

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ  
„LAURENȚIU PANAITOPOL”**

**Tulcea, 14 martie 2026**

**CLASA a 9-a – soluții**

**Problema 1.** Fie  $a_1, a_2, \dots, a_{2026}$  o secvență formată din 2026 de numere naturale, cu proprietatea: din oricare trei termeni consecutivi, unul este media aritmetică a celorlalți doi. Dacă  $a_1 = 1$  și  $a_2 = 2$ , determinați numărul maxim de termeni egali cu 0 din secvență.

*Cătălin Gherghe*

*Soluție.*

Pentru orice trei termeni consecutivi  $x, y, z$  din secvență (nu neapărat în această ordine) avem  $x + y = 2z$  și deci  $x + y + z = 2z + z = 3z$ , ceea ce arată că suma oricăror trei termeni consecutivi este multiplu de 3. .... **2px3=6p**

Cum  $a_1 = 1$  și  $a_2 = 2$  rezultă că  $a_3$  are restul 0 la împărțirea cu 3,  $a_4$  are restul 1 la împărțirea cu 3,  $a_5$  are restul 2 la împărțirea cu 3 și tot așa alternativ ..... **2px3=6p**

Printre orice trei termeni consecutivi avem cel mult unul egal cu 0, ..... **1px3=3p**

și deci numărul de termeni egali cu 0 este cel mult  $\left\lfloor \frac{2026}{3} \right\rfloor = 675$ . .... **1px3=3p**

Secvența periodică 1, 2, 0, 1, 2, 0, ..., 1, 2, 0, 1 satisface condiția din ipoteză și deci numărul căutat este 675 ..... **1px3=3p**

**Problema 2.** Determinați funcțiile  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pentru care

$$f(x + y) = \max(f(x), y) + \min(f(y), x),$$

pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .

*Laurențiu Panaitopol*

*Soluție.*

Este adevărat că  $\max(a, b) + \min(a, b) = a + b$  (\*), pentru orice  $a, b \in \mathbb{R}$  ... **1px3=3p**

În relația din enunț schimbăm  $x$  cu  $y$  și obținem  $f(y + x) = \max(f(y), x) + \min(f(x), y)$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ . .... **1px3=3p**

Adunând această relație cu cea din enunț și folosind identitatea (\*) obținem  $2f(x + y) = f(x) + y + f(y) + x$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ . .... **1px3=3p**

Facem  $y = 0$  în relația de mai sus și obținem  $f(x) = x + f(0) = x + a$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  și  $a \in \mathbb{R}$  fixat. .... **1px3=3p**

Înlocuim în relația din enunț și obținem  $x + y + a = \max(x + a, y) + \min(y + a, x)$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ . .... **1px3=3p**

Facem în relația precedentă  $x = 0$  și  $y = -a$  și obținem  $0 = \max(a, -a) + 0$ , de unde obținem  $a = 0$ . .... **1px3=3p**

Am obținut astfel că singura funcție care verifică ipoteza este  $f(x) = x$ . .. **1px3=3p**

**Problema 3.** În interiorul triunghiului  $ABC$  se alege la întâmplare punctul  $D$ . Paralelele duse prin  $D$  la  $BC$ ,  $CA$ , respectiv  $AB$  intersectează laturile triunghiului în punctele  $P$  și  $S$ ,  $N$  și  $R$ , respectiv  $M$  și  $Q$  (unde  $M, N \in BC$ ;  $P, Q \in AC$ ;  $R, S \in AB$ ). Demonstrați că:

- a) dacă  $D$  este centrul de greutate al triunghiului  $ABC$  atunci el este centru de greutate și al triunghiului  $MPR$ ;  
b) dacă triunghiurile  $MPR$  și  $SNQ$  au același centru de greutate, atunci acesta coincide cu  $D$ .

*Prelucrare concurs MIUB 2024*

*Soluție.* a) Avem  $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{DR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$  și  $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ . ..... **1px3=3p**  
Deoarece  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ , ..... **1px3=3p**  
deducem  $\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{DR} + \overrightarrow{DM} = \vec{0}$ , de unde rezultă că  $D$  este centrul de greutate al triunghiului  $MPR$ . ..... **1px3=3p**

b) Fie  $G_1$  și  $G_2$  centrele de greutate ale triunghiurilor  $MPR$ , respectiv  $NQS$ . Atunci:

$$3\overrightarrow{DG_1} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{DR}; \quad 3\overrightarrow{DG_2} = \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{DS}.$$

Deducem că

$$G_1 = G_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{DG_1} = \overrightarrow{DG_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{DR} = \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{DS} \quad (1)$$

adică

$$G_1 = G_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{DS} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{DR}.$$

..... **1px3=3p**  
Deoarece  $PS \parallel BC$  și  $NR \parallel AC$ , vectorii  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{DS}$ , respectiv  $\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{DR}$  au direcțiile date de dreptele concurente  $BC$ , respectiv  $AC$ . De aceea, acești vectori pot fi egali doar dacă sunt vectori nuli. Deducem de aici că

$$G_1 = G_2 \Rightarrow MN = SD \text{ și } PQ = RD.$$

..... **1px3=3p**  
Un raționament analog (în care grupăm altfel termenii din (1) conduce la concluzia că

$$G_1 = G_2 \Rightarrow MN = DP, PQ = DN, RS = DQ, RS = DM.$$

..... **1px3=3p**  
Am arătat deci că, dacă  $G_1 = G_2$ , punctul  $D$  este mijlocul fiecăruia din segmentele  $MQ$ ,  $NR$ ,  $PS$ . Atunci  $D$  este centrul de greutate al triunghiului  $ABC$ .

Folosind punctul a) deducem că  $D$  este centrul de greutate (comun) al triunghiurilor  $MPR$  și  $SNQ$ . ..... **1px3=3p**

**Problema 4.** Fie  $a, b, c \in \mathbb{R}$  astfel încât ecuația de gradul al doilea

$$(b + c)x^2 + (a + c)x + (a + b) = 0$$

nu are soluții reale. Demonstrați că  $4ac - b^2 \leq 3a(a + b + c)$ .

\*\*\*

*Soluție.* Deoarece ecuația nu are soluții reale, discriminantul este strict negativ:

$$(a + c)^2 - 4(a + b)(b + c) < 0 \quad \dots\dots\dots 2px3=6p$$

Inegalitatea precedentă este echivalentă cu

$$b^2 + ab > \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} - \frac{ac}{2} - bc \quad (*) \quad \dots\dots\dots 1px3=3p$$

Inegalitatea pe care trebuie să o demonstrăm este echivalentă cu

$$6a^2 + 6ab + 2b^2 \geq 2ac \quad \dots\dots\dots 1px3=3p$$

Ținând seama de  $(*)$  va fi suficient să demonstrăm inegalitatea

$$6a^2 + 5ab + b^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} - \frac{ac}{2} - bc \geq 2ac \quad \dots\dots\dots 1px3=3p$$

Aceasta poate fi rescrisă astfel:

$$\left(\frac{5a}{2}\right)^2 + 5ab + b^2 + \frac{c^2}{4} = \left(\frac{5a}{2} + b\right)^2 + \frac{c^2}{4} \geq \left(\frac{5a}{2} + b\right)c,$$

$$\text{iar ultima inegalitate este evidentă.} \quad \dots\dots\dots 2px3=6p$$

Problema admite și alte abordări. De exemplu se poate presupune că  $P(x) = (b + c)x^2 + (a + c)x + (a + b) > 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  și se folosesc inegalitățile  $P(-\frac{1}{2}) > 0$  și  $P(1) > 0$ .

Într-o altă soluție, cu aceeași ipoteză ca mai sus, se utilizează polinomul  $Q(x) = ax^2 + bx + c = (a + b + c)(x^2 + x + 1) - P(x)$ , valorile  $P(-\frac{1}{2})$  și  $Q(-\frac{1}{2})$  precum și coordonatele vârfului parabolei asociate lui  $Q$ .