

ASPECTE METODICE PRIVIND INDUCȚIA MATEMATICĂ ÎN CLASELE LICEALE

Cosma Adrian Mihai

Metoda inducției matematice se predă la clasa a IX-a - în cadrul unității de învățare ”Mulțimi și elemente de logică matematică”.

Dificultăți mai mari de înțelegere a acestei metode au elevii de clasa a IX-a, care sunt obișnuiți să aplice doar formule de calcul și nu să facă raționamente.

La predarea lecției *Metoda inducției matematice*, mai întâi profesorul de matematică va explica diferența dintre un raționament deductiv și unul inductiv:

- *deducția* este procedeul prin care dintr-o propoziție cu caracter general se obțin propoziții cu caracter particular;

Exemplu: să considerăm enunțul cu caracter general: „Un număr natural este divizibil cu 2 dacă ultima cifră a sa este număr par.” (criteriul de divizibilitate cu 2). Enunțul „Numărul 2006 are ultima cifră un număr par, deci este divizibil cu 2.” s-a obținut particularizând enunțul general dat. Așadar am făcut un raționament deductiv.

- *inducția* este procedeul prin care pornind de la propoziții particulare se ajunge la propoziții generale; o concluzie inductivă nu este întotdeauna justă, datorită faptului că ea este formulată după considerarea unui număr limitat de cazuri și astfel pot fi omise cazuri când constatarea făcută nu este adevărată.

Exemplu: renumitul matematician francez Pierre Fermat (1601-1665) a presupus că toate numerele de forma $2^{2^n} + 1$ sunt prime bazându-se pe observația că pentru $n = 0, 1, 2, 3, 4$ numerele: $2^{2^0} + 1 = 3, 2^{2^1} + 1 = 5, 2^{2^2} + 1 = 17, 2^{2^3} + 1 = 257, 2^{2^4} + 1 = 65537$ sunt prime, fără a mai face o demonstrație.

Deoarece generalizarea s-a obținut doar prin considerarea câtorva cazuri particulare, metoda se numește *inducție incompletă*. Metoda este folosită deoarece dă posibilitatea intuirii unui rezultat care poate fi confirmat sau infirmat cu ajutorul unei demonstrații deductive.

În unele situații o astfel de demonstrație se poate realiza analizând doar un număr finit de cazuri, epuizându-se astfel toate posibilitățile. În acest caz metoda se numește *inducție completă*.

Exemplu: Să se demonstreze că orice număr natural n , $10 \leq n \leq 150$ cu proprietatea că ultimele două cifre din scrierea lui formează un număr divizibil cu 25 este divizibil cu 25. Pentru demonstrație considerăm numerele cu proprietatea cerută din intervalul $[10, 150]$. Avem că $n \in \{25, 50, 75, 100, 125, 150\}$. Este evident că aceste numere sunt divizibile cu 25. Cum alte astfel de numere nu mai există, demonstrația este încheiată.

Întrucât propozițiile de tipul $(\forall n)P(n)$ nu pot fi demonstrate prin inducție completă pentru că nu pot fi studiate toate cazurile posibile și nici prin inducție incompletă se vor demonstra folosind *metoda inducției matematice*.

Aplicarea *metodei inducției matematice* pentru a demonstra o propoziție „ $P(n), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m$ ” constă în parcurgerea a două etape:

1. *Pasul verificării:* pentru $n=m$ verificăm dacă $P(m)$ este o propoziție adevărată.
2. *Pasul demonstrativ:* presupunem adevărată propoziția $P(k)$ și demonstrăm că propoziția $P(k+1)$ este de asemenea adevărată (scriem $P(k) \rightarrow P(k+1)$).

Concluzie: Dacă cele două etape sunt validate atunci propoziția $P(n)$ este adevărată $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq m$.

Observație. Explicația intuitivă a acestei metode de demonstrație este:

Se pornește de la propoziția $P(m)$ adevărată și se aplică $P(k) \rightarrow P(k+1)$ pentru $k=m, k=m+1, \dots, k=n-1$.

Pe baza regulii concluziei (modus ponens) se obține succesiv:

$(P(m) \text{ și } P(m) \rightarrow P(m+1) \text{ adevărate}) \Rightarrow P(m+1) \text{ adevărată};$

$(P(m+1) \text{ și } P(m+1) \rightarrow P(m+2) \text{ adevărate}) \Rightarrow P(m+2) \text{ adevărată};$

.....
 $(P(n-1) \text{ și } P(n-1) \rightarrow P(n) \text{ adevărate}) \Rightarrow P(n) \text{ adevărată}.$

Metoda inducție matematice este folosită pentru introducerea unor definiții sau demonstrarea unor identități, inegalități, probleme de divizibilitate, teoreme etc.

Un exemplu foarte interesant este: „Suma primelor n numere naturale impare este un pătrat perfect, $P(n): 1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$ ”.

1. *Pasul verificării:* $n=1$, avem $1=1^2$

2. *Pasul demonstrativ:*

Presupunem adevărată propoziția $P(k): 1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$ (s-a înlocuit n cu k)

Demonstrăm că: $P(k+1): 1+3+5+\dots+(2k+1)=(k+1)^2$ (s-a înlocuit n cu $k+1$) e adevărată.

Avem: $\underbrace{1+3+5+\dots+(2k-1)}_{k^2} + (2k+1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$, q.e.d..

Observație. Dacă una din cele două etape nu este satisfăcută atunci propoziția $P(n)$ nu este adevărată $\forall n \in N$. Iată câteva situații:

- afirmație: $P(n): n = n+1, \forall n \in N$. Pasul demonstrativ este justificat: $P(k+1): k+1 = k+2$, folosind $P(k)$, dar afirmația este însă evident eronată ($P(0): 0=1$).

- renumitul matematician francez Pierre Fermat (1601-1665) a presupus că toate numerele de forma $2^{2^n} + 1$ sunt prime bazându-se pe observația că pentru $n=0,1,2,3,4$ numerele: $2^{2^0} + 1 = 3, 2^{2^1} + 1 = 5, 2^{2^2} + 1 = 17, 2^{2^3} + 1 = 257, 2^{2^4} + 1 = 65537$ sunt prime, fără a mai face pasul demonstrativ.

- în secolul XVIII alt mare matematician Leonhard Euler (1707-1783) a găsit că $2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$ este un număr compus.

- matematicianul G.W. Leibniz (1646 - 1716) demonstrează că $n^3 - n : 3, n^5 - n : 5, n^7 - n : 7$, de unde a tras concluzia că $n^k - n : k, \forall n, k \in N$. Tot el însă a observat mai târziu că $2^9 - 2 = 510 : 9$, deci afirmația generală este falsă.

- matematicianul D. A. Grove presupune că pentru toate numerele prime p , numărul $2^{p-1} - 1$ nu se divide cu p^2 , făcând verificări pe numere prime mai mici decât 1000. Dar s-a stabilit că $2^{1093} - 1 : 1093^2$ (1093 este număr prim).

Pentru stimularea interesului și lărgirea orizontului elevilor în aplicarea inducției matematice este indicat să se propună la clasă probleme cu caracter practic.

Problema „monedelor”: orice sumă întreagă mai mare sau egală cu 8 se poate achita cu monede de 3 și 5 lei, adică $P(n): (\forall)n \in N, n \geq 8, (\exists)p, r \in N^*$ astfel încât $n = 3p + 5r$.

Rezolvare:

Pasul verificării $P(8): 8 = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1$

Pasul demonstrativ

$P(k): \exists p, r \in N^*$ astfel încât $k = 3p + 5r$.

$P(k+1): \exists p', r' \in N^*$ astfel încât $k+1 = 3p' + 5r'$.

Avem $k+1 = 3p + 5r + 1 = 3p + 5r + (3 \cdot 2 - 1 \cdot 5) = 3(p+2) + 5(r-1) = 3p' + 5r'$, unde $p' = p+2 \in N^*$ și $r' = r-1 \in N^*$.

Dificultățile de aplicare a **metodei inducției matematice** de către elevi sunt atât în pasul de verificare cât și în pasul demonstrativ.

a) În pasul de verificare dificultăți apar mai ales dacă în expresia lui $P(n)$ apar sume. Este indicat ca în astfel de situații să se sugereze elevilor să înlocuiască pe n cu m mai întâi în ultimul

termen al sumei pentru a vedea unde se termină suma (și după aceea în primul termen dacă acesta conține n) și abia apoi să scrie termenii sumei.

Exemple:

1. În verificarea egalității $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$, $\forall n \geq 1$ pentru $n=1$ ultimul termen al sumei din membrul stâng este $\frac{1}{1 \cdot 2}$, adică chiar primul termen al sumei, deci suma va avea în acest caz doar un termen: $\frac{1}{1 \cdot 2}$, pentru $n=2$ vom avea 2 termeni $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3}$, ș.a.m.d.

2. La verificarea inegalității $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{3n-2} \geq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ avem pentru $n=1$ ultimul termen al sumei din membrul stâng este $\frac{1}{1}$, adică chiar primul termen al sumei, deci suma va avea în acest caz doar un termen: $\frac{1}{1}$, dar pentru $n=2$ ultimul termen este $\frac{1}{4}$, așadar suma va fi $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, ș.a.m.d.

b) În pasul demonstrativ dificultățile apar la:

- construcția propoziției $P(k+1)$, unde trebuie explicat elevilor să înlocuiască pe n cu $k+1$ peste tot unde apare n ;
- scrierea sumelor care încep și se termină cu termeni ce conțin n , unde în demonstrația lui $P(k+1)$ trebuie să se mai adauge și să se mai scadă termeni;
- demonstrații cu 2 cazuri: $P(2k)$ și $P(2k+1)$ sau mai multe cazuri;
- demonstrarea inegalităților, unde se va folosi proprietatea de tranzitivitate a relației „ $\leq$ ”.

Pe lângă metoda clasică a inducției s-au impus și alte variante de inducție matematică, menite să rezolve anumite probleme concrete determinate fie de valoarea de pornire a variabilei, fie de natura acesteia.

Varianta I

„Pentru orice $n \geq m$ (m număr natural fixat) are loc” se parcurg două etape:

- 1) Pasul verificării: Se verifică faptul că $p(m)$ este adevărată;
- 2) Pasul demonstrativ: Se demonstrează implicația $p(k) \rightarrow p(k+1)$, unde k este un număr natural oarecare, $k \geq m$.

Conform principiului inducției matematice, propoziția $p(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq m$.

Exemplu

Să se demonstreze inegalitatea $2^n > 2n+1$, pentru orice număr natural $n \geq 3$.

- 1) Pasul verificării: $p(3): 2^3 > 2 \cdot 3 + 1$ este adevărată.
- 2) Pasul demonstrativ: Demonstrăm implicația $p(k) \rightarrow p(k+1)$, unde $p(k): 2^k > 2k+1$, iar $p(k+1): 2^{k+1} > 2(k+1)+1$.

Avem: $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(2k+1)$, (1). Pe de altă parte $2(2k+1) > 2(k+1)+1$, (2), pentru $k \geq 3$. Din (1) și (2) conform tranzitivității relației de ordine rezultă că $p(n)$ este adevărată.

Varianta II

Propoziția $p(n)$ este adevărată pentru orice număr $n \geq m$ (m număr natural fixat), $n \in \mathbb{N}$, dacă sunt îndeplinite condițiile:

- 1) Pasul verificării. Propoziția $p(n)$ este adevărată pentru $n=m$ și $n=m+1$.
- 2) Pasul demonstrativ. Din presupunerea că $p(n)$ este adevărată pentru $n=k-1$ și $n=k$ ($k > m$) rezultă că $p(n)$ este adevărată și pentru $n=k+1$.

Exemplu

Fie șirul de numere reale $(a_n)_{n \geq 0}$ definit prin $a_0 = 2, a_1 = \frac{5}{2}, a_n = \frac{5}{2}a_{n-1} - a_{n-2}, n \geq 2$. Să se arate că $a_n = 2^n + 2^{-n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

1) Pasul verificării: Se face pentru $n = 0$ și $n = 1$, când avem:

$$p(0): a_0 = 2^0 + 2^0 = 2, \text{ adevărat,}$$

$$p(1): a_1 = 2^1 + 2^{-1} = \frac{5}{2}, \text{ adevărat.}$$

2) Pasul demonstrativ. Presupunem adevărate propozițiile $p(k-1)$ și $p(k)$

$p(k-1): a_{k-1} = 2^{k-1} + 2^{-(k-1)}$, și $p(k): a_k = 2^k + 2^{-k}$ și demonstrăm că $p(k+1): a_{k+1} = 2^{k+1} + 2^{-(k+1)}$ este adevărată.

Din relația de recurență, între termenii șirului, dată în enunț avem: $a_k = \frac{5}{2}a_{k-1} - a_{k-2}$ sau ținând

seama de $p(k-1)$ și $p(k)$ avem $a_{k+1} = \frac{5}{2}(2^k + 2^{-k}) - (2^{k-1} + 2^{-(k-1)}) = 5 \cdot 2^{k-1} + 5 \cdot 2^{-k-1} - 2^{k-1} - 4 \cdot 2^{-k-1} = 4 \cdot 2^{k-1} + 2^{-(k+1)} = 2^{k+1} + 2^{-(k+1)}$, ceea ce arată că $p(k+1)$ este adevărată.

Variantă III

Prin această variantă se demonstrează propoziția $p(x)$ care depinde de x , cu $x \in [0, \infty)$.

Propoziția $p(x)$ este adevărată pentru orice $x \geq 0$ dacă sunt îndeplinite condițiile:

- 1) Pasul verificării. Propoziția $p(x)$ este adevărată pentru orice $x \in [0, 1)$.
- 2) Pasul demonstrativ. Pentru orice $x \geq 0$ este adevărată implicația $p(x) \rightarrow p(x+1)$.

Demonstrație. Se consideră propoziția $q(n): p(x)$ este adevărată pentru orice $x \in [n, n+1)$, care se demonstrează prin inducție matematică după $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Pasul verificării: $q(0): p(x)$ este adevărată pentru orice $x \in [0, 1)$
- 2) Pasul demonstrativ: $q(k) \rightarrow q(k+1)$

Fie $x_0 \in [k+1, k+2)$. Atunci $x_0 - 1 \in [k, k+1)$. Cum $q(k)$ este adevărată și $x_0 - 1 \in [k, k+1)$ rezultă că $p(x_0 - 1) \rightarrow p(x_0)$, adică $p(x_0)$ este adevărată. Numărul x_0 fiind arbitrar din $[k+1, k+2)$ se deduce că și $q(k+1)$ este adevărată, adică $q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deci $p(x)$ este adevărată pentru orice $x \geq 0$.

Exemplu

Să se arate că $3^n > 2^n + 7n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$.

Vom arată că propoziția $p(x): 3^x > 2^x + 7x, \forall x \geq 4$, este adevărată.

- 1) Pasul verificării. Fie $x \in [4, 5)$. Atunci $3^x \geq 81$, iar $2^x + 7x < 2^5 + 7 \cdot 5 = 67$, deci $3^x > 81 > 67 > 2^x + 7x$.
- 2) Pasul demonstrativ. Presupunem că $p(x)$ este adevărată și demonstrăm că $p(x+1)$ este adevărată, adică $p(x+1): 3^{x+1} > 2^{x+1} + 7(x+1)$.

Avem $3^{x+1} = 3^x \cdot 3 > 2 \cdot 3^x > 2(2^x + 7x) = 2^{x+1} + 14x > 2^{x+1} + 7(x+1)$, deci $p(x+1)$ este adevărată, adică $p(x)$ este adevărată pentru orice $x \geq 4$.

Variantă IV

Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Propoziția $p(x)$, care depinde de $x \in [a, \infty)$, este adevărată dacă sunt îndeplinite condițiile:

- 1) Pasul verificării. Verificăm că $p(x)$ este adevărată pentru orice $x \in [a, a+b)$.
- 2) Pasul demonstrativ. Pentru orice $x \in [a, \infty)$ are loc implicația $p(x) \rightarrow p(x+b)$. Atunci propoziția $p(x)$ este adevărată pentru orice $x \geq a$.

Demonstrație. Se va considera propoziția $q(n): p(x)$ este adevărată pentru orice $x \in [a+n, a+n+b], n \in \mathbb{N}$.

Exemplu. Sa se arate că

$$p(x): [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx], \forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x . (*Identitatea lui Hermite*).

1. Pasul verificării. Dacă $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$, atunci $nx \in [0, 1)$ și $x + \frac{k}{n} \in [0, 1), k = \overline{1, n-1}$, iar $p(x): 0 = 0$ e adevărată.

2. Pasul demonstrativ. Presupunem că $p(x)$ este adevărată și demonstrăm că $p\left(x + \frac{1}{n}\right)$ este adevărată.

$$\begin{aligned} \text{Avem: } & \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n} + \frac{1}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}\right] = \\ & = \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n} + \frac{1}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] + [x+1] = [nx] + 1 = \\ & = [nx+1] = \left[n\left(x + \frac{1}{n}\right)\right], \text{ adică } p\left(x + \frac{1}{n}\right) \text{ este adevărată.} \end{aligned}$$

Deci $p(x)$ este adevărată pentru $\forall x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Varianta V

Prin această variantă se demonstrează o propoziție ce depinde de una sau mai multe variabile naturale.

Propoziția $p(n, m), \forall n \geq r, \forall m \geq s$ este adevărată dacă:

- 1) Pasul verificării. Propoziția $p(r, s)$ este adevărată.
- 2) Pasul demonstrativ. Demonstrăm propoziția pentru prima variabilă, fixând cea de a doua variabilă. Presupunem $p(k, s)$ adevărată și demonstrăm că $p(k+1, s)$ este adevărată. Apoi putem presupune că $p(n, t)$ este adevărată $\forall n \geq r$ și demonstrăm că $p(n, t+1) \forall n \geq r$ este adevărată.

Exemplu

Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $AB = BA$, atunci $A^n B^m = B^m A^n, \forall n, m \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Pasul verificării. Pentru $n=1$ și $m=1$ avem $p(1, 1): AB = BA$, adevărat.
- 2) Pasul demonstrativ. Presupunem $p(k, 1): A^k B = BA^k$ adevărată și demonstrăm că $p(k+1, 1): A^{k+1} B = BA^{k+1}$ este adevărată.

$$\text{Avem: } A^{k+1} B = (A^k A) B = A^k (AB) = A^k (BA) = (A^k B) A = (BA^k) A = B(A^k A) = BA^{k+1}.$$

Putem în continuare să presupunem că $p(n, t): A^n B^t = B^t A^n$ este adevărată $\forall n \geq 1$. Trebuie să mai demonstrăm că $p(n, t+1)$ este adevărată $\forall n \geq 1$, adică $A^n B^{t+1} = B^{t+1} A^n$.

$$\text{Avem: } A^n B^{t+1} = A^n (B^t B) = (A^n B^t) B = (B^t A^n) B = B^t (A^n B) = B^t (BA^n) = (B^t B) A^n = B^{t+1} A^n.$$

Aplicație

Să se arate că $\sum \cos(\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n) \leq 2^n \left(\cos \sqrt{x_1 x_2 \dots x_n}\right)^n$, unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, iar $x_1, x_2, \dots, x_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. (*Concursul „Evaluarea în educație”- faza națională 2008*)

Rezolvare:

Demonstrăm prin inducție matematică că:

$$\sum \cos(\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n) = 2^n \cos(x_1) \cos(x_2) \dots \cos(x_n). \quad (1)$$

Pentru $n=1$ avem $\cos(x_1) + \cos(-x_1) = 2 \cos(x_1)$, adevărat.

Presupunem că relația este adevărată pentru un n oarecare, adică

$$\sum \cos(\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n) = 2^n \cos(x_1) \cos(x_2) \dots \cos(x_n)$$

și să o demonstrăm pentru $n+1$, adică

$$\sum \cos(\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_{n+1}) = 2^{n+1} \cos(x_1) \cos(x_2) \dots \cos(x_{n+1}).$$

$$\begin{aligned} \text{Avem } \sum \cos(\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n \pm x_{n+1}) &= \sum \cos(\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm (x_n + x_{n+1})) + \\ &+ \sum \cos(\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm (x_n - x_{n+1})) = 2^n \cos(x_1) \cos(x_2) \dots \cos(x_n + x_{n+1}) + \\ &+ 2^n \cos(x_1) \cos(x_2) \dots \cos(x_n - x_{n+1}) = 2^{n+1} \cos(x_1) \cos(x_2) \dots \cos(x_{n+1}) \end{aligned}$$

și egalitatea este demonstrată.

Din inegalitatea mediilor $MG \leq MA$ (demonstrația este tot prin inducție matematică!), obținem:

$$\cos(x_1) \cos(x_2) \dots \cos(x_n) \leq \left(\frac{\cos(x_1) + \cos(x_2) + \dots + \cos(x_n)}{n} \right)^n \quad (2)$$

Din inegalitatea lui Jensen (demonstrația este tot prin inducție matematică!), pentru funcția

$$f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x, \text{ obținem:}$$

$$\frac{\cos(x_1) + \cos(x_2) + \dots + \cos(x_n)}{n} \leq \cos\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \quad (3)$$

Acum din inegalitatea mediilor:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \cos \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \quad (4)$$

Din relațiile (1), (2), (3) și (4) obținem inegalitatea cerută.

Bibliografie:

1. BANE A H. – *Metodica predării matematicii*, Ed. Paralela 45, 1998
2. GEORGESCU-BUZĂU E., ONOFRAȘ E. - *Metode de rezolvare a problemelor de matematică în liceu*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983
3. COSMA A. - *Inducția matematică*, Editura Pim, Iași, 2010

Colegiul „Grigore Antipa”, Bacău, România, adriancosma2002@yahoo.com