Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa județeană
08 martie 2025
Clasa a IX–a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii
Barem de notare și evaluare

Subiectul 1

a) *Demonstrați că* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$, *pentru orice* $x,y\in(0,+\infty)$. *Când are loc egalitatea?*

b) *Demonstrați că dacă* a,b,c *sunt lungimile laturilor unui triunghi atunci* $2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\leq\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}$,

unde $p=\frac{a+b+c}{2}$.

c) *Determinați natura unui triunghi cu laturile de lungime* a,b,c *știind că* $\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{a+c-b}+\frac{1}{a+b-c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Soluție:

a) Inegalitatea este echivalentă cu $(x+y)^2\geq 4x\cdot y$ sau $(x-y)^2\geq 0,\forall x,y\in(0,+\infty)$ ……………………2p

Egalitatea are loc pentru $x=y$ ……………………1p

b) Conform a) avem $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\geq\frac{4}{2p-a-b}=\frac{4}{c}$ și analoagele……………………1p

De unde prin însumare $\Rightarrow\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ ……………………1p

Egalitatea are loc pentru triunghi echilateral.

c) $\frac{1}{b+c-a}=\frac{1}{a+b+c-2a}=\frac{1}{2p-2a}$ și analoagele……………………1p

Condiția devine $2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}$ conform a) și b) obținem $p-a=p-b=p-c$ deci

triunghiul este echilateral……………………1p

Subiectul 2

O mulțime $A\subset\mathbb{N}^*$ *cu* n *elemente este perfectă dacă suma elementelor sale, este egală cu pătratul numărului de elemente.*

a) *Determinați mulțimile perfecte cu trei elemente.*

b) *Arătați că orice mulțime perfectă conține cel puțin un număr impar.*

c) *Dacă mulțimea A este perfectă și are* n *elemente, numere naturale consecutive, arătați că* n *este impar.*

Soluție:

$A=\{a,b,c\}, a,b,c\in\mathbb{N}^*$, a,b,c distincte și $a+b+c=9$ ……………………1p

Găsim mulțimile $\{1,2,6\}$, $\{1,3,5\}$ și $\{2,3,4\}$ ……………………2p b)Presupunem prin reducere la absurd că există o mulțime $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ cu n elemente numere pare distincte nenule și $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2$ 1p

$n^2 = a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 2 + 4 + \dots + 2n = n^2 + n$, fals. Presupunerea făcută este falsă, deci orice mulțime *perfectă* conține cel puțin un număr impar. 1p

c) $A = \{a, a+1, a+2, \dots, a+(n-1)\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{N}^*$ 1p

$n^2 = a_1 + a_2 + \dots + a_n = na + \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow 2n = 2a + n - 1 \Rightarrow n = 2a - 1 \Rightarrow$ n este număr impar 1p

Subiectul 3

Fie $E(k) = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{k}], k \in \mathbb{N}^*$ *unde* $[a]$ *reprezintă partea întreagă a numărului real* a.

a) *Calculați* $E(50)$.

b) *Determinați cel mai mic număr natural* k *pentru care* $E(k) \geq 500$.

c) *Rezolvați ecuația* $E(n^2) = m$*, unde numerele* m *și* n *sunt numere naturale prime între ele.*

Soluție:

a) $E(50) = ([\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}]) + ([\sqrt{4}] + [\sqrt{5}] + \dots + [\sqrt{8}]) + \dots + ([\sqrt{36}] + [\sqrt{37}] + \dots + [\sqrt{48}]) + [\sqrt{49}] + [\sqrt{50}]$ 2p

$E(50) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 11 + 6 \cdot 13 + 7 + 7 = 217$ 1p

b) $E(n^2 - 1) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + (n-1)(2n-1)$ 1p

$E(9^2 - 1) = 444$. Cum $500 - 444 = 56$, iar $56 : 9 = 6,(2)$ trebuie adunați șapte termeni, în sumă. Obținem $E(87) = 507$, deci $k_{minim} = 87$. 1p

c) $E(n^2) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + (n-1)(2n-1) + n = n + 2(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) - 3(1 + 2 + \dots + n) + n = 2n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{4n^3 - 3n^2 + 5n}{6}$ 1p

Obținem $4n^3 - 3n^2 + 5n = 6m$. Rezultă $6m \vdots n$ și cum numerele m și n sunt numere naturale prime între ele, avem $6 \vdots n$. Găsim soluțiile $(m, n) \in \{(1,1), (5,2), (16,3), (131,6)\}$. 1p

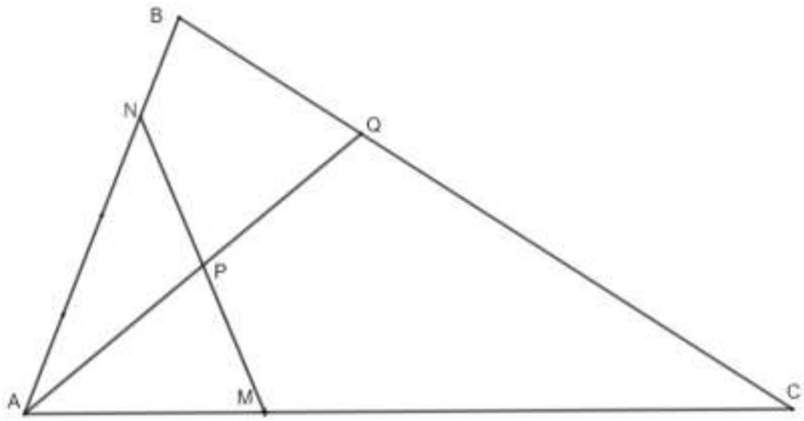
Subiectul 4

În figura următoare este prezentată schematic o rețea de drumuri, în linie dreaptă, între localitățile indicate în figură: A, B, C, M, N, P *și* Q. *Localitatea* M *este situată pe drumul* AC *astfel încât* $AM = 40\,km$, $MC = 80\,km$. *Localitatea* N *este situată pe drumul* AB *astfel încât* $\overrightarrow{AN} + 3\overrightarrow{BN} = \vec{0}$. *Localitatea* P *este situată pe drumul* MN *la egală distanță de localitățile* M *și* N. *Localitatea* Q *este pe drumul* BC, $BC = 260\,km$ *astfel încât punctele* A, P, Q *sunt coliniare și* $CQ = k \cdot QB, k > 0$.

a) *Arătați că* $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$.

b) *Exprimați vectorul* $\overrightarrow{AQ}$ *în funcție de vectorii* $\overrightarrow{AB}$ *și* $\overrightarrow{AC}$ *și de constanta* k.

c) *Determinați constanta* k *și lungimea segmentului* CQ.



Soluție:

a) $\overrightarrow{AN} + 3\overrightarrow{BN} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AN} + 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AN} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ 1p

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ 1p

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right) = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$ 1p

b) $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AC} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB}$ 2p

c) $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}$ sunt vectori coliniari, rezultă că $\overrightarrow{AP} = a \cdot \overrightarrow{AQ}, a \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{a}{k+1} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{ak}{k+1} = \frac{3}{8} \Rightarrow k = \frac{9}{4}$ 1p

$\frac{CQ}{QB} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{CQ}{BC} = \frac{9}{13} \Rightarrow CQ = 180\ km$....................1p

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa județeană
08 martie 2025
Clasa a X –a – Secțiunea H2 - Profil real, specializarea științe ale naturii
Barem de notare și evaluare

Subiectul 1

O planetă acoperită în întregime de apă descrie o rotație completă în jurul stelei sale într-un an de 360 de zile. Temperatura medie a apei de pe planetă în cea de-a n-a zi a anului, exprimată în grade Celsius, este dată de formula $T(n)=\frac{100}{3}+\frac{200\cdot sin(n°)}{3}$, *unde* $n\in\{1,2,3,\ldots,360\}$.

a) În câte zile ale unui an este planeta înghețată, știind că apa îngheață la $0^{\circ}C$ *?*

b) Care este temperatura medie maximă a apei de pe acea planetă de-a lungul unui an?

Soluție:

a) Condiția $\frac{100}{3}+\frac{200\cdot sin(n°)}{3}\le 0$ revine la $sin(n°)\le -\frac{1}{2}$. 1p

$n\in\{210,211,\ldots,330\}$, deci apa este înghețată timp de 121 de zile 3p

b) $T(n)$ este maximă atunci când $sin(n°)=1$. Pentru $n=90$ obținem $T_{\max}=\frac{100}{3}+\frac{200}{3}=100^{0}C$ ... 3p

Subiectul 2

a) Determinați mulțimea $A=\left\{n\in\mathbb{N}\mid\sqrt{n^2+n+15}\in\mathbb{Q}\right\}$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\log_{\frac{x}{2}}8+\log_{\frac{x}{4}}8\le\frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2-4}$.

Soluție:

a) $\sqrt{n^2+n+15}\in\mathbb{Q}$ dacă și numai dacă numărul n^2+n+15 este un pătrat perfect 1p

Observăm că $n^2<n^2+n+15<(n+4)^2,\forall n\in\mathbb{N}$ 1p

Rezolvând în numere naturale ecuațiile $n^2+n+15=(n+1)^2$, $n^2+n+15=(n+2)^2$ și $n^2+n+15=(n+3)^2$, obținem singura soluție convenabilă $n=14$, prin urmare $A=\{14\}$ 1p

b) Din condițiile de existență ale logaritmilor rezultă că $x\in(0,+\infty)\setminus\{2,4\}$ 1p

Inecuația din enunț se scrie sub forma $\frac{3}{\log_2 x-1}+\frac{3}{\log_2 x-2}\le\frac{2\log_2 x}{\log_2 x-2}$ 1p

Cu notația $\log_2 x=t$, avem de rezolvat inecuația $\frac{3}{t-1}+\frac{3}{t-2}\le\frac{2t}{t-2}$. Obținem $t\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$, prin urmare $x\in(0,2)\cup(4,+\infty)$ 2p

Subiectul 3

a) *Demonstrați inegalitatea* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{xyz}}$, $\forall\ x,y,z\in(0,+\infty)$.

b) Fie a, b și c trei numere complexe nenule având același modul. Arătați că $a+b+c=0$ *dacă și numai dacă* $ab+bc+ca=0$.

Soluție:

a) Inegalitatea este echivalentă cu $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}$, ... 1p

care se rescrie succesiv $\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}\geq\frac{2}{\sqrt{xy}}+\frac{2}{\sqrt{yz}}+\frac{2}{\sqrt{zx}}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{z}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\geq 0$,

fapt evident adevărat 2p

b) Notăm cu *r* modulul numerelor *a*, *b* și *c*. Avem: $a+b+c=0\Leftrightarrow\overline{a+b+c}=0\Leftrightarrow\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=0\Leftrightarrow$ ...1p

$\Leftrightarrow 0=\frac{a\cdot\overline{a}}{a}+\frac{b\cdot\overline{b}}{b}+\frac{c\cdot\overline{c}}{c}=\frac{r^2}{a}+\frac{r^2}{b}+\frac{r^2}{c}\Leftrightarrow 0=\frac{r^2}{a}+\frac{r^2}{b}+\frac{r^2}{c}=r^2\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.............................. 2p

$\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0\Leftrightarrow ab+bc+ca=0$ 1p

Subiectul 4

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $f(x)=\log_7\left(6^x+1\right)$.

a) Arătați că funcția f este inversabilă și determinați inversa sa.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7\left(6^x+1\right)=\log_6\left(7^x-1\right)$.

Gazeta Matematică 12/2024 (Supliment)

Soluție:

a) Demonstrarea bijectivității 2p

$f^{-1}:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=\log_6\left(7^x-1\right)$ 1p

b) Fie x număr real astfel încât $f(x)=f^{-1}(x)$. Ecuația $f(x)=f^{-1}(x)$ implică, conform domeniului de definiție al funcției f^{-1}, că $x>0$. Observăm că funcțiile f și f^{-1} sunt funcții strict crescătoare.

Fie $y=f(x)$. Vom demonstra că $y=x$. Să presupunem că $y<x$. Atunci $f(x)<x$. Cum f^{-1} este o funcție strict crescătoare, atunci $f^{-1}(f(x))<f^{-1}(x)$, adică $x<f^{-1}(x)$. Însă $f^{-1}(x)=f(x)$, ceea ce implică $x<f(x)$, adică $x<y$ ceea ce este fals. Prin raționament similar, relația $x<y$ implică $y<x$, ceea ce este fals. Prin urmare, unica posibilitate este $y=x$. 2p

Rămâne să rezolvăm ecuația $\log_7\left(6^x+1\right)=x$. Aceasta revine la $7^x=6^x+1$, sau $\left(\frac{6}{7}\right)^x+\left(\frac{1}{7}\right)^x=1$. Cum funcția $g:(0;+\infty), g(x)=\left(\frac{6}{7}\right)^x+\left(\frac{1}{7}\right)^x$ este strict descrescătoare, deci injectivă, iar $g(1)=1$, rezultă că $x=1$ este unica soluție a ecuației din enunț. 2p

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa județeană
08 martie 2025
Clasa a XI –a – Secțiunea H2 - Profil real, specializarea științe ale naturii

Barem de notare și evaluare

Subiectul 1

Două funcții $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se numesc prietene dacă există și este finită limita, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+g(x))$.

a) Arătați că funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{8x^3-3x^2}$ și $g(x) = -2x$ sunt prietene.

b) Determinați numerele reale a, b cu $a > 0$ astfel încât funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{ax^2+x+4}$ și $g(x) = -2x+b$ să fie prietene.

c) Dați un exemplu de trei funcții $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât funcțiile f și h respectiv g și h să fie prietene, dar f și g să nu fie prietene.

Soluție:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3-3x^2}-2x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-3x^2}{\sqrt[3]{(8x^3-3x^2)^2}+2x\sqrt[3]{8x^3-3x^2}+4x^2}\right)$ 1p

$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+g(x)) = -\frac{1}{4} \Rightarrow f, g -$ prietene 1p

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+x+4}-2x+b\right) = \lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{a+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}-2+\frac{b}{x}\right) = \infty\cdot\left(\sqrt{a}-2\right) = \begin{cases} -\infty, \sqrt{a}-2<0 \\ \infty, \sqrt{a}-2>0 \end{cases}$ 1p

Cum limita este finită, atunci $\sqrt{a}-2=0 \Rightarrow a=4$ 1p

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+4}-2x+b\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{\sqrt{4x^2+x+4}+2x}+b\right) = \frac{1}{4}+b =$ finită

Finalizare, $a=4, b\in\mathbb{R}$. 1p

c) Putem considera $f(x) = \sqrt[3]{8x^3-3x^2}$, $g(x) = \sqrt{4x^2+x+4}$ și $h(x) = -2x$

$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+h(x)) = -\frac{1}{4}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(g(x)+h(x)\right) = \frac{1}{4}$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+g(x)) = \infty$ 2p

Subiectul 2

Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]-1 &, x<0 \\ e^x-\cos x-1, & x\geq 0 \end{cases}$, unde $\left[\frac{1}{x}\right]$ este partea întreagă a lui $\frac{1}{x}$. Arătați că:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$;

b) Funcția f nu are proprietate a lui Darboux pe $\mathbb{R}$;

c) Ecuația $f(x) = 0, x\in\mathbb{R}$ are o infinitate de soluții, cel puțin una pozitivă.

Soluție:

a) $\frac{1}{x}-1 < \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}^*$. Pentru $x<0 \Rightarrow 1 \leq x\left[\frac{1}{x}\right] < 1-x$, astfel $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$. 1p

Pentru $x>0 \Rightarrow 1-x < x\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1$, astfel $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$. ....,......1p

Prin urmare, $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$. ....,........1p

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = -1$, deci $x=0$ este punct de discontinuitate de spența întâi ....,....... 1p

Prin urmare, f nu are proprietatea lui Darboux ....,......... 1p

c) Pentru $x < 0, f(x) = 0 \Longrightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{x}$, de aici $\frac{1}{x} = n \in \mathbb{Z}, x = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}, n < 0$ sunt soluții 1p

Pentru $x \geq 0, f(x) = 0 \Longrightarrow\ e^x - \cos x - 1 = 0$. Considerăm $g: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = e^x - \cos x - 1$ pentru orice $x \geq 0$. Atunci g este continuă, iar ecuația $f(x) = 0$ pentru $x \geq 0$ devine $g(x) = 0$ pentru $x \geq 0$.

Observăm că $g(0) = e^0 - \cos 0 - 1 = 1 - 1 - 1 = -1 < 0$. Mai mult, avem $g(1) = e^1 - \cos 1 - 1$. Cum $\cos 1 < 1 \Longrightarrow 1 + \cos 1 < 1 + 1 < e$, de unde obținem că $e - \cos 1 - 1 > 0$, adică $g(1) > 0$.

Prin urmare, există $x_0 \in (0, 1)$ astfel încât $g(x_0) = 0$. Astfel ecuația $f(x) = 0,\ x > 0$ are cel puțin o soluție pozitivă 1p

Subiectul 3

O matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se numește interesantă dacă are suma elementelor de pe diagonala principală egală cu zero. Considerăm matricele $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $M(a, b) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{C}$.

a) Fie A o matrice interesantă. Arătați că există $a, b \in \mathbb{C}$ astfel încât toate elementele de pe diagonala principală a matricei $A - SM(a, b)S^{-1}$ să fie egale cu zero.

b) Arătați că orice matrice interesantă poate fi scrisă ca suma a trei matrice nilpotente. (O matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se numește nilpotentă dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $X^n = O_3$).

c) Dați un exemplu de trei matrice $X, Y, Z \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ care să verifice $X + Y + Z = B$ și $X^3 = Y^3 = Z^3$, unde $B = \begin{pmatrix} 2025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2025 \end{pmatrix}$.

Soluție:

a) $S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 1p

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; $a_{ij} \in \mathbb{C}, a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$,

$A - SM(a, b)S^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} - b & a_{12} + b & a_{13} - b \\ a_{21} - b & a_{22} - a + b & a_{23} + a - b \\ a_{31} & a_{32} - a & a_{33} + a \end{pmatrix}$ 1p

$a_{11} - b = 0, a_{22} - a + b = 0, a_{33} + a = 0$, deci $a_{11} = b, a_{33} = -a$ (se verifică $a_{22} - a + b = 0$) 1p

b) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0, M(a, b) = M(-a_{33}, a_{11}) = M$ 1p

Conform a) $A - SM(a, b)S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & 0 & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & 0 \end{pmatrix}$ deci alegem $X = SMS^{-1}, X^3 = SM^3S^{-1} = O_3$

$Y = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 0 & x_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y^3 = O_3, Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 \end{pmatrix}, Z^3 = O_3$ și atunci $A = X + Y + Z;\ X, Y, Z$ nilpotente.........1p

c) Folosim b) $X = SM(2025, 2025)S^{-1} = \begin{pmatrix} 2025 & -2025 & 2025 \\ 2025 & 0 & 0 \\ 0 & 2025 & -2025 \end{pmatrix}$

$Y = \begin{pmatrix} 0 & 2025 & -2025 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2025 & 0 & 0 \\ 0 & -2025 & 0 \end{pmatrix}$, $B = X + Y + Z$ și $X^3 = Y^3 = Z^3 = O_3$. 2p

Subiectul 4

Ana vrea să planteze, în grădina sa, trei copaci. Considerăm că suprafața grădinii este raportată la reperul cartezian xOy, unitatea de măsură, pe axele reperului, fiind egală cu 1m. Un peisagist i-a sugerat să planteze primul copac în punctul $A(3,0)$; al doilea copac să-l planteze pe dreapta (d) de ecuație $4x - y - 12 = 0$, la o distanță egală cu $\sqrt{17}$ m față de primul copac; iar ultimul copac să-l planteze pe parabola p de ecuație $y = x^2$.

Ana își dorește ca aria suprafeței triunghiulare determinată de cei trei copaci să fie minimă.

a) Ajut-o pe Ana să determine pozițiile celor trei copaci.

b) Scrieți ecuația dreptei pe care sunt situați al doilea și al treilea copac.

Soluție

a) $B \in d$ și $AB = \sqrt{17} \Rightarrow (x-3)^2 + (4x-12)^2 = 17 \Rightarrow B_1(4,4)\ sau\ B_2(2,-4)$ 2p

$A_{ABC} = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$ 1p

Pentru $B = B_1(4,4), C(x, x^2), \Delta = x^2 - 4x + 12, A_{ABC} = \frac{1}{2}((x-2)^2 + 8)$ = minimă pentru $x = 2$

$\Rightarrow C(2,4)$ 2p

Pentru $B = B_2(2,-4), C(x, x^2), \Delta = -x^2 + 4x - 12, A_{ABC} = \frac{1}{2}((x-2)^2 + 8)$ = minimă pentru $x = 2$

Deci $C(2,4)$. Prin urmare, ambele poziții pentru punctul B pot fi alese. 1p

b) $B = B_1(4,4), C(2,4)$ ecuația dreptei BC este $y = 4$ sau $B = B_2(2,-4), C(2,4)$ ecuația dreptei BC este $x = 2$ 1p

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”
Etapa județeană
08 martie 2025
Clasa a XII –a – Secțiunea H2 - Profil real, specializarea științe ale naturii
Barem de notare și evaluare

Subiectul 1

Fie $G_k = (-k, k), k > 0$ *și operația* $x * y = \frac{k^2(x+y)}{k^2+xy}, \forall x, y \in G_k$.

a) *Să se demonstreze că* G_k *este parte stabilă a lui* $\mathbb{R}$ *în raport cu operația „$*$”.*

b) *Demonstrați că legea „$*$” este asociativă.*

c) *Știind că* $(G_k, *)$ *este grup abelian, să se demonstreze că funcția* $f: G_1 \to (0, +\infty)$, $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ *este un izomorfism între grupurile* $(G_1, *)$ *și* $((0, +\infty), \cdot)$.

d) *Determinați numărul natural* n *pentru care avem, în grupul abelian* $(G_1, *)$ *ecuația:*
$\frac{1}{7} * \frac{1}{17} * \frac{1}{31} * \ldots * \frac{1}{2n^2-1} = \frac{506}{1519}$.

Soluție

a) $\forall x, y \in (-k, k) \Rightarrow |x| < k, |y| < k \Rightarrow |xy| < k^2 \Rightarrow xy \in (-k^2, k^2) \Rightarrow k^2 + xy > 0$.................**1p**

Demonstrează că $-k(k^2 + xy) < k^2(x + y) < k(k^2 + xy), \forall x, y \in (-k, k) \Rightarrow$

$-k < \frac{k^2(x+y)}{k^2+xy} < k, \ \forall x, y \in (-k, k) \Rightarrow x * y \in (-k, k)$, prin urmare G_k este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$”..**1p**

b) Demonstrează asociativitatea..**1p**

c) Demonstrează f morfism..**1p**

Demonstrează f bijectivă.. **1p**

d) Numerele reale $\frac{1}{7}, \frac{1}{17}, \frac{1}{31}, \ldots, \frac{1}{2n^2-1}$ sunt elemente ale mulțimii G_1 și din punctul c) știm că $f: G_1 \to (0, +\infty), f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ este un izomorfism între grupurile $(G_1, *)$ și $((0, +\infty), \cdot)$.

Notăm $N = \frac{1}{7} * \frac{1}{17} * \frac{1}{31} * \ldots * \frac{1}{2n^2-1}$. Se demostrează folosind metoda inducției matematice că $f(x_1 * x_2 * \ldots * x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \ldots \cdot f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și $\forall x_i \in G_1, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$f(N) = f\left(\frac{1}{7}\right) \cdot f\left(\frac{1}{17}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(\frac{1}{2n^2-1}\right) = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{n+1}{2n}; f\left(\frac{506}{1519}\right) = \frac{1013}{2025}$$

$\overset{f=inj}{\Rightarrow} \frac{n+1}{2n} = \frac{1013}{2025} \Rightarrow n = 2025$..**2p**

Subiectul 2:

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x^2+1} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) *Calculați* I_1, I_2.

b) *Arătați că* $I_1 + I_3 + I_5 + \ldots + I_{2025}$ *este număr irațional.*

c) *Comparați* I_n *și* I_{n+2} *și calculați* $[2000 \cdot I_{50}]$, *unde* $[a]$ *reprezintă partea întreagă a numărului real* a.

Soluție:

a) $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = arctgx|_0^1 = \frac{\pi}{4}$; $I_2 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}ln(x^2+1)|_0^1 = \frac{1}{2}ln\,2$.................**2p**

b) $I_1 + I_3 + I_5 + \cdots + I_{2025} = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{x^2+x^4}{x^2+1}dx + \cdots + \int_0^1 \frac{x^{2022}+x^{2024}}{x^2+1}dx$

$I_1 + I_3 + I_5 + \ldots + I_{2025} = \frac{\pi}{4} + \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x^6 dx + \ldots + \int_0^1 x^{2022} dx$

$I_1 + I_3 + I_5 + \ldots + I_{2025} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2023} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ **2p**

c) $\frac{x^{n-1}}{x^2+1} \geq \frac{x^{n+1}}{x^2+1}, \forall x \in [0,1]$, funcțiile $\frac{x^{n-1}}{x^2+1}$ și $\frac{x^{n+1}}{x^2+1}$ sunt continue și integrabile pe intervalul $[0;1] \Rightarrow$

$\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x^2+1}dx \geq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+1}dx \Rightarrow I_n \geq I_{n+2}$...**1p**

$I_n + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^{n-1}+x^{n+1}}{x^2+1}dx = \int_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{2n} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-2)}$......................................**1p**

$n = 50 \Rightarrow \frac{1}{100} \leq I_{50} \leq \frac{1}{96} \Rightarrow 20 \leq 2000 \cdot I_{50} \leq \frac{2000}{96} < 21 \Rightarrow [2000 \cdot I_{50}] = 20$...................**1p**

Subiectul 3:

Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = (x+1)\cdot(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+2n), n \in \mathbb{N}^*$ *și* $A_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

a) *Calculați* A_1 .

b) *Calculați* $\int_1^e \frac{f_1(x)}{x+1} ln(x)\,dx$ *și* $\int_1^2 \frac{f_1(x)}{(x+1)(x^2+4x)}dx$.

c) *Arătați că:* $(2n+1)\cdot A_n < \left(\frac{2n+3}{2}\right)^{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție:

a) $A_1 = \int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 (x+1)(x+2)dx = \int_0^1 (x^2+3x+2)dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x\right)|_0^1 =$
$\frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 2 = \frac{23}{6}$..**1p**

b) $\int_1^e \frac{f_1(x)}{x+1} ln(x)dx = \int_1^e (x+2)\,ln(x)dx = (\frac{x^2}{2} + 2x)\,ln(x)\,|_1^e - \int_1^e \left(\frac{x}{2}+2\right)dx = \frac{e^2+9}{4}$...............**1p**

$\int_1^2 \frac{f_1(x)}{(x+1)\cdot(x^2+4x)}dx = \int_1^2 \frac{x+2}{x^2+4x}dx = \frac{1}{2}ln(x^2+4x)\,|_1^2 = \frac{1}{2}ln\frac{12}{5}$ **1p**

c) Aplicăm inegalitatea mediilor, între media geometrică și media aritmetică, pentru două numere reale pozitive $a \neq b \Rightarrow \sqrt{a \cdot b} < \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

Avem $\begin{cases} (x+1)\cdot(x+2n) < \left(\frac{2x+2n+1}{2}\right)^2 \\ (x+2)\cdot(x+2n-1) < \left(\frac{2x+2n+1}{2}\right)^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (x+n)\cdot(x+n+1) < \left(\frac{2x+2n+1}{2}\right)^2 \end{cases}$, de unde obținem

$(x+1)\cdot(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+2n) < \left(\frac{2x+2n+1}{2}\right)^{2n}$ **2p**

Integrând cele două funcții continue pe intervalul $[0,1]$ și aplicând proprietatea de monotonie a integralei definite obținem:

$$A_n = \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 (x+1)\cdot(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+2n)dx < \int_0^1 \left(x+n+\frac{1}{2}\right)^{2n} dx =$$

$\frac{\left(1+n+\frac{1}{2}\right)^{n} - \left(n+\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{2n+1} < \frac{\left(\frac{2n+3}{2}\right)^{2n+1}}{2n+1} \Rightarrow (2n+1)A_n < \left(\frac{2n+3}{2}\right)^{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$..**2p**

Subiectul 4

Maria scrie pe tablă numerele 1, 2, 3, ... , 2025. La fiecare pas, ea alege două numere oarecare x *și* y *din șirul scris pe tablă și le înlocuiește cu* $x * y = \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}}$, *continuând procedeul până când pe tablă rămâne un singur număr scris.*

a) *Dacă Maria șterge la primul pas numerele 2 și 3, aflați ce număr scrie în locul lor.*
b) *Arătați că dacă Maria șterge de pe tablă numerele* a *și* b *și scrie în locul lor numărul* c, *atunci are loc egalitatea:* $\frac{1}{c}+1 = \left(\frac{1}{a}+1\right)\left(\frac{1}{b}+1\right)$.
c) *Dacă la un anumit moment, numerele existente pe tablă sunt* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *cu* $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq 2025$ *,arătați că expresia* $E = \left(\frac{1}{x_1}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{x_2}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{x_n}+1\right)$*este invariantă(nu se modifică atunci când ștergem, de exemplu numerele* x_1, x_2 *și scriem în locul acestora numărul* $x_1 * x_2$ *).*
d) *Aflați numărul rămas pe tablă după 2024 de pași.*

Soluție:

a) Calculează $2*3=1$ **1p**
b) $c = a * b = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}} \Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab} \Rightarrow \frac{1}{c}+1 = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{b}+1\right)+\left(\frac{1}{b}+1\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{c}+1 = \left(\frac{1}{a}+1\right)\left(\frac{1}{b}+1\right)$...**1p**

c) $E=\left(\frac{1}{x_1}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{x_2}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{x_n}+1\right)$, unde x_1,x_2,...,x_n sunt numerele scrise la un anumit moment pe tablă. Fără a restrânge generalitatea, înlocuim x_1 și x_2 cu

$x_1 * x_2=\frac{1}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1x_2}}$ ⇒ pe tablă sunt numerele $x_1 * x_2$,x_3,...,x_n ⇒

$E'=\left(\frac{1}{x_1 * x_2}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{x_3}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{x_n}+1\right)\overset{b)}{=}\left(\frac{1}{x_1}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{x_2}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{x_n}+1\right)=E\Rightarrow E$ este invariantă..**2p**

d) Inițial $E=\left(\frac{1}{1}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2024}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2025}+1\right)=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2025}{2024}\cdot\frac{2026}{2025}=2026$ **2p**

Dacă u este ultimul număr rămas pe tablă atunci $\frac{1}{u}+1=2026\Rightarrow\frac{1}{u}=2025\Rightarrow u=\frac{1}{2025}$............**1p**