

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
„ADOLF HAIMOVICI”

Ediția a XXVIII-a

ETAPA JUDEȚEANĂ – 7 martie 2026

Clasa a XII-a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

**Subiectul 1. (20 puncte)**

Pe mulțimea  $\mathbb{Z}$  se definește legea de compoziție  $x * y = xy - 2x - 2y + 6$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{Z}$ .

- Demonstrați că legea „ $*$ ” este asociativă și comutativă;
- Determinați elementele simetrizabile ale mulțimii  $\mathbb{Z}$  în raport cu legea „ $*$ ”;
- Demonstrați că, dacă  $m, n$  și  $p$  sunt numere naturale astfel încât  $m * n * p = 13$  și  $m \leq n \leq p$ , atunci produsul numerelor  $m, n$  și  $p$  este divizibil cu 13.

**SOLUȚIE:**

a) Avem  $(x * y) * z = (xy - 2x - 2y + 6) * z = (xy - 2x - 2y + 6)z - 2(xy - 2x - 2y + 6) - 2z + 6 =$   
 $= xyz - 2xy - 2xz - 2yz + 4x + 4y + 4z - 6 \dots\dots\dots 2p$

și  $x * (y * z) = x * (yz - 2y - 2z + 6) = x(yz - 2y - 2z + 6) - 2x - 2(yz - 2y - 2z + 6) + 6 =$   
 $= xyz - 2xy - 2xz - 2yz + 4x + 4y + 4z - 6 \dots\dots\dots 2p$

Adunarea și înmulțirea în  $\mathbb{Z}$  sunt comutative, astfel avem  $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ , adică legea „ $*$ ” este asociativă  $\dots\dots\dots 1p$

Adunarea și înmulțirea în  $\mathbb{Z}$  sunt comutative, astfel avem:  $x * y = xy - 2x - 2y + 6$  și  $y * x = yx - 2y - 2x + 6$ , deci  $x * y = y * x, \forall x, y \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots 1p$

Adică legea este și comutativă  $\dots\dots\dots 1p$

- b) Legea „ $*$ ” admite element neutru dacă există  $e \in \mathbb{Z}$ , astfel încât  $x * e = e * x = x, \forall x \in \mathbb{Z}$

Avem  $x * e = e * x = x \Leftrightarrow xe - 2x - 2e + 6 = x \Leftrightarrow (x - 2)(e - 3) = 0, \forall x \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow e = 3 \in \mathbb{Z}$  este elementul neutru al legii „ $*$ ”  $\dots\dots\dots 2p$

Fie  $x \in \mathbb{Z}$ , acesta este simetrizabil dacă există  $x' \in \mathbb{Z}$ , astfel încât  $x * x' = x' * x = e = 3$

Avem  $x * x' = x' * x = 3 \Leftrightarrow xx' - 2x - 2x' + 6 = 3 \Leftrightarrow (x - 2)(x' - 2) = 1 \Rightarrow x - 2 \mid 1$  și  $x' - 2 \mid 1 \dots\dots 1p$

adică  $x - 2 = 1, x' - 2 = 1 \Rightarrow x = x' = 3$  sau  $x - 2 = -1, x' - 2 = -1 \Rightarrow x = x' = 1 \dots\dots\dots 2p$

Elementele simetrizabile sunt:  $\{1, 3\} \dots\dots\dots 1p$

- c)  $x * y = xy - 2x - 2y + 6 = (x - 2)(y - 2) + 2, \forall x, y \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots 1p$

Legea „ $*$ ” fiind asociativă, prin calcul deducem  $m * n * p = (m - 2)(n - 2)(p - 2) + 2 \dots\dots\dots 2p$

$m * n * p = 13 \Leftrightarrow (m - 2)(n - 2)(p - 2) + 2 = 13 \Leftrightarrow (m - 2)(n - 2)(p - 2) = 11 \dots\dots\dots 1p$

Deoarece 11 este număr prim,  $m, n, p \in \mathbb{N}$ , iar  $m - 2 \leq n - 2 \leq p - 2 \Rightarrow$

$m - 2 = -11, n - 2 = -1, p - 2 = 1$ , obținem  $m = -9, n = 1, p = 3$  (nu convine), sau

$m, n, p \in \mathbb{N} \Rightarrow m - 2 = n - 2 = -1, p - 2 = 11 \Rightarrow m = n = 1, p = 13$ , sau

$m - 2 = n - 2 = 1, p - 2 = 11 \Rightarrow m = n = 3, p = 13 \dots\dots\dots 2p$

Întrucât  $p = 13$ , vom avea  $mnp = M_{13} \dots\dots\dots 1p$

## Subiectul 2. (20 puncte)

Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_3 x$ .

a) Pentru funcția  $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{3^{f(x)}}{x} - x$ , determinați primitiva  $G: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , care verifică condiția  $G(2) = 2026$ ;

b) Arătați că  $I = \int_1^e x f(x) dx = \frac{e^2+1}{4 \ln 3}$ ;

c) Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}$ , definim  $I_n = \int_1^e x f^n(x) dx$ .

Demonstrați că  $I_n = \frac{e^2}{2(\ln 3)^n} - \frac{n}{2 \ln 3} I_{n-1}$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ .

## SOLUȚIE:

a)  $3^{f(x)} = 3^{\log_3 x} = x$  ..... 1p

$g(x) = \frac{x}{x} - x = 1 - x$  ..... 1p

$G(x) = \int (1 - x) dx = x - \frac{x^2}{2} + C$  ..... 2p

$G(2) = 2 - 2 + C = C = 2026 \Rightarrow G(x) = x - \frac{x^2}{2} + 2026$  ..... 2p

b)  $I = \int_1^e x \log_3 x dx = \frac{1}{\ln 3} \int_1^e x \ln x dx$  ..... 1p

$\int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e$  ..... 3p

$I = \frac{1}{\ln 3} \left( \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} \right) = \frac{e^2+1}{4 \ln 3}$  ..... 2p

c)  $I_n = \int_1^e x (\log_3 x)^n dx = \frac{1}{(\ln 3)^n} \int_1^e x (\ln x)^n dx$  ..... 1p

$\int_1^e x (\ln x)^n dx = \frac{x^2}{2} (\ln x)^n \Big|_1^e - \frac{n}{2} \int_1^e x (\ln x)^{n-1} dx$  ..... 4p

$= \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} \int_1^e x (\ln x)^{n-1} dx$  ..... 2p

$I_n = \frac{e^2}{2(\ln 3)^n} - \frac{n}{2 \ln 3} I_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$  ..... 1p

### Subiectul 3. (20 puncte)

Se consideră matricele  $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , unde  $A = \begin{pmatrix} 2026 & 1 \\ 2025 & 1 \end{pmatrix}$ , iar  $B = \begin{pmatrix} -2026 & 2025 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Fie, de asemenea, mulțimea  $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det(X) = 1\}$ .

- Verificați dacă  $A$  și  $B$  aparțin mulțimii  $G$ .
- Demonstrați că mulțimea  $G$ , împreună cu operația de înmulțire a matricelor, formează un grup.
- Demonstrați că, dacă  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$  este soluție a ecuației  $X^2 - X + I_2 = O_2$ , atunci  $a + d = 1$ .

### SOLUȚIE:

a)  $\det(A) = \begin{vmatrix} 2026 & 1 \\ 2025 & 1 \end{vmatrix} = 2026 \cdot 1 - 1 \cdot 2025 = 2026 - 2025 = 1 \Rightarrow A \in G$  .....2p

$\det(B) = \begin{vmatrix} -2026 & 2025 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2026 \cdot 1 - 2025 \cdot (-1) = -2026 + 2025 = -1 \Rightarrow B \notin G$  .....2p

b)  $(\forall) X, Y \in G \Rightarrow \det(X) = \det(Y) = 1$  .....1p

Folosind că:  $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y)$  pentru  $(\forall) X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  deducem  $\det(X \cdot Y) = 1$  .....1p

Deci  $X \cdot Y \in G$ ,  $(\forall) X, Y \in G$  (1) .....1p

Avem că  $(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$ ,  $(\forall) X, Y$  și  $Z \in G$  (2) .....1p

De asemenea,  $\det(I_2) = 1$ , deci  $(\exists) I_2 \in G$  a.î.  $I_2 \cdot X = X \cdot I_2 = X$ ,  $(\forall) X \in G$  (3) .....2p

Pentru  $(\forall) X \in G$ , din  $\det(X) = 1 \Rightarrow (\exists) X^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , pentru care  $X^{-1} \cdot X = X \cdot X^{-1} = I_2$ ,

de unde deducem că  $\det(X^{-1}) = \frac{1}{\det(X)} = 1$ , deci  $(\forall) X \in G$ ,  $(\exists) X^{-1} \in G$  a.î.  $X^{-1} \cdot X = X \cdot X^{-1} = I_2$  (4) .....2p

Din relațiile (1), (2), (3) și (4) deducem că mulțimea  $G$  împreună cu operația de înmulțire a matricelor formează un grup .....2p

c) Utilizând relația lui Cayley-Hamilton:  $X^2 - (a + d)X + \det X \cdot I_2 = O_2$  .....2p

obținem pentru  $X \in G$  că  $X^2 - (a + d)X + I_2 = O_2$  .....1p

Din ipoteză avem că  $X^2 - X + I_2 = O_2$  deci  $(a + d)X = X \Leftrightarrow (a + d - 1)X = O_2$  .....1p

Deoarece  $\det(X) = 1$  și deci  $X \neq O_2$ , deducem că  $a + d - 1 = 0 \Leftrightarrow a + d = 1$  .....2p

#### Subiectul 4. (30 puncte)

Cu ocazia unui experiment, s-a observat că intensitatea radiației produsă de o sursă, măsurată într-un punct situat la distanța  $a > 0$  față de acea sursă, este dată de formula:  $I(a) = \int_0^1 \frac{1}{x^2+a^2} dx$ .

a) Calculați valoarea intensității radiației măsurată în punctele situate la distanțele  $a = 1$  și  $a = \sqrt{3}$  față de sursă;

b) Demonstrați că funcția  $I: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , cu  $I(a) = \int_0^1 \frac{1}{x^2+a^2} dx$  este descrescătoare; interpretați din punct de vedere fizic rezultatul obținut;

c) Demonstrați că are loc relația:  $I(a) > \frac{1}{a^2+1}$ , pentru orice  $a > 0$ .

#### SOLUȚIE:

a)  $I(1) = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \arctg x \Big|_0^1 = \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$  .....5p

$I(\sqrt{3}) = \int_0^1 \frac{1}{x^2+3} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{x}{\sqrt{3}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} - \arctg 0 \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$  .....5p

b) Pentru  $(\forall) a, b$  cu  $0 < a < b$  și  $(\forall) x \in (0; 1)$  avem că  $x^2 + a^2 < x^2 + b^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+a^2} > \frac{1}{x^2+b^2}$  .....2p

de unde, conform proprietății de monotonie a integralei definite, găsim că

$\int_0^1 \frac{1}{x^2+a^2} dx > \int_0^1 \frac{1}{x^2+b^2} dx \Rightarrow I(a) > I(b)$ , adică funcția  $I$  este descrescătoare .....5p

Din punctul de vedere fizic, această inegalitate explică faptul că, pe măsură ce ne îndepărtăm

de sursă, intensitatea radiației scade .....3p

c)  $(\forall) x \in (0; 1)$  și  $(\forall) a$  cu  $a > 0$  avem  $a^2 + x^2 < a^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+a^2} > \frac{1}{a^2+1}$  .....5p

de unde, integrând de la 0 la 1, găsim:  $I(a) = \int_0^1 \frac{1}{x^2+a^2} dx > \int_0^1 \frac{1}{a^2+1} dx \Rightarrow I(a) > \frac{1}{a^2+1} \cdot x \Big|_0^1 = \frac{1}{a^2+1}$  .....5p

#### Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii; se acordă 10 puncte din oficiu.

Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.

Punctajul maxim este de 100 de puncte.