la $2^x+2\cdot 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\geq 6$. **2p**

Așadar, avem nevoie de egalitate peste tot. Egalitatea în ambele cazuri se obține când $x=\frac{1}{\sqrt{x}}$, adică $x=1$, aceasta fiind unica soluție a acestei ecuații. **3p**

Notă: Nu se va acorda mai mult de **1 punct** pentru simpla enunțare a faptului că doar $x=1$ este soluție.

Problema 2. Pe arcul mic AB al cercului circumscris triunghiului echilateral ABC se consideră punctul N astfel încât măsura arcului NB este $30°$. Din punctul N se duc perpendiculare pe latura AC, respectiv AB. Acestea intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului ABC în punctele M, respectiv I.

a) Demonstrați că triunghiul IMN este echilateral.

b) Dacă H_1, H_2 și H_3 reprezintă ortocentrele triunghiurilor NAB, IBC, respectiv CAM, demonstrați că triunghiul $H_1H_2H_3$ este echilateral.

Soluție. a) Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Fără a pierde generalitatea, putem presupune că $O(0)$, iar vârfurile triunghiului ABC sunt $A(1)$, $B(\varepsilon)$ și $C(\varepsilon^2)$, unde $\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Deoarece măsura arcului NB este de $30°$, avem $AO\perp ON$, deci N va avea afixul i. Din condiția $NI\perp AB$ rezultă că există $\alpha\in\mathbb{R}^\star$ astfel încât:

$$\frac{i-z_I}{1-\varepsilon}=i\alpha\Rightarrow z_I=i-\frac{3}{2}i\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha,$$

unde z_I este afixul punctului I. Din condiția $|z_I|=1$ obținem $\alpha=1$, adică I este de afix $i\varepsilon$. În mod analog, din $MN\perp AC$ obținem că M este de afix $i\varepsilon^2$, de unde rezultă că triunghiul IMN este echilateral. **3p**

b) Din relația lui Sylvester avem că afixele ortocentrelor sunt date de $z_{H_1}=z_A+z_N+z_B=i+1+\varepsilon$, $z_{H_2}=z_B+z_M+z_C=\varepsilon+i\varepsilon+\varepsilon^2=\varepsilon z_{H_1}$ și $z_{H_3}=z_C+z_I+z_A=\varepsilon^2+i\varepsilon^2+1=\varepsilon^2 z_{H_1}$, de unde rezultă că triunghiul $H_1H_2H_3$ este echilateral. **4p**

Notă: Orice soluție în care nu se folosesc numere complexe se punctează echivalent.

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Determinați toate numerele $z \in \mathbb{C}$ pentru care:

$$|z^{n+1} - z^n| \geq |z^{n+1} - 1| + |z^{n+1} - z|.$$

Soluție. Observăm că $z = 1$ e soluție și $z = 0$ nu este soluție. Presupunem în continuare că $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Înmulțind inegalitatea din ipoteză cu $\frac{1}{|z|^{n+1}}$ și, notând $\frac{1}{z} = w$, obținem:

$$|1 - w| \geq \left|1 - w^{n+1}\right| + |1 - w^n| \geq \left|\left(1 - w^{n+1}\right) - (1 - w^n)\right| = |w|^n \, |1 - w| \, ,$$

ceea ce conduce la concluzia $|w| \leq 1$. **2p**

Atunci avem $\left|1 - w^{n+1}\right| + |1 - w^n| \geq \left|1 - w^{n+1}\right| + |w| \, |1 - w^n| \geq \left|1 - w^{n+1} - w \, (1 - w^n)\right| = |1 - w|$. Ipoteza conduce la $|w| = 1$ și $|1 - w| = \left|1 - w^{n+1}\right| + |1 - w^n|$. De asemenea, există $s \geq 0$ cu $1 - w^{n+1} = s \left(w^{n+1} - w\right)$. Prin conjugare obținem $1 - \frac{1}{w^{n+1}} = s \left(\frac{1}{w^{n+1}} - \frac{1}{w}\right)$, echivalent cu $w^{n+1} - 1 = s \, (1 - w^n)$. Adunăm cele două relații și obținem $s \left(w^{n+1} - w^n - w + 1\right)$=0, adică $s \, (w^n - 1) \, (w - 1) = 0$. **3p**

Dacă $w^n - 1 = 0$, deducem că $w \in U_n \backslash \{1\}$, iar dacă $s = 0$, obținem $w^{n+1} = 1$, deci $w \in U_{n+1} \backslash \{1\}$. Ținând cont de notațiile și observațiile inițiale, deducem că mulțimea soluțiilor inecuației din enunț este $U_n \cup U_{n+1}$, unde U_n reprezintă mulțimea rădăcinilor de ordin n ale unității. **2p**

Notă: Nu se acordă mai mult de **1 punct** pentru simpla enunțare fără justificare a soluțiilor.

Problema 4. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care:

$$f(xf(x) + f(y)) = f(f(x^2)) + y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Soluție. Pentru $x = 0$ obținem $f(f(y)) = f(f(0)) + y$, pentru orice $y \in \mathbb{R}$, adică funcția f este injectivă. **1p**

Apoi pentru $y = 0$ avem $f(xf(x) + f(0)) = f(f(x^2))$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ceea ce, din injectivitatea lui f, conduce la $xf(x) + f(0) = f(x^2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **1p**

Pentru $x = 1$ în ultima relație avem $f(0) = 0$, de unde ultima relație este echivalentă cu $xf(x) = f(x^2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, iar prima relație devine $f(f(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **1p**

Trecând $x \to f(x)$ în relația de mai sus, obținem $f(f(x)^2) = f(f(x))f(x) = xf(x) = f(x^2)$, de unde, folosind injectivitatea lui f, obținem $f(x)^2 = x^2$, adică pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $f(x) = x$ sau $f(x) = -x$. **1p**

Dacă prin absurd ar exista o pereche $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ astfel încât $f(x) = x$ și $f(y) = -y$, atunci am avea în relația din enunț $f(x^2 - y) = x^2 + y$, adică $x^2 - y = x^2 + y$ sau $x^2 - y = -x^2 - y$, ceea ce conduce la $y = 0$ sau $x = 0$, adică o contradicție. **2p**

Așadar, funcțiile căutate sunt $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ și $f = -\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$. **1p**

Notă: Primul punct din barem se acordă pentu orice modalitate alternativă de a demonstra că f este injectivă.

Ministerul Educației
Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2023

CLASA a XI-a

Problema 1. Determinaţi funcţiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care $f(1)=e$ şi $f(x+y)=e^{3xy}\cdot f(x)\cdot f(y)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie matricele inversabile $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, astfel ca matricea $A+B^{-1}$ să fie inversabilă, cu $\left(A+B^{-1}\right)^{-1}=A^{-1}+B$. Arătaţi că $\det(AB)=1$. Rămâne adevărată concluzia în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

Problema 3. Fie $a,b\in\mathbb{R}$, cu $a<b$. Presupunem că $f:[a,b]\to[a,b]$ este o funcţie continuă, cu proprietatea că există $c,d\in(a,b)$ astfel încât $f(c)=a$ şi $f(d)=b$. Arătaţi că funcţia $f\circ f:[a,b]\to[a,b]$ are cel puţin trei puncte fixe. ($x_0\in D$ se numeşte punct fix al funcţiei $\varphi:D\to D$ dacă $\varphi(x_0)=x_0$.)

Problema 4. Fie matricele $A,B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, cu proprietatea că $A^2=B^2=O_3$. Demonstraţi că $AB=BA$ implică $AB=O_3$. Arătaţi că implicaţia reciprocă este falsă.

Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2023

CLASA a XI-a – soluţii

Problema 1. *Determinaţi funcţiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care $f(1)=e$ şi $f(x+y)=e^{3xy}\cdot f(x)\cdot f(y)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.*

Gazeta Matematică

Soluţie. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie care satisface condiţiile din enunţ. Dacă există $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(a)=0$ atunci $f(x)=f(a+(x-a))=e^{3a(x-a)}f(a)f(x-a)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Contradicţie. Apoi $f(x)=e^{3x^2/4}f^2(x/2)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Rezultă $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. **1p**

Prin logaritmarea relaţiei din enunt, obţinem $\ln f(x+y)=3xy+\ln f(x)+\ln f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$, de unde $\ln f(x+y)-\dfrac{3(x+y)^2}{2}=\left[\ln f(x)-\dfrac{3x^2}{2}\right]+\left[\ln f(y)-\dfrac{3y^2}{2}\right],\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. **2p**

Definim funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\ln f(x)-\dfrac{3x^2}{2}$. Din relaţia anterioară rezultă că funcţia g satisface ecuaţia funcţională Cauchy $g(x+y)=g(x)+g(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. **1p**

Cum f este continuă, g este continuă. Rezultă $g(x)=g(1)x=\left(\ln f(1)-\dfrac{3}{2}\right)x=-\dfrac{x}{2},\ \forall x\in\mathbb{R}$
. . . . **2p**

Atunci $\ln f(x)-\dfrac{3x^2}{2}=-\dfrac{x}{2},\ \forall x\in\mathbb{R}$, de unde obţinem $f(x)=e^{\frac{x(3x-1)}{2}},\ \forall x\in\mathbb{R}$. Reciproc, aceasta funcţie satisface condiţiile din enunţ **1p**

Soluţie alternativă. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie care satisface condiţiile din enunţ. Atunci $f(1)=f(1)f(0)$, de unde $f(0)=1$ **1p**

Pentru orice $n\in\mathbb{N}$, avem $f(n)=e^{\frac{n(3n-1)}{2}}$ (demonstraţie prin inducţie) **1p**

Pentru $n\in\mathbb{N}$, avem $1=f(0)=e^{-3n^2}f(n)f(-n)$, de unde obţinem $f(-n)=e^{\frac{3(-n)^2-(-n)}{2}}$. Deducem $f(n)=e^{\frac{n(3n-1)}{2}},\ \forall n\in\mathbb{Z}$ **1p**

Pentru orice $x\in\mathbb{R}$ şi orice $n\in\mathbb{N}$, avem $f(nx)=e^{\frac{3n(n-1)x^2}{2}}f^n(x)$ (demonstraţie prin inducţie după $n\in\mathbb{N}$, pentru $x\in\mathbb{R}$, arbitrar) **1p**

Fie $r=\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}$, cu $m\in\mathbb{Z}$ şi $n\in\mathbb{N}^*$. Atunci $e^{\frac{m(3m-1)}{2}}=f(m)=f\left(n\cdot\dfrac{m}{n}\right)=e^{\frac{3n(n-1)}{2}\cdot\frac{m^2}{n^2}}f^n\left(\dfrac{m}{n}\right)$. Cum $f(x)=e^{3x^2/4}f^2(x/2)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, obţinem

$$f(r)=f\left(\frac{m}{n}\right)=e^{\frac{1}{n}\left(\frac{m(3m-1)}{2}-\frac{3m^2(n-1)}{2n}\right)}=e^{\frac{r(3r-1)}{2}}$$

. . . . **2p**

Fie $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Există un şir $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere raţionale cu $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=x$. Din continuitatea funcţiei f, rezultă $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(r_n)=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{r_n(3r_n-1)}{2}}=e^{\frac{x(3x-1)}{2}}$.

Prin urmare, dacă funcţia f satisface ipoteza, atunci $f(x)=e^{\frac{x(3x-1)}{2}},\ \forall x\in\mathbb{R}$. Reciproc, aceasta funcţie satisface condiţiile din enunţ **1p**

Problema 2. *Fie matricele inversabile $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, astfel ca matricea $A + B^{-1}$ să fie inversabilă, cu $\left(A + B^{-1}\right)^{-1} = A^{-1} + B$. Arătaţi că $\det(AB) = 1$. Rămâne adevărată concluzia în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?*

Soluţie. Din ipoteză, obţinem $I_n = \left(A + B^{-1}\right)\left(A^{-1} + B\right) = 2I_n + AB + B^{-1}A^{-1}$. Rezultă $AB + (AB)^{-1} + I_n = O_n$ **2p**
Notăm $C = AB$. Avem $C + C^{-1} + I_n = O_n$, sau $C^2 + C + I_n = O_n$ **1p**
Înmulţind relaţia de mai sus cu $C - I_n$ obţinem $C^3 - I_n = O_n$, deci $C^3 = I_n$...... **1p**
Atunci $(\det C)^3 = 1$. Cum $\det C \in \mathbb{R}$, găsim $\det C = 1$. Prin urmare, $\det(AB) = 1$ **1p**
Concluzia $\det(AB) = 1$ nu rămâne adevărată în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. De exemplu, alegem matricele inversabile $A = I_2$ şi $B = \varepsilon I_2$, unde $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Avem $\left(A + B^{-1}\right)\left(A^{-1} + B\right) = \left(1 + \varepsilon^2\right)(1 + \varepsilon)I_2 = I_2$, dar $\det(AB) = \varepsilon^2 \neq 1$ **2p**

Problema 3. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$. Presupunem că $f : [a, b] \to [a, b]$ este o funcţie continuă, cu proprietatea că există $c, d \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = a$ şi $f(d) = b$. Arătaţi că funcţia $f \circ f : [a, b] \to [a, b]$ are cel puţin trei puncte fixe. ($x_0 \in D$ se numeşte punct fix al funcţiei $\varphi : D \to D$ dacă $\varphi(x_0) = x_0$.)*

Soluţie. Considerăm funcţiile $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ definite prin $g(x) = f(x) - x$ şi respectiv $h(x) = (f \circ f)(x) - x$, pentru oricare $x \in [a, b]$. Funcţiile f, g şi h sunt continue pe $[a, b]$, deci au proprietatea lui Darboux pe $[a, b]$ **1p**
Distingem două cazuri.
1) $a < c < d < b$.
Avem $g(a) = f(a) - a \geq 0$, $g(c) = a - c < 0$, $g(d) = b - d > 0$ şi $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Atunci există punctele $x_1 \in [a, c)$, $x_2 \in (c, d)$ şi $x_3 \in (d, b]$ astfel încât $g(x_1) = g(x_2) = g(x_3) = 0$, cu $x_1 < x_2 < x_3$. Rezultă că f are cel puţin trei puncte fixe, deci şi $f \circ f$ are cel puţin trei puncte fixe **3p**
2) $a < d < c < b$.
Din $g(d) = b - d > 0$ şi $g(c) = a - c < 0$ rezultă că există $x_2 \in (d, c)$ astfel încât $g(x_2) = 0$. Atunci $f(x_2) = x_2$, de unde $(f \circ f)(x_2) = x_2$ **1p**
Avem $c \in (x_2, b) = (f(x_2), f(d))$. Atunci există $\alpha \in (d, x_2)$ astfel ca $f(\alpha) = c$. Rezultă $h(\alpha) = f(f(\alpha)) - \alpha = f(c) - \alpha = a - \alpha < 0$. Dar $h(a) = f(f(a)) - a \geq 0$. Deducem că există $x_1 \in [a, \alpha)$ astfel ca $h(x_1) = 0$, deci $(f \circ f)(x_1) = x_1$. Avem $d \in (a, x_2) = (f(c), f(x_2))$. Atunci există $\beta \in (x_2, c)$ astfel ca $f(\beta) = d$. Obţinem $h(\beta) = f(f(\beta)) - \beta = f(d) - \beta = b - \beta > 0$. Apoi $h(b) = f(f(b)) - b \leq 0$. Deducem că există $x_3 \in (\beta, b]$ astfel ca $h(x_3) = 0$, deci $(f \circ f)(x_3) = x_3$. Cum $x_1 < \alpha < x_2 < \beta < x_3$, rezultă că $f \circ f$ are cel puţin trei puncte fixe **2p**

Problema 4. *Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, cu proprietatea că $A^2 = B^2 = O_3$. Demonstraţi că $AB = BA$ implică $AB = O_3$. Arătaţi că implicaţia reciprocă este falsă.*

Soluţie. Presupunem $AB = BA$.
Atunci $(A + B)^2 = 2AB$. Rezultă $(A + B)^3 = 2AB(A + B) = 2A^2B + 2AB^2 = O_3$. **2p**
Apoi, $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 = O_3$. Din inegalitatea lui Sylvester pentru ranguri, obţinem $\operatorname{rang}(A + B) + \operatorname{rang}(A - B) \leq 3$. Astfel, $\operatorname{rang}(A + B) \leq 1$ sau $\operatorname{rang}(A - B) \leq 1$ **1p**
Presupunem $\operatorname{rang}(A + B) \leq 1$.
Dacă $\operatorname{rang}(A + B) = 0$, deci $A + B = O_3$, atunci $AB = -A^2 = O_3$ **1p**

Dacă $\operatorname{rang}(A+B) = 1$, atunci există două matrice nenule, $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ şi $D \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$, astfel încât $A+B = CD$. Rezultă $(A+B)^2 = (CD)(CD) = C(DC)D = \operatorname{Tr}(A+B)(A+B)$. Obţinem $O_3 = (A+B)^3 = \operatorname{Tr}(A+B)(A+B)^2$. Dacă $\operatorname{Tr}(A+B) \neq 0$ atunci $(A+B)^2 = O_3$, iar dacă $\operatorname{Tr}(A+B) = 0$ atunci din $(A+B)^2 = \operatorname{Tr}(A+B)(A+B)$ obţinem de asemenea $(A+B)^2 = O_3$. Rezultă $AB = O_3$ **1p**

Cazul $\operatorname{rang}(A-B) \leq 1$ se tratează analog, pe baza relaţiilor $(A-B)^2 = -2AB$ şi $(A-B)^3 = O_3$. **1p**

Contraexemplu pentru implicaţia reciprocă. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Avem $A^2 = B^2 = AB = O_3$, dar $AB \neq BA$ **1p**

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a XII-a

Problema 1. Fie $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă cu proprietatea că

$$(f''(x) - f(x)) \cdot \operatorname{tg}(x) + 2 \cdot f'(x) \geq 1\,, \qquad \text{pentru orice } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Arătați că

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot \sin(x)\, dx \geq \pi - 2\,.$$

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e, iar H și K două subgrupuri proprii ale lui G, cu proprietatea că $H \cap K = \{e\}$ și că $(G \setminus (H \cup K)) \cup \{e\}$ este parte stabilă în raport cu operația din G. Arătați că $x^2 = e$ pentru orice $x \in G$.

Problema 3. Fie $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă.
a) Arătați că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n)\, dx = f(0)\,.$$

b) Dacă $f(0) = 0$ și f este derivabilă la dreapta în 0, arătați că limitele

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{f(x)}{x}\, dx \qquad \text{și} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \int_0^1 f(x^n)\, dx\right)$$

există, sunt finite și egale.

Problema 4. Pe mulțimea $A = [0, \infty)$ a numerelor reale nenegative se consideră trei funcții $f, g, h : A \longrightarrow A$ și operația binară $* : A \times A \longrightarrow A$, definită prin

$$x * y = f(x) + g(y) + h(x) \cdot |x - y|\,, \qquad \text{pentru orice } x, y \geq 0.$$

Dacă $(A, *)$ este un monoid comutativ,
a) arătați că funcția h este continuă pe A;
b) determinați funcțiile f, g, h.

Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023

CLASA a XII-a – soluții

Problema 1. Fie $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă cu proprietatea că

$$(f''(x) - f(x)) \cdot \operatorname{tg}(x) + 2 \cdot f'(x) \geq 1\,, \qquad \text{pentru orice } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Arătați că

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot \sin(x)\, dx \geq \pi - 2\,.$$

Gazeta Matematică

Soluție. Deoarece $\cos(x) > 0$ pentru orice $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, inegalitatea din ipoteză se transcrie echivalent

$$(f''(x) - f(x)) \cdot \sin(x) + 2 \cdot f'(x) \cdot \cos(x) \geq \cos(x)\,, \qquad \text{pentru orice } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

.... **1p**

sau, $g''(x) \geq 0, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, unde $g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ este funcția definită prin
$g(x) = f(x) \cdot \sin(x) + \cos(x), \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. **2p**

Prin urmare, funcția g este convexă, astfel că

$$\frac{g(x) + g(-x)}{2} \geq g(0) = 1\,, \qquad \text{pentru orice } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

.... **1p**

Deoarece $\int_{-a}^{a} h(x)\, dx = \int_{-a}^{a} h(-x)\, dx$ are loc pentru orice funcție integrabilă și orice $a \geq 0$, avem

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x)\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{g(x) + g(-x)}{2}\, dx \geq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx = \pi$$

.... **2p**

Dar atunci

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot \sin(x)\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (g(x) - \cos(x))\, dx \geq \pi - 2\,. \qquad \square$$

.... **1p**

Problema 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e, iar H și K două subgrupuri proprii ale lui G, cu proprietatea că $H \cap K = \{e\}$ și că $(G \setminus (H \cup K)) \cup \{e\}$ este parte stabilă în raport cu operația din G. Arătați că $x^2 = e$ pentru orice $x \in G$.

Soluție. Fie $L = (G \setminus (H \cup K)) \cup \{e\}$. Deoarece $x \in H \cup K \Longleftrightarrow x^{-1} \in H \cup K$, rezultă că $x \in L \Longleftrightarrow x^{-1} \in L$, astfel că L este un subgrup propriu al lui G **1p**

În plus, $L \cap H = L \cap K = H \cap K = \{e\}$, ... **1p**

$G = H \cup K \cup L$ și rezultă că pentru orice permutare $\{A, B, C\} = \{H, K, L\}$, dacă $a \in A \setminus \{e\}$ și $b \in B \setminus \{e\}$, atunci $ab \in C \setminus \{e\}$.. **2p**

Atunci, în aceleași condiții ca mai sus, $a^2b = a(ab) \in B \setminus \{e\}$, astfel că $a^2 \in A \cap B = \{e\}$. . . **1p**
Prin urmare, $x^2 = e$ pentru orice $x \in G \setminus \{e\}$. **1p**
Cum $e^2 = e$, rezultă că $x^2 = e$ pentru orice $x \in G$. **1p**

Problema 3. Fie $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă.
a) Arătați că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n)\, dx = f(0)\,.$$

b) Dacă $f(0) = 0$ și f este derivabilă la dreapta în 0, arătați că limitele

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{f(x)}{x}\, dx \qquad \text{și} \qquad \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \int_0^1 f(x^n)\, dx \right)$$

există, sunt finite și egale.

Soluție. a) Din continuitatea funcției f rezultă că f este mărginită, cu $Im(f) \subseteq [-M, M]$, unde $M > 1$, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încât $|f(x) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall x \in [0, \delta]$, și pentru orice $x \in [0, 1 - \frac{\varepsilon}{4M}]$ există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x^n \in [0, \delta], \forall n \geq n_0$. Atunci

$$\left| \int_0^1 f(x^n)\, dx - f(0) \right| \leq \int_0^1 |f(x^n) - f(0)|\, dx =$$

$$= \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{4M}} |f(x^n) - f(0)|\, dx + \int_{1-\frac{\varepsilon}{4M}}^1 |f(x^n) - f(0)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{4M}\right) + \frac{\varepsilon}{4M} \cdot 2M < \varepsilon\,,$$

pentru orice $n \geq n_0$. Rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n)\, dx = f(0)\,.$$

. . . . **2p**
b) Deoarece f este derivabilă în 0, funcția $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & ,\ \text{dacă } x > 0, \\ f'(0) & ,\ \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

este continuă. **1p**
Fie G o primitivă a sa. Atunci

$$\int_\varepsilon^1 \frac{f(x)}{x}\, dx = \int_\varepsilon^1 g(x)\, dx = G(1) - G(\varepsilon),$$

și

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{f(x)}{x}\, dx = G(1) - G(0).$$

. . . . **2p**
De asemenea,

$$n \cdot \int_0^1 f(x^n)\, dx = n \cdot \int_0^1 x^n g(x^n)\, dx = \int_0^1 x \cdot (nx^{n-1}) g(x^n)\, dx =$$

$$= x \cdot G(x^n)\Big|_0^1 - \int_0^1 G(x^n)\, dx = G(1) - \int_0^1 G(x^n)\, dx.$$

Conform punctului a) rezultă atunci că

$$\lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \int_0^1 f(x^n)\, dx \right) = G(1) - G(0),$$

și afirmația din enunț este demonstrată. **2p**

Problema 4. Pe mulțimea $A = [0, \infty)$ a numerelor reale nenegative se consideră trei funcții $f, g, h : A \longrightarrow A$ și operația binară $* : A \times A \longrightarrow A$, definită prin

$$x * y = f(x) + g(y) + h(x) \cdot |x - y|\,, \qquad \text{pentru orice } x, y \geq 0.$$

Dacă $(A, *)$ este un monoid comutativ,
a) arătați că funcția h este continuă pe A;
b) determinați funcțiile f, g, h.

Soluție. a) Fie e elementul neutru al monoidului $(A, *)$. Atunci

$$f(0) + g(e) + h(0) \cdot e = 0 * e = 0 \qquad \text{și} \qquad f(e) + g(0) + h(e) \cdot e = e * 0 = 0\,,$$

astfel că $f(e) = g(e) = f(0) = g(0) = h(e) \cdot e = h(0) \cdot e = 0$, de unde $e = e * e = f(e) + g(e) = 0$.
.... **1p**
Atunci $0 * x = x$ și $x * 0 = x$ pentru orice $x \geq 0$, de unde obținem că

$$f(0) + g(x) + h(0) \cdot x = x\,, \qquad \text{și} \qquad f(x) + g(0) + h(x) \cdot x = x,$$

astfel că $f(x) = x(1 - h(x))$ și $g(x) = x(1 - h(0))$ pentru orice $x \geq 0$. Cum $f(x), g(x) \geq 0$, rezultă că $h(x) \in [0, 1], \forall x \geq 0$. **1p**
Avem atunci că

$$x * y = x + y - x \cdot h(x) - y \cdot h(0) + h(x) \cdot |x - y|\,, \quad \forall x, y \geq 0.$$

Din comutativitatea operației " $*$ " rezultă atunci că

$$xh(x) - yh(y) = h(0)(x - y) + (h(x) - h(y)) \cdot |x - y|\,, \quad \forall x, y \geq 0.$$

.... **1p**
Cum h este mărginită, rezultă că $\lim_{x\to y} xh(x) = yh(y)$ pentru orice $y \geq 0$, astfel că funcția $p : A \longrightarrow A$, $p(x) = xh(x)$, este continuă. Dar atunci h este continuă pe $(0, \infty)$. **1p**
De asemenea, pentru orice $y > 0$ avem că

$$\lim_{x\to y} \frac{p(x) - p(y)}{x - y} = h(0)\,,$$

astfel că există $a = h(0)$ și $b \geq 0$ astfel încât $p(y) = ay + b = h(0)y + b, \forall y > 0$. Atunci $b = \lim_{y\to 0} p(y) = p(0) = 0$. Dar atunci $yh(y) = p(y) = yh(0)$ pentru orice $y > 0$ și rezultă că

$h(y) = h(0)$, $\forall y > 0$. Funcția h este deci constantă, deci continuă. **1p**

b) Fie $k = h(0)$. Atunci $h(x) = k$ și $f(x) = g(x) = x(1-k)$, pentru orice $x \geq 0$, și $x * y = (x+y)(1-k) + k|x-y|$, $\forall x, y \geq 0$. Atunci $(1*1)*2 = 1*(1*2) \Longrightarrow k(4k-2) = 0$, astfel că $k \in \{0, \frac{1}{2}\}$. **1p**

Pentru $k = 0$ avem că $f = g = id_A$ și $x * y = x + y$, $\forall x, y \geq 0$.

Pentru $k = \frac{1}{2}$ avem că $f(x) = g(x) = \frac{x}{2}, \forall x \geq 0$ și $x * y = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2} = \max(x, y)$, $\forall x, y \geq 0$
. . . . **1p**