

Inegalități cu p, R și r_a

„Gândirea este o pasăre a înălțimilor care, în colivia cuvintelor, izbutește doar să-și desfășoare aripile, dar nu poate zbura.” - Kahlil Gibran¹

În această secțiune vom obține câteva inegalități între p, R și r_a .

Teorema 1 (Andrica, D., Barbu, C. [4]) *În orice triunghi având semiperimetrul p următoarele inegalități au loc:*

$$-2(R+2r_a)\sqrt{R^2+2Rr_a} \leq p^2 - (2R^2 + r^2 + 4Rr - 6Rr_a - 2r_a^2) \leq 2(R+2r_a)\sqrt{R^2+2Rr_a}. \quad (1)$$

Demonstrație. Deoarece $a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$, din relația lui Blundon rezultă concluzia. Expresii similare se pot obține pentru r_b și r_c . $\square$

Observația 2 *Utilizând faptul că $r < r_a$ și inegalitatea din dreapta a relației (1) obținem*

$$\begin{aligned} p^2 &\leq 2R^2 + r^2 + 4Rr - 6Rr_a - 2r_a^2 + 2(R+2r_a)\sqrt{R^2+2Rr_a} \\ &< 2R^2 + r_a^2 + 4Rr_a - 6Rr_a - 2r_a^2 + 2(R+2r_a)\sqrt{R^2+2Rr_a} \\ &= 2R^2 - 2Rr_a - r_a^2 + 2(R+2r_a)\sqrt{R^2+2Rr_a} \end{aligned}$$

sau

$$p^2 < 2R^2 - 2Rr_a - r_a^2 + 2(R+2r_a)\sqrt{R^2+2Rr_a}. \quad (2)$$

Teorema 3 (Andrica, D., Barbu, C. [4]) *În orice triunghi având semiperimetrul p următoarele inegalități au loc:*

$$p^2 < \min\{4R^2 + 4Rr_a + 3r_a^2, 4R^2 + 4Rr_b + 3r_b^2, 4R^2 + 4Rr_c + 3r_c^2\}.$$

Demonstrație. Utilizând relația (2) putem scrie

$$\begin{aligned} p^2 &< 2R^2 - 2Rr_a - r_a^2 + 2(R+2r_a)\sqrt{R^2+2Rr_a} \\ &< 2R^2 - 2Rr_a - r_a^2 + 2(R+2r_a)(R+r_a) \\ &= 4R^2 + 4Rr_a + 3r_a^2. \end{aligned}$$

Expresii similare se pot obține pentru r_b și r_c . $\square$

Consecința 4 (Andrica, D., Barbu, C. [4]) *În orice triunghi următoarele inegalități au loc:*

$$a^2 + b^2 + c^2 < \min\{8R^2 + 4r_a^2, 8R^2 + 4r_b^2, 8R^2 + 4r_c^2\}.$$

¹Kahlil Gibran (1883-1931) – poet libanez

Demonstrație. Din Teorema lui Blundon obținem

$$\alpha = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} \leq R^2 - 3Rr_a - r_a^2 + (R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a}$$

$$< R^2 - 3Rr_a - r_a^2 + (R + 2r_a)(R + r_a) = 2R^2 + r_a^2,$$

de unde rezultă concluzia. Expresii similare se pot obține pentru r_b și r_c . $\square$

Teorema 5 (Andrica, D., Barbu, C. [4]) În orice triunghi este adevărată inegalitatea:

$$p^2 \leq 2\sqrt{2}(2R + r_a)r_a$$

Demonstrație. Avem

$$p^2 \leq 4R^2 + 4Rr_a + 3r_a^2 = (2R + r_a)^2 + 2r_a^2 \leq 2\sqrt{(2R + r_a)^2 \cdot 2r_a^2},$$

de unde rezultă concluzia. $\square$

Observația 6 Analog se obțin inegalitățile: i) $p^2 \leq 2\sqrt{2}(2R + r_b)r_b$ și ii) $p^2 \leq 2\sqrt{2}(2R + r_c)r_c$.

Teorema 7 (Andrica, D., Barbu, C. [4]) În orice triunghi este adevărată inegalitatea:

$$p^2 \leq 2\sqrt{3}R(R + 2r_a).$$

Demonstrație. Avem

$$p^2 \leq 4R^2 + 4Rr_a + 3r_a^2 \leq 4R^2 + 4Rr_a + 4r_a^2 = 3R^2 + (R + 2r_a)^2,$$

de unde

$$p^2 \leq 3R^2 + (R + 2r_a)^2 \leq 2\sqrt{3R^2 \cdot (R + 2r_a)^2} = 2\sqrt{3}(R^2 + 2Rr_a).$$

$\square$

Analog se obțin inegalitățile: $p^2 \leq 2\sqrt{3}R(R + 2r_b)$ și $p^2 \leq 2\sqrt{3}R(R + 2r_c)$.

Observația 8 Deoarece $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$, inegalitatea din teorema precedentă poate fi rescrisă astfel: $p^2 \leq 2\sqrt{3} \cdot OI_a^2$ sau $p \leq \sqrt[4]{12} \cdot OI_a$.

Teorema 9 (Andrica, D., Barbu, C. [4]) În orice triunghi este adevărată inegalitatea: $p \leq 2 \cdot OI_a$.

Demonstrație. Avem $p \leq \sqrt[4]{12}OI_a \leq 2OI_a$. $\square$

Teorema 10 (Andrica, D., Barbu, C. [4]) În orice triunghi este adevărată inegalitatea:

$$p^2 \leq \min\{12Rr_a, 12Rr_b, 12Rr_c\}.$$

Demonstrație. Avem

$$p^2 \leq 4(R^2 + Rr_a + r_a^2) \leq 12\sqrt[3]{R^2 \cdot Rr_a \cdot r_a^2} = 12Rr_a$$

sau $p \leq 2\sqrt{3Rr_a}$.

Bibliografie

- [1] ANDRICA, D., ANDREESCU, T., Complex number from A to..Z, Birkhauser, Boston-Basel-Berlin, 2006.
- [2] ANDRICA, D., O inegalitate în triunghi și aplicațiile acesteia, Gazeta Matematică, Seria B, București, no. 1, 1986, 2-4.
- [3] ANDRICA, D., BARBU, C., A geometric proof to Blundon's inequalities, Journal of Inequalities and Applications, 15 (2012), No. 2, 361-370.
- [4] ANDRICA, D., BARBU, C., The natural approach of Blundon - Wu inequalities, Journal of Inequalities and Applications (submitted).
- [5] ANDRICA, D., BARBU, C., MINCULETE, N., A geometric way to generate Blundon type inequalities, Acta Universitatis Apulensis, 31 (2012), 96-106.
- [6] ANDRICA, D., BARBU, C., LUPESCU, A, Note on the adjoint Spieker points, International Journal of Geometry, 6 (2017), No. 1, 61-66.
- [7] ANDRICA, D., ș.a., A note on the Nagel and Gergonne points, Creative Math.& Inf., 17 (2008).
- [8] BARBILIAN, D., Opera didactică, Ed. Tehnică, București, 1958.
- [9] BARBU, C., Teoreme fundamentale din geometria triunghiului, Ed. Unique, Bacău, 2008.
- [10] BARBU, C., MINCULETE, N., Cevians of rank $(k; l; m)$ in a triangle, International Journal of Geometry, Vol.1, No. 2, 67- 79, 2012.
- [11] BARBU, C., MINCULETE, N., About the area of triangle determined by cevians of rank $(k; l; m)$, Scientific Studies and Research Bacau, 21 (1), 2011, 139-148.
- [12] BARBU, C., Numere complexe, Ed. Grafic, Bacău, 2005.
- [13] BARBU, C., PĂTRAȘCU, I., Some properties of the Newton-Gauss line, Forum Geometricorum, 12 (2012), 149-152