

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
„LAURENȚIU PANAITOPOL”**

Tulcea, 14 martie 2026

CLASA a 10-a – soluții

Problema 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$2^x + 3^x + 6^x = x^2.$$

Laurențiu Panaitopol

Soluție.

Funcția $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + 3^x + 6^x - x^2$ este strict crescătoare, ca sumă de funcții strict crescătoare. **1px3=3p**

Cum $f(-1) = 0$, deducem că $x = -1$ este singura soluție strict negativă. . **1px3=3p**

Demonstrăm că nu are soluții pozitive. Presupunem că ecuația are o soluție $u \in [0, \infty)$.

Atunci $u^2 = 2^u + 3^u + 6^u \geq 3$ și deci $u^2 \geq 3$, de unde rezultă $u \geq \sqrt{3} > 1$ și deci $[u] \geq 1$, unde $[u]$ este partea întreagă a lui u **1px3=3p**

Cum $u \geq [u]$, rezultă

$$2^u \geq 2^{[u]} = (1 + 1)^{[u]} = C_{[u]}^0 + C_{[u]}^1 + \dots + C_{[u]}^{[u]} \geq 1 + C_{[u]}^1 = 1 + [u] > u.$$

..... **1px3=3p**

Prin urmare $2^u > u$ implică $6^u \geq 4^u = (2^u)^2 > u^2$ **1px3=3p**

și deci $2^u + 3^u + 6^u > 6^u > u^2$, contradicție **1px3=3p**

Deci singura soluție a ecuației este $x = -1$ **1px3=3p**

Problema 2. Decideți dacă există $a \in \mathbb{Q}$ și $x \in \mathbb{R}$ cu $|x| < \sqrt{3}$ astfel încât $\sqrt{3 - x^2}$ și $\sqrt[3]{a - x^3}$ sunt raționale.

Soluție.

Dacă $\sqrt{3 - x^2} = q_1$ și $\sqrt[3]{a - x^3} = q_2$ cu $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ atunci $x^2 = 3 - q_1^2$ și $x^3 = a - q_2^3$ și deci $x = \frac{x^3}{x^2} = \frac{a - q_2^3}{3 - q_1^2} \in \mathbb{Q}$ **1px3=3p**

Fie $p, q, m, n \in \mathbb{Z}^*$ astfel ca $\sqrt{3 - \frac{p^2}{q^2}} = \frac{m}{n}$. Atunci $3q^2n^2 = p^2n^2 + m^2q^2$ și deci există $b, c, d \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $3b^2 = c^2 + d^2$ (*). **1px3=3p**

Deoarece $c^2 + d^2 \equiv 0 \pmod{3}$, rezultă că $c = 3c_1$ și $d = 3d_1$, $c_1, d_1 \in \mathbb{N}^*$. .. **2px3=6p**

Înlocuim acum în relația de mai sus și obținem $b^2 = 3(c_1^2 + d_1^2)$ și deci $b = 3b_1$ de unde rezultă că $3b_1^2 = c_1^2 + d_1^2$ cu $b_1 < b$, $c_1 < c$ și $d_1 < d$. Continuăm procedeul și vom obține mereu soluții naturale nenule ale ecuației (*) din ce în ce mai mici, urmând ca la un moment dat să obținem $b = c = d = 0$, adică o contradicție **2px3=6p**

deci nu există un număr x cu proprietățile din enunț. **1px3=3p**

Problema 3. Pentru fiecare număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ definim mulțimea

$$A_n = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| + |1 + z^n| = 1\}.$$

- a) Demonstrați că $A_1 = [-1, 0]$.
b) Determinați mulțimile A_n pentru $n \geq 2$.

Prelucrare Laurențiu Panaitopol

Soluție. a) Fie $z = r(\cos t + i \sin t) \in A_1$, cu $r \geq 0$ și $t \in \mathbb{R}$. Deoarece $0 \leq |1 + z| = 1 - |z| = 1 - r$ rezultă că $r \leq 1$. Pe de altă parte $1 - r = \sqrt{1 + 2r \cos t + r^2}$. Ridicăm la pătrat, facem simplificările și obținem $r = 0$ sau $\cos t = -1$ și $\sin t = 0$ de unde rezultă că $z = -r$. Cum $0 \leq r \leq 1$ rezultă că $z \in [-1, 0]$ **2px3=6p**

Reciproc, dacă $z \in [-1, 0]$ rezultă $|z| = -z$ și $|1 + z| = 1 + z$, de unde rezultă imediat că $z \in A_1$ **1px3=3p**

- b) Vom demonstra că dacă $n \geq 2$

$$A_n = \{0\} \cup \left\{ \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n} \mid k = \overline{0, n-1} \right\}, \text{ adică } \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = -1\}.$$

Exact ca la punctul a), dacă $z \in A_n$ se obține că $|z| \leq 1$. Deci, dacă $z \in A_n$ avem trei cazuri:

- i. $|z| = 0$, adică $z = 0$;
ii. $|z| = 1$ și deci $|1 + z^n| = 0$, adică $z^n = -1$;
iii. $|z| \in (0, 1)$. Demonstrăm că ultimul caz nu este posibil.

Dacă ar exista $z \in A_n$ astfel ca $|z| \in (0, 1)$ vom avea șirul de inegalități:

$1 = |z| + |1 + z^n| \geq |z| + |1 - |z|^n| = |z| + 1 - |z|^n = 1 + |z|(1 - |z|^{n-1}) > 1$, ceea ce este absurd. **3px3=9p**

Reciproc, dacă $z = 0$ sau $z^n = -1$ atunci ($|z| = 0$ și $|1 + z| = 1$) sau ($z^n = -1$, deci $|z| = 1$ și $|1 + z^n| = 0$). În ambele cazuri rezultă că $z \in A_n$ **1px3=3p**

Problema 4. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$. Presupunem că f este surjectivă, g este injectivă și $f(n) \geq g(n)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că funcțiile f și g sunt bijective.

Cătălin Gherghe

Soluție.

Demonstrăm că funcțiile f și g sunt egale și deci vor fi ambele bijective. . **2px3=6p**

Fie $k \in \mathbb{N}^*$ și $m_k = \min\{f^{-1}(k)\}$ (există pentru că $f^{-1}(k)$ este nevidă și orice submulțime a lui \mathbb{N}^* are un cel mai mic element.) Evident $f(m_k) = k$.

Demonstrăm prin inducție că $g(m_k) = k$.

Pentru $k = 1$ avem $g(m_1) \leq f(m_1) = 1$ și deci $g(m_1) = 1$.

Presupunem că $g(m_i) = i$ pentru orice $i \leq k$ și demonstrăm că $g(m_{k+1}) = k + 1$.

Din ipoteza problemei $g(m_{k+1}) \leq f(m_{k+1}) = k + 1$. Dar g este injectivă și $g(m_i) = i$ pentru orice $i \leq k$, deci $g(m_{k+1}) = k + 1$**3px3=9p**

Fie acum $x \in f^{-1}(k)$ cu $x \neq m_k$ (dacă există!). Avem $g(x) \leq f(x) = k$.

Dacă $g(x) = k = f(m_k) = g(m_k)$, deoarece g este injectivă, rezultă $x = m_k$, contradicție.

Dacă $g(x) = i < k$, rezultă $g(x) = f(m_i) = g(m_i)$ de unde rezultă $x = m_i$, deci $x \in f^{-1}(i)$, contradicție. Deci nu există un astfel de i**2px3=6p**

Rezultă astfel că f și g sunt funcții egale, deci sunt ambele bijective.