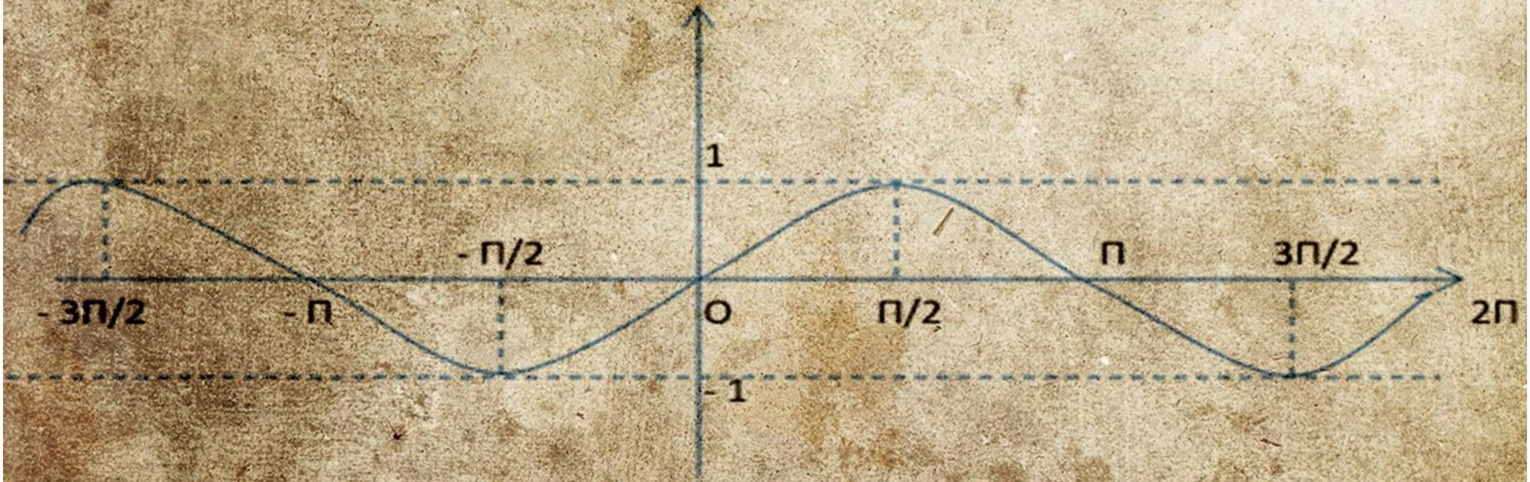
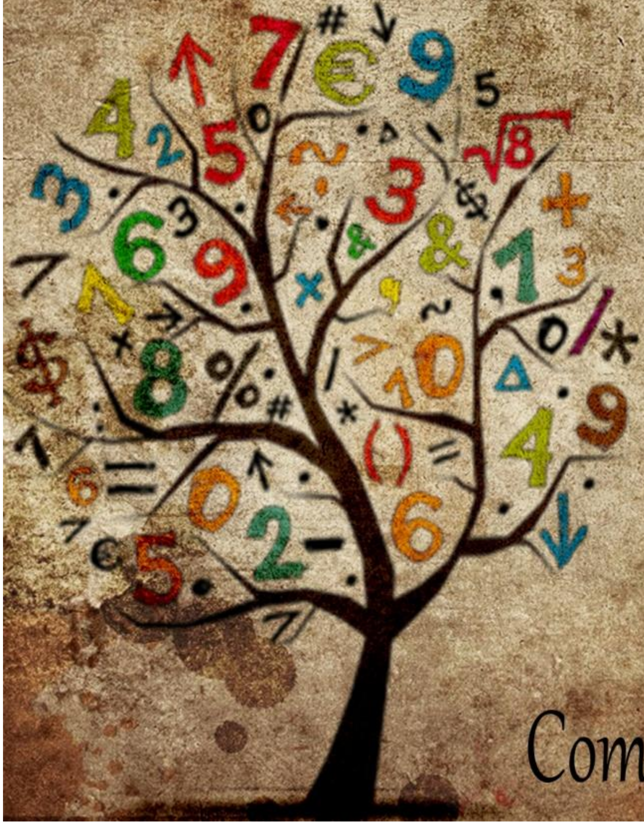
Laic
Robert Constantin

Gloambeș
Mihai Lucian

10 ediții ale concursului interjudețean de matematică SPERANȚE



2005 - 2014
Subiecte si Soluții



$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

Comănești 2015

Colaborator: Şişca Maria-Laura

Tehnoredactare: Ştefan Săndel-Relu

Coperta: Laic George-Dragoş

Corectura: Gloambeş Toma

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României

10 ediţii ale concursului interjudeţean de matematică SPERANŢE 2005 – 2014

Gloambeş Mihai Lucian

Laic Robert Constantin

Tipărit de Europe Direct, Comăneşti

ISBN 978-973-0-18958-2

ARGUMENT

Un mic orăşel de pe valea Trotuşului, aşezat într-o frumoasă depresiune, oraşul Comăneşti a devenit în 2005 o gazdă primitoare a elevilor şi profesorilor de matematică de pe meleaguri bistriţene, sucevene, botoșănene, ieşene, romaşcane şi băcăuane sub comanda regretatului prof. univ. dr. Dan-Petru Brânzei la o primă ediţie a concursului “Speranţe”.

Anii au trecut, interesul pentru concurs a crescut prin prezenţa invitaţilor din oraşele Bistriţa, Beclean pe Someş, Miercurea-Ciuc, Cristuru Secuiesc, Vatra Dornei, Gura Humorului, Botoşani, Iaşi, Roman, Piatra-Neamţ, Bârlad, Tulcea, Focşani, Constanţa, Râmnicu Sărat, Bucureşti, liceele militare de la Câmpulung–Moldovenesc şi Breaza, Bacău, Podu Turcului, Buhuşi, Oneşti, Târgu Ocna, Moineşti, Dărmăneşti, Comăneşti şi deja s-au derulat 10 ediţii ale acestui concurs, la care numărul candidaţilor a alternat de la 300 la 600 elevi participanţi.

Aşa că, la ani aniversari merită menţionată munca colegilor noştri prin apariţia acestei lucrări cu subiectele şi variantele de rezolvare a primelor 10 ediţii a concursului “Speranţe”.

Aducem mulţumirile noastre primarului oraşului Comăneşti, ec. Viorel Miron, dar şi tuturor profesorilor care s-au implicat în desfăşurarea concursului din postura de organizatori şi pentru implicarea în elaborarea subiectelor, prof Gloambeş Toma, prof. Rotaru Petru, prof Popa Florin, prof Munteanu Ion şi nu în ultimul rând “Europe Direct Comăneşti” prin persoana ing. Jitaru Narcis pentru tipărirea diplomelor, medaliilor, premiilor şi redactarea „Revistei de matematică din Comăneşti”.

Prof. Laic Robert Constantin — Prof. Gloambeş Mihai Lucian

CUVÂNT ÎNAINTE

„Dacă tu ai un măr și eu am un măr, și vom schimba merele între noi, atunci, și tu și eu tot câte un măr vom avea. Dar dacă ai o idee și eu am o idee, și vom face schimb de idei, atunci fiecare dintre noi va avea câte două idei.”

George Bernard Shaw (1856 – 1950)

Nu știm dacă de aici s-au inspirat inimoșii profesori din Comănești când au decis că pot să organizeze un concurs interjudețean de matematică, astfel încât să fie și ”pe terenul lor” o competiție, așa cum sunt la Iași, Botoșani, Focșani, Vatra-Dornei, iar elevii lor să beneficieze de mai multe competiții la care să participe pentru a-și valorifica cunoștințele și abilitățile la disciplina matematică.

Primăvara, ca anotimp al mugurilor, tinerelor vlăstare și al revenirii din hibernare, a fost considerată extrem de potrivită ca pe valea Trotușului, în Comănești să asigure o atmosferă ideală pentru tineri elevi din diferite județe și regiuni ale țării să se întâlnească aici pentru o altă ”luptă” pe tărâmul matematicii. Și au venit la confruntare delegații din Iași, Botoșani, Vrancea, Suceava, Bistrița-Năsăud, Neamț, Constanța, Vaslui, Tulcea, Galaţi, Prahova, Buzău, iar la ultimele ediții și din Harghita, confruntare în care s-a simțit din plin și participarea delegaților din județul gazdă – Bacău. Inițiativa profesorilor organizatori, profesori care reprezintă (numeric) cea mai mare parte din filiala S.S.M.R. Comănești, a fost apreciată și susținută de conducerea centrală a S.S.M.R astfel încât la aceste concursuri participanții elevi și profesori deopotrivă s-au bucurat de prezența d-lui profesor Dorin Popescu (președinte S.S.M.R.), d-lui profesor Radu Gologan (președinte S.S.M.R.) respectiv a d-lor profesori Vladimir Boscoff (membru în biroul central S.S.M.R.), Mircea Trifu (secretar general al SSMR) și Nicolae Sanda (vicepreședinte al SSMR). Prezența și contribuția d-nilor profesori s-a simțit de asemenea în structura și calitatea subiectelor de la proba scrisă. Să nu uităm că toate acestea au fost plusuri, deoarece încă de la prima ediție desfășurarea concursului „Speranțe” a beneficiat de sprijinul, atenția și monitorizarea tuturor activităților specifice unei competiții de asemenea anvergură, d-nilor prof. Dan Brânzei (lipsa dânsului la ultimele ediții fiind foarte regretată, sentiment care se acutizează pe perioada oricărui concurs de matematică desfășurat în oricare din județele amintite) și a d-lui prof Cornel Berceanu iar la ultimele ediții desfășurate: d-nul prof Gheorghe Grigoraş de la Universitatea „Al. I. Cuza” din Iași. Le-a fost alături și s-a implicat la fiecare ediție și d-nul profesor Artur Bălăucă de la Botoșani și d-nul profesor Traian Duminică director al CCD Suceava.

În acest an aniversar pentru concurs, vom fi aici din nou elevi și profesori, deoarece povestea matematicii continuă, ”schimbul de idei” nu se poate încheia cât timp mai sunt idei. Vom fi aici mai vechi participanți alături de alții mai noi, deoarece se știe că suntem bine primiți datorită implicării deosebite a autorităților locale și a câtorva cetățeni reprezentativi care au reușit an de an să asigure o bună desfășurare a concursului. Au fost alături de conducerea și în special de catedra de matematică a fiecăreia dintre cele două locații care au alternat ca principale organizatoare: Școala Gimnazială ”Liviu Rebreanu” și Colegiul Tehnic ”D. Ghika”. Au alternat doar locațiile, iar catedrele de matematică din cele două unități școlare constituie un tot unitar în ceea ce privește acest proiect.

Se va înregistra un minus la această ediție jubiliară: lipsa mesajelor scurte dar consistente, cu cuvinte ”alese” cum doar dânsul – domnul profesor Dan Brânzei, știa să le aleagă. Dar cei care vom fi prezenți vom zâmbi nostalgic când memoria va derula fraze de neuitat ale d-lui Profesor și ne vom bucura sincer pentru elevii noștri care ”au învins și continuă sau au pierdut, dar continuă”. Și îmi voi aminti de asemenea ceea ce a pomenit domnul Profesor în urmă cu 6 - 7 ani în timpul acestui concurs, că se potrivește foarte bine refrenul unui foarte cunoscut cântec al unei artiste remarcabile, Mihaela Runceanu:

Pentru voi, muguri noi
Eu țin balanța ocrotitor.
Și când am flori pe ram,
Conjug „speranța” la viitor.

Prof. Sas Maria, Liceul Teoretic Sanitar Bistriţa

Prof. Sanda Nicolae, C.N. „Liviu Rebreanu” Bistrița, vicepreședinte S.S.M.R.

Ediţia I : 15-17.04.2005

Clasa a V-a

1. a) Arătaţi că: $3^0+3^1+3^2+3^3+...+3^{99} \vdots 10$

b) Determinaţi ultimele 7 cifre ale numărului:

$$B=\left(3^{11}\cdot 5^{12}\cdot 7^{13}\cdot 2^{13}\cdot 6^3\right):\left(3^3\cdot 7^4\cdot 2^{10}\right)$$

2. Să se arate că nu există un număr natural „n" astfel încât: $2005^{2005}=2008^n+2006$.

Bălăucă Artur

3. Se consideră numerele $a=10x+7$ şi $b=5x+2$, unde $x\in\mathbb{N}$.

a) Să se arate că $(a+b)(a-b)$ este multiplu de 15.

b) Aflaţi câtul şi restul împărţirii lui a la b.

Munteanu Eugen

4. Să se scrie prin enumerare elementele mulţimii:

$$A=\left\{\frac{100}{x}\,/\,\frac{11}{13}<\frac{100}{x}<\frac{17}{19},\ x\in\mathbb{N}^*\right\}$$

apoi să se afle elementele mulţimii: $B=\{y,z,t,u,v\}$ ştiind că sunt îndeplinite simultan condiţiile:

a) $A\supset B$ este o propoziţie falsă

b) $A\setminus B=\left\{\frac{100}{112},\frac{100}{113},\frac{100}{114}\right\}$

c) $B\cup\left\{\frac{100}{113},\frac{100}{114},\frac{100}{119}\right\}=\left\{\frac{100}{113},\frac{100}{114},...,\frac{100}{119}\right\}$

Clasa a VI-a

1. Arătaţi că:

a) $A=2\cdot(1+2+3+...+n)\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right)$ este pătrat perfect, pentru oricare $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Dacă $x,y,z\in\mathbb{N}$ şi $2x+3y-10z=0$, atunci $\frac{y(x+z)}{6}\in\mathbb{N}$.

G. M. nr. 12/2003

2. Să se determine mulţimea:

$$M=\left\{x\in Z\,/\,\frac{2x+1}{3}\in Z\quad \text{şi}\quad \frac{3x+1}{4}\in Z\right\}.$$

G. M. nr. 12/2004

3. Măsurile unghiurilor *A, B,* şi *C* ale unui triunghi sunt direct proporţionale cu numerele 2, 3 şi 4. Dacă $(CC'$ este bisectoarea unghiului ACB, $C\in(AB)$, demonstraţi că C' aparţine segmentului $[AC]$.

G. M. Nr. 1/2004

4. Pe baza $[BC]$ a unui triunghi isoscel *ABC* se consideră punctul *P* şi construim $PQ\perp AC$, $PS\perp AB$, $Q\in[AC]$, $S\in[AB]$. Dacă *R* este piciorul înălţimii din *B* în triunghiul ABC, demonstraţi că raportul $\frac{BS}{RQ}$ este constant.

Negrescu Alexandru

Clasa a VII-a

1. Să se arate că oricum am alege 4 numere naturale există două dintre acestea care au suma sau diferenţa divizibilă cu 5.

Gloambeş Toma, Gloambeş Mihai-Lucian

2. Să se rezolve în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ecuaţiile:

a) $23x+y^2=4715$

b) $x^2+y^2=2005$ ştiind că *x* este număr prim.

Bălăucă Artur

3. Fie *ABCD* un pătrat, *M* mijlocul lui *AB, N* mijlocul lui *AD*, $\{P\}=CN\cap DM$ şi $\{Q\}=AP\cap CD$. Calculaţi raportul $\frac{QD}{QC}$.

G.M.9/2003

4. Fie *ABC* un triunghi cu unghiurile *B* şi *C* ascuţite. Notăm cu *M* mijlocul lui *BC*, cu *P* proiecţia lui *M* pe *AC* şi cu *N* mijlocul lui *MP*.

Să se arate că dacă $AN\perp BP$, atunci triunghiul *ABC* este isoscel.

G.M.10/1991

Clasa a VIII-a

1. Fie $E(x,y)=xy+2z+2y+2,\ x,y\in\mathbb{R}$ a) Determinaţi numerele reale *x* şi *y* ştiind că $E(x,y)=-2$

b) Daţi câte un exemplu de perechi (x,y) pentru care $E(x,y)\in\mathbb{Z}$ în fiecare din cazurile:i) $x,y\in\mathbb{Z}$ ii) $x,y\in\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ iii) $x,y\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

c) Arătaţi că există o infinitate de perechi (x,y) cu $x,y\in\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ pentru care $E(x,y)\in\mathbb{Z}$

Zaharia Maria

2. Rezolvaţi în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ecuaţia:

$$x^2+5y^2+2xy+2x-6y+5=0$$

Duminică Traian

3. Determinaţi numerele naturale *m* şi *n* pentru care are loc egalitatea:

$$(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)=(m+1)(m+2)(m+3)$$

Rotaru Petru

4. Fie cubul *ABCDA'B'C'D'* în care notăm cu *Q* centrul pătratului *BCC'B'*. Notăm cu *P* mijlocul lui *AB* şi cu *M* piciorul perpendicularei dusă din *D* pe *CP*.

Demonstraţi că $QM\perp PC$.

Crăciun Gheorghe

Ediţia a II-a : 28-30.04.2006

Clasa a IV-a

1. Într-o barcă pot intra: 3 copii şi un câine sau 2 copii şi 8 pisici sau un copil, 5 câini şi 4 pisici. Dacă în barcă sunt 2 copii, 2 câini şi 4 pisici oare barca va pluti sau nu? Justificaţi.

Berceanu Cornel

2. La un magazin s-au adus sticle de suc: unele conţin 2 litri şi costă 36 lei sticla, altele conţin 7 litri şi costă 72 lei sticla. Sticlele conţin 204 litri şi costă 2376 lei. Câte sticle de fiecare fel s-au adus la magazin?

Brânzei Dan

3. Aflaţi valoarea lui *x* din egalitatea:

$$\left\{2\cdot\left[325+\left(456-125:x\right)\cdot 49\right]-372\right\}\cdot 15=637740$$

Popescu Gabriela

Clasa a V-a

1. a) Arătaţi că numerele de forma: $A=11^{n+2}+9^{n+2}-11^n-9^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ se divide cu 10.

Gloambeş Toma, Gloambeş Mihai-Lucian

b) Fie mulţimile: $A=\{x\mid x=5n+7, n\in\mathbb{N}\}$, $B=\{y\mid y=2005p+3, p\in\mathbb{N}\}$. Câte elemente are $A\cap B$?

2. a) Determinaţi $x,y,z\in\mathbb{N}$ astfel încât $2^x+2^y+4^y=33$

b) Aflaţi cifrele *a, b, n* în baza 10 ştiind că $\overline{ab}\cdot n=\overline{2ab}$

3. Directorul unei şcoli trebuie să-şi anunţe elevii care sunt deja plecaţi acasă că a doua zi nu se învaţă. El procedează astfel: într-o primă etapă trimite câte un SMS la 3 elevi; în a doua etapă cei trei elevi

trimit fiecare câte un SMS la alţi 3 elevi şi aşa mai departe. Aflaţi în câte etape sunt informaţi elevii ştiind că sunt în total 1100 elevi iar 8 nu au telefon.

Gloambeş Mihai-Lucian

Clasa a VI-a

1. a) Comparaţi fracţiile: $a=\frac{x+7^{40}}{x+3^{80}}$ şi $b=\frac{y+6^{100}}{y+3^{150}}$, $x,y\in\mathbb{N}$.

b) Arătaţi că fracţia $\frac{3x+5}{7x+12}$ este ireductibilă, unde $x\in\mathbb{N}$.

Gloambeş Mihai-Lucian

2. Să se determine numerele naturale *a, b, c* pentru care: $\frac{a+2}{8}=\frac{b+3}{6}=\frac{10}{c+4}$

3. Fie unghiul *BOD* de 60^0 cu *BO=OD*. Fie *C* şi *A* mijloacele segmentelor *OB* şi *OD*. Segmentele *AB* şi *CD* se intersectează în *E*. Să se arate că: a) *AE=EC*b) *AE+EC=EB*

Clasa a VII-a

1. a) Demonstraţi că există o infinitate de numere raţionale *x* astfel încât $\sqrt{2x-x^2}\in\mathbb{Q}$.

b) Determinaţi perechile (x,y) de numereîntregi nenule, care verifică relaţia: $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{xy}=\frac{4}{3}$

2. a) Arătaţi că numerele $5^{21}+6^{21}$ şi $5^{31}+6^{32}$ sunt divizibile cu 31.

b) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1=0$

3. Fie triunghiul dreptunghic *ABC* cu $m(\sphericalangle A)=90^0$. Pe dreapta *AB* se ia un punct *M* astfel încât triunghiul *BMC* să fie isoscel cu $(BM)\equiv(CM)$.

Arătaţi că $\frac{AM}{CM}=\left|1-2\cdot\left(\frac{AC}{BC}\right)^2\right|$

\Clasa a VIII-a

1. Determinaţi $a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$ pentru care: $a+2b^2+3c^3+\frac{1}{a}+\frac{2}{b^2}+\frac{3}{c^3}=12$

2. a) Demonstraţi inegalitatea: $\frac{1}{2^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{4^4}+...+\frac{2005}{2006^{2006}}<\frac{3}{4}$

b) Să se determine funcţia liniară $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi să se construiască graficul ştiind că este satisfăcută relaţia: $3f(x+1)+f(2x+1)-3f(2x-3)=27-2x, \forall x\in\mathbb{R}$.

3. Fie piramida triunghiulară regulată *SABC*. Prin muchia *BC* se duce un plan perpendicular pe muchia *SA*. Ştiind că lungimea muchiei laterale este de *10cm*, iar lungimea înălţimii piramidei este de *8cm*, să se afle:

a) Distanţa dintre două muchii opuse.

b) Aria triunghiului de secţiune.

Ediţia a III-a : 20-22.04.2007

Clasa a IV-a

1. Aflați media aritmetică a numerelor a și b știind că „a” reprezintă treimea numărului „b”, care este soluția egalității:

$$704 - 30:\{54 - 45:[30 - 24:(b - 24) - 7] \cdot 15 + 25:25\} = 701$$

Să se afle cel mai mare număr natural format din trei cifre știind că dacă împărțim a doua cifră la a treia, obținem restul egal cu câtul.

2. a) Dacă $3a + 2b + 4c = 494$ şi $b + 2c = 160$, calculati a şi $ab + 2ac$

b) Într-o lună oarecare, trei duminici cad la date numere impare.

Ce zi a săptămânii poate fi pe data de 26 a acestei luni?

3. Într-o florărie erau 1818 garoafe, lalele și trandafiri. Dacă se vând 100 din jumătatea numărului de garoafe, 200 din jumătatea numărului de lalele și 300 din jumătatea numărului de trandafiri, rămâne un număr de flori reprezentând 3 numere consecutive.Câte flori de fiecare fel au fost la început?

Clasa a V-a

1. a) Să se calculeze valoarea minimă şi valoarea maximă a raportului: $\dfrac{MATEMATICA}{COMANESTI}$, unde literele distincte reprezintă cifre distincte nenule şi între literele care alcătuiesc cuvintele se află semnul înmulţit.

b) Calculaţi restul împărţirii numărului $A = 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{2006}$ la 121.

Gloambeş Mihai-Lucian, Rezuş Octavian

2. Fie fracţia $f = \dfrac{\overline{xy}}{\overline{yz}}$ cu $x \neq y \neq z$, nenule. Să se determine fracţiile *f* care după simplificare devin echivalente cu $\dfrac{x}{z}$.

Gloambeş Toma, Ungureanu Ovidiu

3. a) Câte numere de forma $\overline{ab3}$ (scrise în baza 10) se împart exact la 3?

G.M. 7-8/2003

b) Să se determine toate numerele naturale nenule „*n*” pentru care:

$a = 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + ... + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ este pătrat perfect.

***

Clasa a VI-a

1. a) Diferenţa a două numere prime reprezintă 25% din suma lor. Care sunt numerele?

b) Să se determine perechile de numere naturale pentru care suma dintre produsul şi diferenţa lor este 2002.

G.M. 10/2003

2. Să se arate că există o infinitate de numere întregi x, y nenule astfel încât $E \in \mathbb{N}$, unde: $E = \dfrac{x+y+7}{x \cdot y + 5 \cdot x + 2 \cdot y + 10}$.

Gloambeş Toma, Laic Robert-Constantin

3. În triunghiul *ABC*, *(BE* este bisectoarea unghiului *B*, *(CM)* mediană iar *(AD)* înălţime, unde *E*∈*(AC), M*∈*(AB), D*∈*(BC)* astfel încât $m(\sphericalangle EBC) = 30^\circ$ şi *BE*∩*AD={F}*. Dacă $m(\sphericalangle DAB)$ şi $m(\sphericalangle DAC)$ sunt direct proporţionale cu 3 şi 4,5 arătaţi că:

a) *(AB)*≡*(BE)*

b) *MF*⊥*AB*

c) *MD* nu este paralelă cu *AC*.

Gloambeş Mihai-Lucian

Clasa a VII-a

1. a)Arătaţi că: $\sqrt{4+\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{31}} < 4$.

b) Rezolvaţi ecuaţia: $\left(x^2+10x+34\right)\cdot\left(y^2-6y+232\right)=2007$; $x, y \in \mathbb{R}$.

Gloambeş Mihai-Lucian, Munteanu Eugen

2. a) Demonstraţi că numărul $10^{2006}-10^{2005}$ se poate scrie sub forma:

$x^2+y^2+z^2+t^2+u^2$, *unde* $x, y, z, t, u \in \mathbb{N}$.

G.M. 3/2005

b) Arătaţi că pătratul sumei a două numere consecutive se poate scrie ca o sumă de două numere consecutive.

Gloambeş Mihai-Lucian, Coman Ion

3. În vârfurile unghiurilor ascuţite ale triunghiului dreptunghic isoscel *ABC*, construim unghiurile congruente *ABM* şi *BCM* cu măsura de 15^0 şi *M* fiind în interiorul triunghiului *ABC*.

Demonstraţi că triunghiurile *ABM* şi *ACM* sunt isoscele.

Rotaru Petru

Clasa a VIII-a

1. a) Fie $a_n = n^2+\left(n+1\right)^2+\left(n+2\right)^2+\left(n+3\right)^2+\left(n+4\right)^2$. Aflaţi $n \in \mathbb{N}$ ştiind că $a_n \in \left(1024, 2048\right)$.

b) Arătaţi că numărul $x = 2007^4 + 2\cdot 2006^2 + 4\cdot 2007 - 1$ este pătrat perfect.

Gloambeş Toma, Duminică Mădălina

2. a) Dacă $a,b,c,d \in \mathbb{R}^*$ şi $\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right)+\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{c^2d^2}=\frac{6}{abcd}$ atunci: $|a|=|b|=|c|=|d|$.

Gloambeş Mihai-Lucian, Sanda Nicolae

b) Determinaţi $n \in \mathbb{N}$ astfel încât:

$$\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1}{4\cdot 6\cdot 8}+\frac{1}{6\cdot 8\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(2n-2)\cdot 2n\cdot(2n+2)}>\frac{1}{36}.$$

Drobotă Ion

3. Fie cubul ABCDA'B'C'D' de muchie a.

a) Calculaţi măsura unghiului dintre dreptele A'C şi BC'

b) Calculaţi distanţa dintre dreptele A'C şi BC'.

***

Ediţia a IV-a : 28-30.03.2008

Clasa a III-a

1. a) Calculaţi 3 × a + 7 × b = ştiind că:(104 × 4 + 83 × 5) – a × 3 = 8 × 100 + 36 : 9

(9 × 7 + b – 5 × 8) – 5 × 5 + 70 = 75

Şişca Maria-Laura

2. Pentru realizarea unui aranjament floral, Ioana a folosit garoafe, trandafiri şi frezii.Câte flori de fiecare fel a folosit dacă : 54 nu erau trandafiri, 36 nu erau frezii şi 48 nu erau garoafe?Ce valoare are aranjamentul ştiind că o garoafă costă 5 lei, o frezie 8 lei, iar un trandafir 10 lei ?

Balaş Monica

3. a) Doi prieteni, Alex şi Radu, au colecţionat împreună 120 de timbre.Câte timbre a colecţionat fiecare dintre ei, dacă a treia parte din numărul timbrelor colecţionate de Alex, este cu 22 mai mare decât a treia parte din numărul timbrelor colecţionate de Radu ?

Bînţu Miorica

b) Rezolvaţi :(2x + 1) + (3x + 1) + (5x + 1) = 1203

Clasa a IV-a

1. Calculaţi a ×100 + b × 5 + c × 9 dacă: a : a + a : a + a = 10;

7 : [b × (4 + 8) : 2 + b] + 3 = 4; 5 + 6 × 7 – 8 × (c – 9) – 76 : 2 = 1

Bînţu Miorica

2. Pregătindu-se pentru concursul de matematică „Speranţe”, 4 elevi au rezolvat împreună 48 de probleme astfel: primul a rezolvat de 2 ori mai puţine decât al doilea, aceştia împreună au rezolvat de 2 ori mai multe decât al treilea, iar toţi trei, împreună, au rezolvat de trei ori mai multe decât al patrulea.Câte probleme a rezolvat fiecare şi ce punctaj a obţinut, dacă pentru fiecare problemă rezolvată corect primeşte câte 7 puncte? Realizaţi un Clasament!

Balaş Monica

3.a)Ştefan îngrijeşte pisici, canari şi peruşi. În total sunt 22 de capete şi 68 de picioare.Ştiind că numărul peruşilor este cu 2 mai mic decât numărul canarilor, să se afle de câte colivii are nevoie dacă în fiecare pune câte o pereche de păsări?

Şişca Maria - Laura

b) Dacă a + b = 5; b + c = 7

Calculaţi : 7a + 12b + 5c =

Clasaa V-a

1. Fie numerele $a=2^{n+5}\cdot 3^{n+1}+2^{n+2}\cdot 3^{n}$ şi $b=2^{2n+3}\cdot 3^{n+1}+4^{n+1}\cdot 3^{n+2}$, $n\in\mathbb{N}$.

i) Să se calculeze $5b:a$.

ii) Să se determine $n\in\mathbb{N}$, astfel ca $5b=12a$.

iii) Dacă *n* este număr par, să se arate că *a* se poate scrie ca o sumă de două pătrate prefecte, nenule.

PătraşcuEnache

2.a) Demonstraţi că $A=\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ nu este pătrat perfect.

Gloambeş Toma

b) Un număr natural dă prin împărţirea la 6 restul nenul *r*, iar pătratul său dă prin împărţirea la 36 restul 2*r*. Cât este *r*?

G. M. 11 / 2007

3. Aflaţi numerele de forma $\overline{abc}$, ştiind că fracţia $\dfrac{a\cdot\left(\overline{a0c}-\overline{b0c}\right)}{b\cdot\left(21\cdot b-63\cdot c\right)}$ este ireductibilă şi nenulă.

G. M. 11 / 2007

Clasaa VI-a

1. a) Determinaţi numărul de elemente al mulţimii:

$$A=\left\{\overline{abcd}\,\middle|\,\frac{a+2}{b}=\frac{b+2}{c}=\frac{c+2}{d}=\frac{d-6}{a}\right\}.$$

G. M. 5 / 2007

b) Demonstraţi că ecuaţia: $x^2+y^2=1983$ nu are soluţii în mulţimea numerelor întregi.

G. M. 2 / 2008

2. Fie mulţimea $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,x \text{ se divide cu 3, } x \text{ nu se divide cu 7 şi } x<2008\right\}$.

a) Câte elemente are mulţimea *A*?

b) Dacă elementele mulţimii A sunt scrise în ordine crescătoare, care este al 289-lea element al mulţimii?

Pătraşcu Enache

3. În triunghiul ABC neobtuzunghic se ia pe latura BC un punct mobil M între B şi C. Construim $ME \perp AB$, $E \in AB$ şi $MF \perp AC$, $F \in AC$. Prelungim pe ME, respectiv MF cu segmentele ER şi FS astfel încât $(RE) \equiv (EM)$ şi $(SF) \equiv (FM)$.

a) În ce condiţii punctele R, A, S sunt coliniare?

b) Dacă punctele nu sunt coliniare să se demonstreze că $\triangle RAS$ este isoscel.

c) Câte grade trebuie să aibă $\sphericalangle BAC$ pentru ca $\triangle RAS$ să fie echilateral?

Gloambeş Toma

Clasaa VII-a

1. a) Să se determine $x \in \mathbb{Z}$ astfel ca:

$$\frac{x(x-1)(x+1)(x+2)+3}{x(x-1)(x+1)(x+2)+15} = \frac{x(x-1)(x+1)(x+2)-6}{x(x-1)(x+1)(x+2)+2}.$$

Pătraşcu Enache

b) Demonstraţi că numărul $A = \underbrace{111...11}_{1004\text{ cifre}}\underbrace{555...5}_{1003\text{ cifre}}6$ este pătrat perfect.

Gloambeş Mihai-Lucian

2. a) Determinaţi numerele prime de forma $\overline{abc}$ cu proprietatea că $a \cdot b \cdot c$ este număr prim.

G. M. 4 / 2007

b) Să se rezolve în numere întregi ecuaţia $x^2 + 32 = 6^n$.

G. M. 11 / 2007

3. Fie $\triangle ABC$ şi $R \in (AB)$ şi $T \in (AC)$ astfel ca $\frac{RB}{RA} + \frac{TC}{TA} = 1$. Dacă $BB_1 \parallel AC$ şi $CC_1 \parallel AB$ cu B_1, $C_1 \in RT$ să se arate că:

a) $\sqrt{S_{BB_1R}} + \sqrt{S_{CC_1T}} = \sqrt{S_{ART}}$;   b) $S_{ART} \geq \frac{4}{9} S_{ABC}$.

Pătraşcu Enache

PROBLEMĂ FĂRĂ SPERANȚE LA CONCURSUL SPERANȚE COMĂNEȘTI, BACĂU, CLASA A VII-A, 29.03.2008

4. Un păianjen *P* descoperise o stratagemă de a ademeni muşte nevinovate, spre mârşavul lui folos de a le mânca. Descoperise ticălosul, o placă de forma unui triunghi *ABC*, din sticlă foarte subţire, care stătea undeva suspendată orizontal, prin nu ştim prin ce miracol. Pârdalnicul, ungea prin vicleşuguri de el ştiute, faţa de deasupra, cu unsori chemătoare de muşte, destul de cleioase şi se aşeza sub sticlă, într-un punct anume, interior triunghiului, pe care îl vom numi tot *P*. Ştia vicleanul că nu va trece mult, până o muscă *M* se va aşeza deasupra sticlei. Era bine pregătit la geometrie, ca în momentul aşezării, să purceadă spre dânsa, spre cel mai scurt şi rapid drum. Ştia lacomul, că dacă întârzie, musca are timp să decoleze şi asta nu-i plăcea deloc. Unele muşte *M*, mai psiholoage, băgaseră seamă că păianjenul se decide greu, când are de ales între drumuri la fel de lungi, şi se aşezau, în ciuda lui, taman unde sărmanul *P* irosea timp, cu alegerea variantei. Se povesteşte, că o muscă *H* era atât de hâtră, să se aşeze exact acolo unde *P* ar fi avut de ales între trei drumuri. Este de prisos să spunem, că în faţa unei alegeri atât de complicate, *P* se simţea surmenat şi adormea. Acuma, pentru un competitor, care nu ţine cu musca, sau cu păianjenul, se cere:

a) Să spună, cum determină păianjenul *P* un drum cât mai scurt, către orice poziţie posibilă a muştei *M*.

b) Pentru fiecare poziţie a lui *P*, să spună unde se pot aşeza muştele psiholoage.

c) Să arate, că oriunde ar staţiona *P*, există un punct *H*, pe care se poate aşeza, fără teamă, musca hâtră.

Noi nu l-am uitat pe cel ce ne dădea adunarea,
regretatul prof. univ. dr. Brânzei Dan-Petru

PATALAMA SPECIALĂ

Se adevereşte prin prezenta hârtie, la nimic trebuitoare că numitul ………………………………….. venit nechemat de la Şcoala ………………………………………………. din …………………….. scăpat de sub supravegherea profesorului ………………………., a pierdut vremea prin Comăneşti, în ziua de 29.03.08, ocupându-se de felurite muşte şi paianjeni. Aista, s-a dovedit mai vânjos, decât alţii mai bicisnici, spre a se învrednici să i se zică **Hâtrul concursului**. Dacă va mai veni, i se vor oferi, cu toată ospitalitatea, tot muşte şi păianjeni.

Să-i fie de bună amintire

Judecător Medic Primar Grefier

Diplomă înmânată celor câştigători de regretatul profesor universitar doctor Brânzei Dan-Petru.

Clasaa VIII-a

1. Rezolvaţi în numere reale sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-y+1}+\dfrac{1}{x+y-1}=2 \\ x^2=y^2 \end{cases}$$

G. M. 4 / 2007

2. a) Rezolvaţi în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ecuaţia: $\sqrt{x-2007}+\sqrt{y+2007}-1=\frac{x+y}{2}$.

G. M. 11 / 2007

b) Ce relaţie trebuie să fie între numerele naturale a şi b pentru ca expresiile a^2+4b şi b^2-4a să fie simultan pătrate perfecte?

G. M. 11 / 2007

3. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată, $AB=a$, $m(\sphericalangle VA,(ABC))=x$, iar S un punct în interiorul pătratului $ABCD$.

a) Să se arate că $SA^2+SB^2+SC^2+SD^2=2a^2+4SO^2$, unde $AC\cap BD=\{O\}$.

b) Dacă A_1, B_1, C_1, D_1 sunt proiecţiile punctului S pe muchiile VA, VB, VC, respectiv VD, să se arate că $SA_1^2+SB_1^2+SC_1^2+SD_1^2\geq 2a^2\cdot\sin^2 x$.

Pătraşcu Enache

Ediţia a V-a : 24-26.04.2009

Clasa a III-a

1.Un număr *a* are patru cifre iar suma cifrelor sale este 36. Calculați suma cifrelor numărului *a* + 1.

2.Irina îi spune Mioarei:- Dă – mi 2 lei ca să am și eu cât tine!

Mioara îi răspunde:-Dă – mi tu 2 lei, să am o sumă de două ori mai mare decât suma ce - ți rămâne ție!Câți bani au împreună Irina și Mioara?

3.Romanul ”Harry Potter” are șapte volume. Știind că fiecare volum, începând cu al doilea are cu 144 pagini mai puțin decât dublul numărului de pagini al volumului precedent, iar al treilea volum are 176 de pagini, aflați câte pagini are întregul roman.

Clasa a IV-a

1.Alina și Dănuț au împreună 22 de ani. Dacă Dănuț ar fi de două ori mai în vârstă tot i-ar mai trebui un an ca să aibă de patru ori mai puțin decât Alina.Aflați vârstele celor doi.

2.a) Dacă $a + b + c = 175$ și $a + 2 \cdot c = 200$, calculați produsul $(2\cdot a+b+3\cdot c)\cdot(c-b)$

b) Fie *a, b, c* numere naturale. Să se arate că *a* + *b*, *a* + *c*, *b* + *c* nu pot fi toate trei numere impare.

3.Descoperiți regula de formare a șirului: 1, 3, 6, 10, 15, 21, …, *x*.

Știind că *x* este pe locul 100, să se afle valoarea lui *x*.

Clasa a V-a

1.Să se arate că oricum am alege șapte numere pătrate perfecte, există două a căror diferență se divide cu 10.

2.Arătați că fracția $F=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2008+1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2009+1}$ este ireductibilă.

Gloambeş Mihai-Lucian

3. a) Arătați că fracția $\dfrac{77777^3}{22222^3\cdot 8^2}$ este subunitară.

b) Ce condiții îndeplinesc *a* și *b* astfel încât fracția $\dfrac{\overline{37ab}}{\overline{3ab7}}$ să fie supraunitară?

Clasa a VI-a

1.Se consideră un unghi ascuțit *xOy* și *P* un punct în interiorul său. Notăm cu *M* și *N* simetricele lui *P* față de *Ox*, respectiv *Oy*. Arătați că:a) Triunghiul *OMN* este isoscel

b) $OP>\dfrac{MP+PN}{4}$.

2.Fie $x,y,z\in\mathbb{N}$. Arătați că:

$$\frac{9\cdot\left(\overline{x,(y)}+\overline{y,(x)}\right)}{0,5}=\frac{81\cdot\left(\overline{y,(z)}+\overline{z,(y)}\right)}{4,5}=\frac{729\cdot\left(\overline{z,(x)}+\overline{x,(z)}\right)}{40,5}\Leftrightarrow x=y=z.$$

3.Determinați elementele mulțimii:

$$A=\left\{\overline{xyzt}\,\middle|\,\frac{x+1}{x-1}=\frac{y+2}{y-2}=\frac{z+3}{z-3}=\frac{t+4}{t-4}\right\}.$$

Clasa a VII-a

1.Se consideră mulțimea $A=\{x^2+x+5, x\in\mathbb{N}\}$. Determinați pătratele perfecte conținute în mulțimea *A*.

2. a) Care din numerele 2009, 2010 se poate scrie ca o diferență de două pătrate de numere naturale?b) Demonstrați că 37^x-13^y este divizibil cu 3 pentru x și *y* numere naturale.

3.În trapezul dreptunghic $ABCD\left(m(\sphericalangle A)=m(\sphericalangle D)=90^0\right)$ cu $m(\sphericalangle B)=60^0$, segmentul determinat de diagonale pe linia mijlocie are lungimea *a*. Determinați aria trapezului în funcție de *a*.

Clasa a VIII-a

1. a) Calculați suma: $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)+\left(2-\dfrac{1}{4}\right)+\left(3-\dfrac{1}{4}\right)+...+\left(n-\dfrac{1}{4}\right)$

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\sqrt{x_1-1}+\sqrt{x_2-2}+\sqrt{x_3-3}+...+\sqrt{x_n-n}+\frac{n(2n+1)}{4}=x_1+x_2+x_3+...+x_n.$$

2.Fie prisma triunghiulară dreaptă $ABCA`B`C`$ cu bazele triunghiuri echilaterale. Dacă $AB$ = 12 cm, $AA`=6\sqrt{6}$ cm și $\{O\}=BC`\cap B`C$ calculați:a) măsura unghiului dintre AO și $A`B`$

b) tangenta unghiului dintre AO și $(BCB`)$

c) măsura unghiului dintre $(ABC`)$ și $(ACB`)$

3.Fie $x, y, z \in (0,1)$. Demonstrați că:a) $xy+1>x+y$ b) $xyz+2>x+y+z$

Ediţia a VI-a : 23-25.04.2010

Clasa a III-a

Operaţii succesive

Să se calculeze: $(6 \cdot 8 — 5 \cdot 9) \cdot 10 + 27 : (153 — 15 \cdot 10)$

Să se afle x din egalitatea: $(x \cdot 6 — 37) \cdot 7 — 3 = 32$

Borcanul răsturnat. Într-un borcan de compot erau 10 cireșeși 12 vișine. Ionuț a vărsat borcanul pierzând douăcireșeși jumătate din vișine. Mâncând fructele rămase a pus sâmburii pe o farfurie. Câțisâmburi au ajuns în farfurie?

Piramida ZOO. Un purceluș stă cu câte un piciorуș pe câte o găină, o gâscă, un iepurașși un cățel. Câte picioare sunt pe pământ?

Un șoricel s-a urcat pe o gâscă, gâsca s-a urcat pe un cățel, cățelul s-a urcat pe o vulpe, vulpea s-a urcat pe o capră, capra s-a urcat pe un urs, ursul s-a urcat pe un elefant. Câte picioare nu ating pământul?

Clasa a IV-a

Operaţii ordonate

Să se calculeze: $1000 - [4928 : 7 - 16 \cdot (3 + 2 \cdot 5)] \cdot 2$

Să se afle x din egalitatea: $2 + 10 \cdot \{[7 \cdot (15 — 2 \cdot x) - 16] \cdot 5 - 3\} = 222$

Raport de vârste. Tatălși fiul au împreună 55 de ani. Când fiul avea 8 ani, tatăl avea 33 de ani. Peste câți ani vârstatatălui va fi de doua ori mai mare decâtvârsta fiului?Cine sunt?Pentru un număr de copii, numele de botez sunt Andrei, Barbu, Corina și Dinu. Numele lor de familie sunt Adam, Brad, Cosma. Numele mămicilor lor sunt Ana și Brândușa. Indicați o situație cu un număr minim de copii și de mame.

Clasaa V-a

1. a) **Diferenţă de pătrate.** Arătaţi că numărul $n=\underbrace{444\cdots44}_{2n\text{ cifre}}-\underbrace{888\cdots88}_{n\text{ cifre}}$ este pătratul unui număr natural.

b) **Diferenţă de pătrate**. Arătaţi că numărul 7^{2011} poate fi scris ca diferenţa a două pătrate perfecte.

2. **(Co)incidenţe**

a) Aflaţi numerele naturale nenule a căror diferenţă este egală cu câtul lor.

b) Bunicul şi cei patru nepoţi ai săi au vârstele, în ani, exprimate prin numerele naturale nenule. Dacă notăm cu v vârsta bunicului, iar cu a,b,c,d vârstele celor patru nepoţi, ştiind că: $v=a\cdot b\cdot c\cdot d$, $v<64$ şi $a<b<c<d$ cu $b-a\neq c-b\neq d-c\neq b-a$, aflaţi vârsta bunicului şi vârstele celor patru nepoţi.

3. **Tir matematic.** La tragerea într-o ţintă se acordă 10 puncte pentru o lovitură în primul cerc (cel din centru), 6 puncte pentru o lovitură în al doilea cerc şi 2 puncte pentru o lovitură în al treilea cerc. Elevii clasei a V-a cu un efectiv de 18 elevi, trăgând fiecare câte 10 lovituri, obţin 40 de lovituri în cercul al doilea, 40 de lovituri sunt ratate iar celelalte nimeresc în primul cerc şi al treilea cerc. Dacă întreaga clasă a obţinut 920 de puncte, să se afle câte lovituri au fost în primul cerc şi câte în al treilea cerc.

Clasaa VI-a

1.**Numărătoarea fără bile**. a) Fie mulţimea $A=\{3,7,11,15,...\}$, cu elemente în ordine crescătoare şi *cardA=100*.i) Este 231 element al mulţimii *A*? Justificaţi.

ii) Aflaţi cel mai mare element al mulţimii *A*.

b) Într-un tabel dreptunghiular sunt scrise primele numere naturale nenule, în ordine crescătoare, în rânduri egale de la stânga la dreapta. Știind că pe rândul din mijloc se află numărul 100 iar în dreptul acestui număr, pe ultimul rând se află numărul 193, să se afla câte numere se află în tabel.

2.**Contaţi pe un zece la bază!** Să se determine numerele naturale de patru cifre, de forma $\overline{abcd}$, ştiind că împărţite la $\overline{bcd}$ dau câtul 6 şi restul $\overline{acd}$.

3.**Vrem unghiul!**În interiorul unui unghi obtuz $\sphericalangle AOD$ se consideră semidreptele oarecare $(OB$ şi $(OC$ astfel ca $(OA\perp(OC$. Știind că măsura unghiului format de bisectoarele $(OM$ şi $(ON$ ale unghiurilor $\sphericalangle AOB$, respectiv, $\sphericalangle COD$ este egală cu 68°, aflaţi măsura unghiului $\sphericalangle BOD$.

Clasaa VII-a

1. **Iraţionalul matematic.** a) Dacă *a,b* sunt numere naturale mai mari decât 2 şi $a-b=6$, arătaţi că numărul $\sqrt{ab}$ este iraţional.

b) Aflaţi două! Determinaţi numerele raţionale *x* şi *y* ştiind că:

$$4x^2+y^2+65\leq 28|x|+8|y|$$

2. **Aflaţi raţional şi iraţional!**a) Rezolvaţi în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{3y}=\dfrac{1}{4}$.

b) Știind că $\dfrac{a}{b}=2\sqrt{2}-1$, calculaţi valoarea raportului $r=\dfrac{a^2+7b^2}{a^2-b^2}$

3. **Ce unghi face?**În triunghiul isoscel ABC cu $m(\sphericalangle BAC)=100^\circ$, pe latura (BC) se consideră punctul D astfel încât $(BD)\equiv(AC)$.Dacă $m(\sphericalangle ABE)=30^\circ$, unde $E\in(AC)$, aflaţi măsura unghiului $\sphericalangle CDE$.

Clasaa VIII-a

1. a) **Dublă determinare.** Să se determine numerele reale *x,y* ştiind că:

$x^4+y^4+x^2+y^2+2=6xy$.

b) **Revopsire.** Arătaţi că pentru orice $x\in R$, $x>0$, avem:

$$x^{2001}+\frac{1}{x^{2003}}\geq\frac{6\cdot x^{1000}}{16\cdot x^{2002}-5\cdot x^{1001}+1}$$

2. **Că cine este *n*?** Să se determine numărul întreg *n* ştiind că $\sqrt{n^4+n^3+n+1}\in\mathbb{Z}$

3. **Veniţi cu noi în cub!** Fie cubul *ABCDA'B'C'D'* cu muchia *AB=10 cm*. Considerăm punctele *O* şi *O'* centrele feţelor *ABCD* şi, respectiv, *A'B'C'D'* ale cubului, iar punctul *P* este intersecţia cercului circumscris triunghiului *CC'O'* cu segmentul (AC'), diagonala cubului.

a) Arătaţi că planele (ABD') şi (CDA') sunt perpendiculare.

b) Arătaţi că dreapta *AC'* este perpendiculară pe planul (PBD) şi aflaţi lungimea segmentului $[AP]$.

Toate subiectele ediţiei din anul 2010 au fost selectate de prof. univ. dr. Brânzei Dan-Petru.

Ediţia a VII-a : 29-30.04.2011

Clasa a III-a

1. a) Calculaţi: 4 x a – b : 3 + 5 x c, ştiind că:

a = (6 + 3 : 3 - 5) : 2b =10 – 3 : [5 – 4 : (8 – 6 : 1)] c = [(7 + 9) : 4 - 3] x (8 – 2 x 4)

Descoperiţi cel mai mare număr de 7 cifre cu suma cifrelor 24.

2. Într-o livadă sunt 1256 meri, peri, nuci. Numărul perilor se cuprinde în numărul merilor de 3 ori şi rămâne rest 24, iar în numărul nucilor se cuprinde de 2 ori şi rămâne rest 8.

   Câţi pomi sunt de fiecare fel?

3. Fie şirul numeric: 2, 7, 12, …

   a) Aflaţi numărul de pe locul 50.

   b) Verificaţi dacă numărul 101 face parte din şir.

Clasa a IV-a

1. a) Calculaţi a - b, ştiind că:a + 2b + 3c = 307 şi a + c = 121

b) Aflaţi termenul necunoscut:2 + 2 x {2 + 2 x [2 + 2 x (2 – 2 : m)]} = 22

2. a) Găsiţi un număr format numai din cifrele 1 şi 0 astfel încât, împărţit la numărul 123 456 789 să dea câtul un număr natural şi restul 0.

b) Din care număr trebuie scăzut de 8 ori câte 8 pentru a obţine un număr cu 8 mai mare decât 8?

3. În prezent tatăl are 40 de ani, iar copiii săi au 8 ani, 6 ani, 4 ani şi respectiv, 1 an. Peste câţi ani vârsta tatălui va fi egală cu suma vârstelor copiilor săi la acel moment?

Clasaa V-a

1. Se consideră mulţimea $M=\{x^4 \mid x\in\{0,1,2,...,10\}\}$. Determinaţi numărul minim de elemente care trebuie alese arbitrar din mulţimea *M*, pentru a fi siguri că există două elemente alese având diferenţa divizibilă cu 10.

Gazeta Matematică, 2011

2. Să se afle ultima cifră a numărului

$$N=(3+6+7+8)+\left(3^2+6^2+7^2+8^2\right)+...+\left(3^{2011}+6^{2011}+7^{2011}+8^{2011}\right).$$

Gloambeş Mihai-Lucian

3. Determinaţi numerele naturale de forma $\overline{abc}$ divizibile cu 4 ştiind că numărul $n=29\cdot\left(a+b^2+c^4\right)$ este pătrat perfect mai mic decât *10000*.

Bălăucă Artur

4. a) Câte numere de 2011 cifre au produsul cifrelor egal cu 6?

b) Dacă numărul 2^{2011} are a cifre şi 5^{2011} are *b* cifre, aflaţi $a+b$.

Gloambeş Toma

Clasaa VI-a

1. a) Arătaţi că numărul $N=\underbrace{5656...56}_{22\ cifre}$ nu este pătrat perfect.

Gazeta Matematică, 2010

b) Știind că $\overline{xy}+\overline{yx}=55$ găsiţi numărul natural *n* din egalitatea

$$1+2+3+...+n+\overline{xy}=506.$$

Gloambeş Mihai-Lucian

2. Să se rezolve în mulţimea numerelor naturale ecuaţia:

$1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot x+505=y^2$.

3. Fie mulţimea $A=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15\}$.

a) Care este cel mai mic număr de elemente ce le putem elimina din mulţimea A astfel încât cu elementele rămase să formăm două mulţimi B şi C care să aibă acelaşi număr de elemente (card B=card C) iar produsul elementelor mulţimii B să fie egal cu produsul elementelor mulţimii C.

b) Arătaţi ca există cel puţin zece perechi distincte de mulţimi B şi C cu proprietatea de la punctul a);

4. Fie triunghiul *ABC* şi semidreapta $[BM$, $(M\in AC)$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$. Se prelungesc laturile $[AB]$ şi $[BC]$ cu segmentele $[AP]$ şi, respectiv, $[CQ]$ astfel încât $[AP]\equiv[MC]$ şi $[AM]\equiv[CQ]$, unde $A\in[BP]$, iar $C\in[BQ]$.

Dacă $[BP]\equiv[BQ]$ şi punctul *N* este mijlocul segmentului $[PQ]$, arătaţi că:

a) Dreptele BM şi AC sunt perpendiculare.

b) Punctele B,M,N sunt coliniare.

c) Dreptele AC şi PQ sunt paralele.

Bălăucă Artur

Clasaa VII-a

1. Să se afle numerele naturale $\overline{xy}$ scrise în baza 10, ştiind că:

$x^2y-2x^2+y+2xy-4x-66=0$

Pică Zamfir

2. Aflaţi numărul natural n ştiind că: $\frac{2^n}{(1+2^n)^2}+\frac{3^n}{(1+2^n+3^n)^2}+\frac{1+2^n+3^n}{2^n+3^n}>\frac{3}{2}$

Bălăucă Artur

3. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $m(\sphericalangle BAC)=100^\circ$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$ intersectează latura AC în punctul D. Arătaţi că $BC=AD+BD$.

Gazeta Matematică, 12/2010

4. Se dă triunghiulABC cu $m(\sphericalangle A)=36^\circ$ şi $m(\sphericalangle B)=18^\circ$.Arătaţi că $\frac{BC}{AC}-\frac{AC}{BC}=\frac{AB}{BC}$.

Rotaru Petru,Gloambeş Toma

Clasaa VIII-a

1. Triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A)=90^\circ$ şi $m(\sphericalangle C)=60^\circ$ are latura AC inclusă în planul α, iar $B\notin\alpha$ .Dacă $AD\perp BC$ ($D\in(BC)$) şi semidreapta $(CE$, $E\in(AB)$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ACB$, determinaţi poziţia dreptei DE faţă de planul α.

(Gazeta Matematică, 11/2010, enunţ modificat)

2. Fie numerele reale x,y,z sunt din intervalul $[0,1]$.

Demonstraţi că: a) $xy+1\geq x+y$; b) $x+y+z\leq xy+xz+yz+1$.

Gloambeş Mihai-Lucian

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale prime ecuaţia $x^2+y^2+2\cdot z=z^2+2x+2y$.

Bălăucă Artur

4. Fie cuburile *ABCDA'B'C'D*' şi *C''D'A''EFD''MN*, unde punctele *A'', C''* şi *D''* sunt simetricele faţă de punctul *D'* al punctelor *A', C'* şi, respectiv, *D.*

Arătaţi că:

a) Punctele I,O,G şi H sunt coliniare, unde I este centrul cercului înscris triunghiului *AB'C*, O este centrul cercului circumscris triunghiului *A'C'D*, G este centrul de greutate al triunghiului *A''C''D''* iar H este ortocentrul triunghiului *EFM*.

b) $(HG) \equiv (OI)$.

Văcăraşu Vasile

Ediţia a VIII-a : 27-29.04.2012

Clasa a III–a

1. Știind că:

$a = 10 + 250 : 10 + 36 : (54 : 3 + 0 : 16) \times 17 - 18 \times 0$,

$b = 33 - 3 \times [3 + 3 \times (3 - 3 : 3)] + 3 \times 0$,

$c = \{68 - 24 : [4 - 3 \times (6 - 18 : 3)] \times 8\} : 5$,

calculați suma dintre primul număr, dublul celui de-al doilea și triplul celui de-al treilea.

2. Să se scrie toate numerele cuprinse între 675 și 850 cu suma cifrelor mai mică sau egală cu 10.

3. a) Aflați valoarea lui m știind că:$50 - 48 : 48 - 47 : 47 - \ldots - m : m = 32$.

b) Determinați numărul $\overline{abcd}$, astfel încât: $\overline{abcd} + \overline{bcd} + 2 \times d = 2012$.

Clasa a IV-a

1. a) Să se determine m din egalitatea:$\{180 - [(2 \cdot m - 8) : 3 - 5] : 3 + 12\} : 9 + 12 = 25$.

b) Determinați numerele naturale x, y, z știind că: $17 \cdot x + (2 \cdot x + 5 \cdot z) \cdot y = 35$.

2. Împărțiți numărul 96 în patru părți astfel încât, dacă la prima parte adăugăm 3, din a doua scădem 3, a treia o înmulțim cu 3, iar a patra o împărțim la 3, toate rezultatele sunt egale.

3. a) Determinați numărul $\overline{abca}$, dacă $\overline{cacb} + \overline{adb} + \overline{daa} + \overline{ab} = 2222$.

b) Știind că $\overline{xy} + \overline{yx} = 187$, găsiți numărul natural n, din egalitatea:

$\overline{xy} \cdot \overline{yx} + n = 10734$.

Clasa a V-a

1. a) Comparaţi numerele:$A = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{99} \cdot 26$ si $B = 3^{3302} - 3^{3301} + 21 \cdot 9^{1650}$.

Gloambeş Mihai-Lucian

b)Determinaţi cifrele a şi b, ştiind că: $\overline{ab3} = 3^{a+b-1}$

Gazeta Matematică

2. Arătaţi că nu există numere naturale x şi y pentru care $x^2 - 5y^2 = 2012$.

Gazeta Matematică

Să se arate că numărul

$A = \frac{13}{23} + \frac{1313}{2323} + \frac{131313}{232323} + \cdots + \frac{1313\ldots13}{\underbrace{2323\ldots23}_{598\ decifre}}$ este pătrat perfect.

Gloambeş Mihai-Lucian, Sas Maria

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor naturale ecuaţia: $x^y + y = 128$.

Bălăucă Artur

Clasa a VI-a

1. Arătaţi că ecuaţia $x^2 + 503 \cdot y = 2012$ are o infinitate de soluţii în mulţimea numerelor întregi.

Gloambeş Mihai-Lucian

Fie proporţiile: $\frac{x}{1,(2)} = \frac{y}{1,(5)}$ şi $\frac{y}{2,(3)} = \frac{z}{1,(8)}$. Să se afle numerele raţionale *x*, *y*, *z* ştiind că $\frac{x}{3} + \frac{y}{7} + \frac{z}{2} = 34$.

Sanda Nicolae

2. Aflaţi numerele naturale pătrate perfecte de forma $\overline{abc}$ scrise în baza 10 ştiind că sunt îndeplinite simultan condiţiile:

   i) $a < b < c$;

   ii) numărul $n = 5 \cdot \left[\overline{a,b(c)} + \overline{a,c(b)} + \overline{b,a(c)} + \overline{b,c(a)} + \overline{c,a(b)} + \overline{c,b(a)}\right]$ este pătratul unui număr raţional.

Bălăucă Artur

3. Fie triunghiul *ABC* cu $AB \neq AC$ şi *I* punctul de intersecţie al bisectoarelor. Prin *I* construim $PQ \parallel BC$, $P \in (AB)$, $Q \in (AC)$ şi *MN* cu $M \in (AB)$ şi $N \in (AC)$ astfel încât $\sphericalangle MNA \equiv \sphericalangle ABC$.

Arătaţi că: a) $(AP) \equiv (AN)$ b) $\Delta AMN \equiv \Delta AQP$ c) $\Delta PMN \equiv \Delta NQP$.

Gazeta Matematică

Clasa a VII-a

1. a) Dacă $a, b, c \in \mathbb{Q}$ şi $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = 2012$ arătaţi că:

$$A = \sqrt{(2012 + a^2) \cdot (2012 + b^2) \cdot (2012 + c^2)}$$ este număr raţional.

Rotaru Petru

b) Determinaţi cifrele a şi b din baza 10 astfel încât $\overline{0,a(b)} = \frac{a}{b}$

Gazeta Matematică

2. Să se compare numerele raţionale a şi b, unde:

$a = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2012}$ şi $b = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{2011}{2012}$

Să se arate că $a < b$.

Gloambeş Mihai-Lucian

Se dau mulţimile $A=\left\{x\in\mathbb{Z}|\left[\sqrt{x-1}\right]=\frac{x-1}{2}\right\}$ şi $B=\left\{y\in\mathbb{Z}|\left[\sqrt{y-2}\right]=\frac{3y-7}{2}\right\}$, unde $[a]$reprezintă partea întreagă a numărului real a. Să se determine $A\cup B$ şi $A\cap B$.

Bălăucă Aida – Elena

3. Fie trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ şi $CD < AB$. Pe laturile $[AD], [BC]$ şi $[CD]$ ale trapezului se consideră punctele M, N şi respectiv P astfel încât: $\sphericalangle DMP \equiv \sphericalangle NPC$ şi $CD = a$.Arătaţi că $xy\le\frac{(x+y)^2}{4}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

Aflaţi poziţia punctului P pe baza $[CD]$ a trapezului ştiind că $4\cdot MD\cdot CN = a^2$.

Dacă $(MP$ este bisectoarea $\sphericalangle DMN$, arătaţi că $QP \perp AB$, unde$\{Q\} = AD \cap BC$.

Bălăucă Artur

Clasa a VIII-a

1. a) Fie A= $\sqrt{8+2\sqrt{15}}-\sqrt{8-2\sqrt{15}}-\left(\sqrt{12}+1\right)$. Calculaţi A^{2012}.

Gloambeş Mihai-Lucian

b)Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuaţia: $\overline{120xy}_{(p)} = t^2-1, p>2;\ \ p,x,y,t\in\mathbb{N}$.

Laic Robert Constantin

2. a)Dacă $a\ge 0$ şi $b\ge 0$ să se arate că: $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{(a+b+1)^2}+\frac{1}{a+b+1}\le 1$. Când avem egalitate?

Bălăucă Artur

b)Determinaţi $a, b\in\mathbb{R}$ astfel încât $3\sqrt{a+b}+2\sqrt{8-a}+\sqrt{6-b}=14$.

Sas Maria

3. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ și M, N, P sunt proiecţiile vârfului Ape

dreptele $A'B, A'C$, $A'D$.

Arătaţi că $A'C \perp (MNP)$ și punctele M, N, P, A sunt coplanare.

Calculaţi sinusul unghiului format de planele (ABC) şi (MNP).

Gloambeș Toma

Ediţia a IX-a : 10-12.05.2013

CLASA a III – a: ***faza judeţeană***

1.i. Arătaţi că a este sfertul lui t, dacă:

$[36 : (24 - a) + 29] : 5 = 7$ iar $t = [(921 - 639) : 6 - 39] \times 9$

ii. Găsiţi numerele naturale X, Y şi Z, ştiind că

$(X + 2) \times (Y + 1) \times (Z + 3) = 15$

Şişca Maria Laura

2.i. Adunând un număr de două cifre nenule, cu răsturnatul său, obţinem un număr de două cifre egale. Care este cel mai mare număr cu această proprietate? Dar cel mai mic?

ii. Mărind un număr cu 274 obţinem triplul său. Care este numărul?

GM

3. Ioana, Mara şi Alexandru au împreună 27 de mere. Aflaţi câte mere are fiecare dintre ei, ştiind că Mara are de patru ori mai multe mere decât Ioana, iar Alexandru are mai multe mere decât Ioana şi mai puţine decât Mara.

GM

CLASA a III – a: faza interjudeţeană

1. a) Se dau:$a = 8 \times 9 - 7 \times 8 - 64 : 8$ și$b = 96 : 8 + 3 \times 4 - 5 \times 3$

Aflați diferența dintre triplul lui a și dublul lui b.

b) Aflați-l pe m din relația:$\{[25 : (3 \times m - 4) + 40] : 15 + 3\} - 5 = 1$

2. În ograda sa, Lucian / Are oi, găini și-un motan.
Lucian a numărat / Și iată ce a constatat:
Picioare sunt 72, / Capete, doar 29.
Încercați voi să aflați,Însă nu prin numărare,
Câte sunt de fiecare?

A

7		a
	15	
	7	24

B

3. Din pătratul de mai sus au fost șterse câteva numere. Știind că numerele, scrise la început în tabel, adunate pe orizontală sau pe verticală dau aceeași sumă ca numerele de pe diagonala AB, să se afle numărul a.

Clasa a IV-a

1. a) Calculează respectând ordinea operațiilor:

$2 \times \{705 - [(56 : 7 \times 43) + (200 - 5 \times 33)] + 785\} - 209 = 2013$

b) Aflaţi valoarea lui a:

$43 - \{6 + [12 \times (7 - 2 \times a) + 36] : 8\} = 31$

2. Suma a 5 numere este 100. Dacă măresc primul număr cu 2, pe al doilea îl micșorez cu 3, pe al treilea îl măresc de 4 ori, pe al patrulea îl micșorez de 5 ori obțin de fiecare dată, al cincilea număr.Aflați numerele!

3. Găsiți numărul $\overline{abc}$, astfel încât: $\overline{2bc} + \overline{a3c} + \overline{ab5} = 2013$.

Clasa a V-a

1. i. Determinaţi numerele prime a, b şi c astfel încât $61\,a^2 + 122b - 2c = 2013$

GM

ii. Să se arate că $A = 10^{n^2+n+2}$se poate scrie ca o sumă de două pătrate perfecte, oricare ar fi *n*număr natural.

***

2. i. Determinaţi mulţimea

M ={ $\overline{abc}$/ $a\cdot\overline{bc}$şi$b\cdot\overline{ac}$suntnumere consecutive}

GM

ii. Comparaţi fracţiile:

$a = \frac{x+343^{671}}{x+2401^{503}}\,;\, b = \frac{y+625^{503}}{y+216^{671}}$

Gloambeș Mihai-Lucian

3. Determinaţi numerele $\overline{abc}$ştiindcăcifrele sale suntnumere prime şi

$\frac{3a+2b}{6} = \frac{3b+c}{7} = \frac{a+4c}{11}$

GM

Clasa a VI-a

1. Determinaţi numerele întregi *x, y, z* ştiind că $x^2 + y^2 + z^2 = 2013$ şi

$\frac{x}{x+43} = \frac{y}{y+10} = \frac{z}{z+8}$ *GM*

2. i. Numerelenaturaledistincte *a, b* verifică relaţia *9·[a;b] = a·b·(a;b).* Arătaţi că *a* şi *b* nu sunt prime între ele.

GM

ii. Dacă numărul$\overline{abc}$ se divide cu 37, atuncişi$\overline{bca}$ se divide cu 37.

GM

3. i. Fie triunghiul isoscel ABC, (AB = AC), M mijlocul lui [BC] şi O un punct pe [AM]. Dacă E este simetricul lui O faţă de AB şi F este simetricul lui O faţă de AC, arătaţi că triunghiul MEF este isoscel şi AM ⊥EF

GM

ii. Fie pătratul ABCD. Împărţiţiinteriorulluiîn n pătrate cu interioareledisjuncteastfelîncât n ∈ {6, 7, 8, 2013}

Rotaru Petru

Clasa a VII-a

1. i. Se daunumerelenaturaleconsecutive *m, n, p.*

Demonstraţică*n*esteegal cu media aritmetică a numerelor*m*şi*p.*

Demonstraţică $n^2 - mp = 1$.

ii. Se daunumerele natural $x < y < z$ care au proprietăţile:

a) *y* este egal cu media aritmetică a numerelor *x* şi *z*

b) $y^2 - xz = 1$

Demonstraţi că cele trei numere *x, y* şi *z* sunt consecutive.

Rotaru Petru

2.i. Găsiţi cel puţin două soluţii naturale ale ecuaţiei $x^2 + 2013^2 = y^2$

Popa Florin

ii. Calculaţi partea întreagă a numărului

$$a = \frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{2013\sqrt{2012}}$$

2. i. Se consideră pătratul *ABCD* şi punctele *E,F* care determină pe *[CD]* segmentele *[DE]≡[EF]≡[FC]*. Fie *{G} = AE* ∩ *BC* şi *H* mijlocul lui *AG*.

Să se aratecă $DH = \frac{AC}{2}$

***

ii. Fie triunghiulechilateral *ABC*. Împărţiţi interiorul lui în *n* triunghiuri echilaterale cu interioarele disjuncte astfel încât *n*∈ {7, 8, 10, 2013}

Rotaru Petru

Clasa a VIII-a

1. i. Să se arate că dacă $a, b, c \in R_{+}^{*}$,

atunci avem $(a + b)\sqrt{c} + (b + c)\sqrt{a} + (c + a)\sqrt{b} \geq 6\sqrt{abc}$

***

ii. Dacă $x, y \in R^{*}$, astfel încât $9x^2 + 13xy + 4y^2 = 0$, atunci $\frac{6x+7y}{7x+6y} \in Q$

Popa Florin

2. i. Fie $a = \sqrt{28} - \sqrt{72} + \sqrt{80}$; $b = -\sqrt{63} + \sqrt{162} - \sqrt{180}$şi

$c = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{\sqrt{63}}$ Arătaţi că $a{:}b+c \in N$

***

ii. Determinaţi numerele reale x, y, z pentru care

$$\sqrt{x-2010} + \sqrt{y+2012} + \sqrt{z-4} = \frac{x+y+z+1}{2}$$

GM

a) În prisma hexagonală regulată ABCDEFA'B'C'D'E'F', cu muchiabazei de lungime$\sqrt{30}cm$, feţele laterale sunt pătrate. a)Demonstraţi că BE' ⊥B'C

b) Determinaţi distanţa d(BE' ; B'C)

GM

Ediţia a X-a : 25-27.04.2014

Clasa a III-a

1. a) Calculați: [(806 : 2 + 504 : 9) – (300 : 6 + 790 : 10)] × 3 : 5

b) Aflați rezultatul calculului: $n \times n : n + n \times 0 - n \times 1 + n : n$,unde n este un număr natural diferit de zero. *G. M.*

2. Determinați literele *M, A, T, E, I, C* care reprezintă cifre distincte astfel încât adunarea să fie corectă.

M	A	T	E	M	A	T	I	C	A	+
		T	E	M	A	T	I	C	A	+
				M	A	T	I	C	A	+
						T	I	C	A	+
								C	A	
M	A	9	I	M	T	7	I	0	M	

Gloambeș Toma

3. a)Suma a patru numere este 748. Primul și al doilea, respectiv al treilea și al patrulea sunt numere consecutive, iar diferența dintre al doilea și al treilea este 100.Aflați cele patru numere.

Şişca Laura

b) Dacă ar exista monede de 3 lei și de 5 lei am putea plăti suma de 100 lei cu exact 28 de monede? Dar cu 29 de monede?Justificați răspunsul!

G. M.

Clasa a IV-a

1. a) Aflați numerele naturale a, b, c știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

$2011a + b + c = 2016$; $a + 2011b + c = 4026$; $a + b + 2011c = 6036$.

G. M.

b) Fie șirul de numere: $A + 7, A + 8, A + 9, \ldots$ în care suma primilor 5 termeni este 495.

Aflați primii 5 termeni ai șirului și calculați suma primilor 19 termeni.

Gloambeș Toma

2. a) Aflați cifrele a și b știind că: $\overline{ab0b} + \overline{a0b} + \overline{ba} + 2\cdot b + a = 2014$.

b) La un concurs de alergare au participat 235 elevi. Vasilică a fost întrebat pe ce loc s-a clasat și a răspuns: "Numărul sportivilor din fața mea reprezintă o optime din numărul celor clasați după mine". Pe ce loc s-a clasat Vasilică?

Șișca Laura

3. a) Dacă $a + b$ este cel mai mic număr de 4 cifre distincte, iar c este cel mai mare număr impar de două cifre distincte, calculați: $3a + 3b - 7c$.

b) Câte numere naturale de cinci cifre dau restul 13 la împărțirea cu 2014?

***

Clasa a V-a

1. a) Dacă numerele x și y sunt naturale și $4x + 7y = 2013$, arătați că: $287 < x + y < 504$.

G. M.

b) Comparați numerele: 343^{671} și 16^{1007}.

Gloambeș Mihai- Lucian

2. a) Suma a trei numere naturale este 2014. Demonstrați că cel puțin unul dintre ele este mai mare sau egal cu 672.

***

b) Demonstrați că fracția $\frac{38n+5}{53n+7}$ este ireductibilă.

Gloambeș Lucian

3. a) Se consideră numerele de forma $\overline{abcd}$ scrise în baza 10 care îndeplinesc simultan condițiile:

i) $a \neq b \neq c \neq d$ ii) $a + b + 2c = d$ iii) $\overline{ab} - \overline{cd} = 6$.

Să se arate că suma tuturor numerelor $\overline{abcd}$ este divizibilă cu 331.

b) Se dau numerele naturale nenule a, c și r, unde $r \in \{1, 2, 3, \ldots, a-1\}$.

i) Demonstrați că: $\frac{a}{a\cdot c+r} = \frac{1}{c+1}\cdot\left(1 + \frac{a-r}{a\cdot c+r}\right)$.

ii) Scrieți numărul $\frac{2014}{6041}$ ca o sumă de două fracții diferite cu numărătorii 1.

Rotaru Petru, Gloambeș Mihai-Lucian

Clasa a VI-a

1. a) Rezolvați ecuația:

$$\frac{x+3}{2}+\frac{x+7}{3}+\frac{x+13}{4}+\frac{x+21}{5}+\frac{x+31}{6}+\frac{x+43}{7}+\frac{x+57}{8}+\frac{x+73}{9}+\frac{x+91}{10}=45.$$

Gloambeș Lucian

b) Fie a și b două numere întregi. Dacă unul dintre numerele $3a + 11b$ sau $6a - 2b$ se divide cu 9, arătați că produsul celor două numere se divide cu 162.

G. M.

2. a) Să se arate că dacă a, b, c, d sunt numere prime și distincte, atunci:

$abc + abd + acd + bcd + 1767 < 10abcd$.

Gloambeș Lucian

b) Se dau numerele naturale nenule a, c și r unde $r \in \{1, 2, 3, \ldots, a-1\}$.

i) Demonstrați că: $\frac{a}{a\cdot c+r}=\frac{1}{c+1}\cdot\left(1+\frac{a-r}{a\cdot c+r}\right)$.

ii) Scrieți numărul $\frac{2014}{8055}$ ca o sumă de două fracții diferite cu numărătorii 1.

Rotaru Petru, Gloambeș Lucian

3. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și $[BD$, $[CE$ bisectoarele unghiurilor B și C ($D \in AC$, $E \in AB$). Se notează cu I intersecția dreptelor BD și CE și cu F respectiv G picioarele perpendicularelor duse din D respective E pe dreapta BC.

Să se determine măsura $\widehat{FIG}$.

G. M.

Clasa a VII-a

1. a) Presupunând că p este număr prim, să se rezolve în numere naturale ecuația:

$24p + 1 = k^2$.

***

b) Se dau numerele naturale nenule m, n și q unde $q \in \{1, 2, 3, \ldots, m-1\}$.

i) Demonstrați că: $\frac{m}{m\cdot n+q}=\frac{1}{n+1}\cdot\left(1+\frac{m-q}{m\cdot n+q}\right)$.

ii) Scrieți numărul $\frac{1151}{2014}$ ca o sumă de fracții diferite cu numărătorii 1.

Rotaru Petru, Gloambeș Mihai-Lucian

2. Determinați numerele naturale a, b și numărul natural prim p știind că

$a^2 + a = p^{2^b} + 2$.

G. M.

b) Pentru $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$ demonstrați inegalitatea:

$\frac{abc}{d} + \frac{abd}{c} + \frac{acd}{b} + \frac{bcd}{a} \geq ab + bc + cd + ad.$

3. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic ($m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90^0$) cu $AB \neq CD$ și având diagonalele perpendiculare.

a) Să se arate că $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

b) Dovediți inegalitatea: $AB + CD > 2AD$.

***

Clasa a VIII-a

1. a) Determinați perechile de numere întregi (a, b) care verifică relația:
$a^2b^2 - 11a^2 - 11b^2 = 1893.$

G. M.

b) Să se determine distanța de la punctul $O(0,0)$ la reprezentarea geometrică a graficului funcției liniare cu coeficienți întregi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care îndeplinește condiția:

$f(x-2) \cdot f(x+2) = x^2 - 2x - 3$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

G. M.

2. a) Să se găsească un număr întreg pozitiv x astfel încât $2x + 1$ să fie pătrat perfect iar între numerele $2x + 2, 2x + 3, ..., 3x + 2$ să nu existe pătrate perfecte.

Gologan Radu-Nicolae

b) Se dau numerele naturale nenule m, n și q unde $q \in \{1, 2, 3, \ldots, m-1\}$.

i) Demonstrați că: $\frac{m}{m \cdot n + q} = \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{m-q}{m \cdot n + q}\right)$.

ii) Scrieți numărul $\frac{247}{420}$ ca o sumă de fracții diferite cu numărătorii 1.

Rotaru Petru, Gloambeș Mihai-Lucian

3. Fie a, b, c, d dimensiunile, respectiv lungimea diagonalei unui paralelipiped dreptunghic. Se știe că $|a-b| = |c-d| = 1$ și că lungimea celei mai scurte muchii a paralelipipedului este un număr natural.

Calculați:

a) Volumul V al paralelipipedului în cazul în care $|V - 2014|$ este minim.

b) Lungimea diagonalei paralelipipedului.

***

SOLUTII

Ediţia I : 2005

Clasa a V-a

1. a) $S=\left(1+3+3^{2}+3^{3}\right)+\left(3^{4}+3^{5}+3^{6}+3^{7}\right)+...+\left(3^{96}+3^{97}+3^{98}+3^{99}\right)=$

$\left(1+3+3^{2}+3^{3}\right)+...+3^{96}\left(1+3+3^{2}+3^{3}\right)=40\left(1+3^{4}+...+3^{96}\right)\vdots 10$

b) $B=3^{8}\cdot 5^{12}\cdot 7^{9}\cdot 2^{3}\cdot 6^{3}=3^{11}\cdot 7^{9}\cdot 5^{12}\cdot 2^{6}=\overline{...9000000}$

2. $u\left(2005^{2005}\right)=5$ dar $u\left(2008^{n}+2006\right)\neq 5$.

3. a) $(a+b)(a-b)=(10x+7+5x+2)(10x+7-5x-2)=$

$=(15x+9)(5x+5)=15(5x+3)(x+1)\vdots 15$

b) $10x+7=2(5x+2)+3$.

4. $A=\left\{\frac{100}{112},\frac{100}{113},\frac{100}{114}\right\}$ şi $B=\left\{\frac{100}{115},\frac{100}{116},\frac{100}{117},\frac{100}{118}\right\}$

Clasa a VI-a

1. a) $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2},\ \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}\Rightarrow A=n^{2}$

b) $x=\frac{3y+10z}{2}\Rightarrow y\vdots 2,\ y=\frac{10z-2x}{3}=\frac{(9z-3x)+(z+x)}{3}\Rightarrow z+x\vdots 3\Rightarrow y(x+z)\vdots 6$

2. $\frac{2x+1}{3}=\frac{3x+1-x}{3}=x+\frac{1-x}{3}\Rightarrow x-1=M_{3}\cdot\frac{3x+1}{4}=\frac{4x+1-x}{4}=$

$x+\frac{1-x}{4}\Rightarrow x-1=M_{4}\cdot x-1=M_{12}\Rightarrow x=M_{12}+1$

3. $\frac{\hat{A}}{2}=\frac{\hat{B}}{3}=\frac{\hat{C}}{4}=\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}{9}=\frac{180^{0}}{9}=20^{0}\Rightarrow\hat{A}=40^{0},\hat{B}=60^{0},\hat{C}=80^{0}$

$\hat{A}\equiv\widehat{C'CA}\Rightarrow\triangle C'AC$ isoscel $\Rightarrow(C'A)=(C'C)$

4. Construim $PP'\,||\,AC,\ P'\in BR.\ PP'\equiv RQ$ şi $PP'\perp BR$

$\triangle PP'R\equiv\triangle RQP(I.U.)\Rightarrow PP'=RQ,\ \triangle BPP'\equiv\triangle PBS(I.U.)\Rightarrow PP'=BS$ $\qquad BS=RQ\Rightarrow\frac{BS}{RQ}=1$

Clasa a VII-a

1. $x^2 = 5k + r, \forall x \in \mathbb{N}$ şi $r \in \{0,1,4\}$. Conform principiului lui Dirichlet cel puţin două dintre oricare patru pătrate dau acelaşi rest. $5 | a^2 - b^2 \Rightarrow 5 | (a+b)(a-b)$;
5 prim $\Rightarrow 5 | a+b$ sau $\Rightarrow 5 | a-b$.

2. a) $23 | y, y \le 68 \Rightarrow y \in \{0,23,46\} \Rightarrow (x,y) \in \{(205,0),(182,23),(113,43)\}$
b) $x \in \{2,3\}$ nu convine. $4 | y^2$ şi $9 | y^2 \Rightarrow 36 | y^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow y^2 \in \{36\cdot 1^2, 36\cdot 2^2, 36\cdot 3^2, 36\cdot 4^2, 36\cdot 5^2, 36\cdot 6^2, 36\cdot 7^2\} \Rightarrow x = 41,\ y = 18$

3. Aplicăm T. Lui Menelaus în $\triangle CDN$ cu
$A-P-Q: \frac{QD}{QC}\cdot\frac{PC}{PN}\cdot\frac{AN}{AD} = 1 \Rightarrow \frac{QD}{QC} = 2\cdot\frac{PN}{PC}$
$\triangle ADM \equiv \triangle CDN \Rightarrow \sphericalangle DNC \equiv \sphericalangle DMA \equiv \sphericalangle MDC (a.i) \Rightarrow m(\sphericalangle DPC) = 90^0$
$\triangle CDN \xrightarrow{T\ Catetei} DC^2 = PC\cdot CN,\ DN^2 = PN\cdot CN \Rightarrow \frac{PN}{PC} = \frac{1}{4}$. Deci $\frac{QD}{QC} = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

4. Fie Q mijlocul lui PC. MQ linie mijlocie în $\triangle PBC \Rightarrow MQ \parallel BP \Rightarrow MQ \perp AN$. NQ linie mijlocie în $\triangle PMC$, N ortocentrul $\triangle AMQ \Rightarrow NQ \perp AM$. $BC \perp AM \Rightarrow \triangle ABC$ isoscel.

Clasa a VIII-a

1. a) $E(x,y) = (x+2)(y+2) - 2$ a) $E(x,y) = -2 \Rightarrow x = -2, y \in \mathbb{R}$ sau $y = -2, x \in \mathbb{R}$
c) $x = \frac{1}{2}$ şi $y = 2n - \frac{8}{5}, n \in \mathbb{N}$.

2. $(x+y+1)^2 + 4(y-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$

3. Grupând câte doi factori, ecuaţia se scrie:
$(n^2+7n+6)\cdot(n^2+7n+10)(n^2+7n+12) = (m+1)(m+2)(m+3)$
Fie $p = n^2 + 7n + 5, n \in \mathbb{N}, p \ge 5 \Rightarrow (p+1)(p+5)(p+7) = (m+1)(m+2)(m+3)$ (1)
Dacă $m \ge p+4 \Rightarrow m+1 \ge p+5, m+2 \ge p+6, m+3 \ge p+7 \Rightarrow$
Ecuaţia (1) nu are soluţii.
Analog $m \le p \Rightarrow$ ecuaţia (1) nu are soluţii.
Pentru m=p+1 ecuaţia (1) nu are soluţii.
Pentru m=p+2 $\Rightarrow$p=5, n=0 şi m=7.
Pentru m=p+3 ecuaţia (1) nu are soluţii.

4. Fie $DM \cap BC = \{Q'\}$. Se arată că Q' este mijlocul lui BC. $QQ' \perp (ABC), QM \perp PC$.

Ediţia a II-a : 2006

Clasa a V-a

1. *a)* $A=11^n\left(11^2-1\right)+9^n\left(9^2-1\right)=11^n\cdot 120+9^n\cdot 80=10\cdot\left(11^n\cdot 12+9^n\cdot 8\right)$

b) $u(x)\in\{2,7\};u(y)\in\{3,8\}\Rightarrow A\cap B=\varnothing$.

2.*a)* $4^z<33\Rightarrow z\in\{0,1,2\};\quad z=0\Rightarrow(x,y)\in\{(4,4)\},\ \ z=1$ *imposibil*, $z=2\Rightarrow(x,y)\in\{(1,4),(4,1)\}$.

b) $\overline{ab}\cdot n=200+\overline{ab}\Rightarrow\overline{ab}(n-1)=200,\ \ n-1\,\text{impar}\Rightarrow(a,b,c)\in\{(5,0,5),(2,5,9)\}$.

3. *Fie n=numărul de paşi.* $3+3^2+3^3+...+3^n=1100-8\Rightarrow 3^{n+1}=2187 \qquad 3^{n+1}=3^7$.

Clasa a VI-a

1. *a)* $7^{40}<3^{80}\Rightarrow\dfrac{x+7^{40}}{x+3^{80}}<1;\,6^{100}>3^{150}\Rightarrow\dfrac{y+6^{100}}{y+3^{150}}>1\Rightarrow a<b$.

b) $\left.\begin{matrix}d\mid 7x+12\\ d\mid 3x+5\end{matrix}\right|\Rightarrow\left.\begin{matrix}d\mid 21x+36\\ d\mid 21x+35\end{matrix}\right|\Rightarrow d\mid 1$.

2. $(b+3)(c+4)=60\Rightarrow c+4\mid 60,\,(a+2)(c+4)=80\Rightarrow c+4\mid 20$

Deci $c+4\mid(60,80)\Rightarrow c+4\mid 20\Rightarrow c+4\in\{1,2,4,5,10,20\}\Rightarrow$

$\Rightarrow c\in\{0,1,6,16\}\Rightarrow(a,b,c)\in\{(18,12,0),(14,9,1),(6,3,6),(2,0,16)\}$

3. *a)* $\triangle OBD$ *isoscel*, $(CD),(AB)$ *mediane* $\Rightarrow CD=AB;$

$E=$ centrul de greutate al $\triangle OBD\Rightarrow AE=\dfrac{AB}{3},CE=\dfrac{CD}{3}\Rightarrow AE=CE$.

b) $AE+CE=\dfrac{AB}{3}+\dfrac{AB}{3}=\dfrac{2AB}{3}=BE$.

Clasa a VII-a

1. *a)* $\sqrt{2x-x^2}=kx,\,k\in\mathbb{Q}\Rightarrow 2x-x^2=k^2x^2\Rightarrow 2-x=k^2x\Rightarrow x=\dfrac{2}{k^2+1}\in\mathbb{Q}$.

b) $3y-6x-9=4xy\Rightarrow 4xy-3y=5x-9\,|\cdot 2\Rightarrow 2y(4x-3)=12x-18\Rightarrow$

$2y(4x-3)=3(4x-3)-9\Rightarrow(4x-3)(2y-3)=-9\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases},\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$

2. *a)* $5^3=25=124+1=M_{31}+1,\,5^{21}=\left(5^3\right)^7=\left(M_{31}+1\right)^7=M_{31}+1$

Analog $6^3=216=217-1=M_{31}-1,\,6^{21}=\left(6^3\right)^7=\left(M_{31}-1\right)^7=M_{31}-1$.

Deci, $5^{21}+6^{21}=M_{31}+1+M_{31}-1=M_{31};\,5^{32}=5^2\left(5^3\right)^{10}=5^2\left(M_{31}+1\right)^{10}=$

$=5^2\left(M_{31}+1\right)=M_{31}+25,\,6^{31}=6\left(6^3\right)^{10}=6\left(M_{31}-1\right)^{10}=6\left(M_{31}+1\right)=M_{31}+6.$

Deci, $5^{32}+6^{31}=M_{31}+25+M_{31}+6=M_{31}$.

b) $xyz+xy+xz+yz+x+z+y+1=(x+1)(y+1)(z+1)=0\Rightarrow x=-1,$

$y,z\in\mathbb{R}$ *sau* $y=-1,x,z\in\mathbb{R}$ *sau* $z=-1,x,y\in\mathbb{R}$.

3. *Consider* $\triangle ABC,\,m(\sphericalangle A)=90^0,\,AB=c,\,AC=b\Rightarrow BC=\sqrt{b^2+c^2}$.

Dacă $m(\sphericalangle B)>m(\sphericalangle C)\Rightarrow$ *ordinea punctelor* B,A,M. *Notăm* $AM=x\Rightarrow$

$BM=BA+AM=c+x.\,\triangle MAC\left(m(\sphericalangle A)=90^0\right)\Rightarrow CM^2=b^2+x^2\Rightarrow CM=\sqrt{b^2+x^2}$.

Dar $MB=CM\Rightarrow c+x=\sqrt{b^2+x^2}\Rightarrow c^2+2cx+x^2=b^2+x^2\Rightarrow x=AM=\dfrac{b^2-c^2}{2c}$.

$$Dar,\ MC^2=b^2+x^2=b^2+\frac{\left(b^2-c^2\right)^2}{4c^2}=\frac{\left(b^2+c^2\right)^2}{4c^2}\Rightarrow MC^2=\frac{b^2+c^2}{2c}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{AM}{CM}=\frac{\frac{b^2-c^2}{2c}}{\frac{b^2+c^2}{2c}}=\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}.\ Dar,\left|1-2\cdot\left(\frac{AC}{BC}\right)^2\right|=\left|1-2\cdot\frac{b^2}{b^2+c^2}\right|=\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2},$$

deoarece $b>c$. *Analog*, $M\in(AB)$

Clasa a VIII-a

1. $a+\frac{1}{a}\geq 2,\ 2b^2+\frac{2}{b^2}\geq 2\cdot 2,\ 3c^3+\frac{3}{c^3}\geq 2\cdot 3,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*,\Rightarrow$

$a+2b^2+3c^3+\frac{1}{a}+\frac{2}{b^2}+\frac{3}{c^3}\geq 12\Rightarrow a+\frac{1}{a}=2\Rightarrow a=1,\ 2b^2+\frac{2}{b^2}\geq 4\Rightarrow$

$b=1,\ 3c^3+\frac{3}{c^3}=6\Rightarrow c=1.$

2. *a)* $\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4},\ \frac{2}{3^3}<\frac{1}{3\cdot 4},\ \frac{3}{4^4}<\frac{1}{4\cdot 5},\ldots,\ \frac{2005}{2006^{2006}}<\frac{1}{2005\cdot 2006}$, *pentru că*

$\frac{n}{(n+1)^{n+1}}<\frac{1}{n(n+1)}\Rightarrow\frac{1}{2^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{4^4}+\ldots+\frac{2005}{2006^{2006}}<\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{4}}+$

$\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\frac{1}{5}}+\ldots+\cancel{\frac{1}{2005}}-\frac{1}{2006}=\frac{7}{12}-\frac{1}{2006}<\frac{7}{12}<\frac{3}{4}.$

b) *Fie* $f(x)=ax+b\Rightarrow f(x+1)=ax+a+b,\ f(2x+1)=2ax+a+b,$

$f(2x-3)=2ax-3a+b\Rightarrow 3ax+3a+3b+2ax+a+b-6ax+9a-3b=$

$-2x+27\Rightarrow -ax+13a+b=-2x+27\Rightarrow -a=-2\Rightarrow a=2,13\cdot 2+b=$

$27\Rightarrow b=1\Rightarrow f(x)=2x+1.$

3. *a)* $SA\cap(BKC)=K,\ KM\perp BC,\ M$ *mijlocul lui* $BC,\ KM\perp SA,$

$MA=9,\ KM=\frac{36}{5}.$ *b)* $AB=6\sqrt{3}\Rightarrow A_{\triangle KBC}=\frac{108\sqrt{3}}{5}.$

Ediţia a III-a : 2007

Clasa a V-a

1. a) $\frac{M\cdot A\cdot T\cdot E\cdot M\cdot A\cdot T\cdot I\cdot C\cdot A}{C\cdot O\cdot M\cdot A\cdot N\cdot E\cdot S\cdot T\cdot I}=\frac{MATA}{ONS}$

Val. min. $=\frac{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{7\cdot 8\cdot 9}=\frac{1}{84}$ Val. max. $=\frac{9\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}=756$ b) $3+3^2+3^3=39$

$3+3^2+3^3+3^4=120$. Deci vom grupa câte 5, dar ţinând cont de condiţia restului, primul termen îl lasăm singur ... $A=3+121\cdot s\xrightarrow{T.I.R.}r=3$

2. $\frac{10x+y}{10y+z}=\frac{x}{z}\Leftrightarrow 10xz+yz=10xy+xz\,|-xz\Leftrightarrow 9xz+yz=10xy\Leftrightarrow z(9x+y)=10xy$

$x=1\Rightarrow y=6\Rightarrow z=4$ $\qquad$ $x=2\Rightarrow z=5\Rightarrow y=6$

3. a) $3\,|\,\overline{ab3}\Rightarrow 3\,|\,a+b+3\Rightarrow 3\,|\,a+b\Leftrightarrow 3\,|\,\overline{ab}\Rightarrow 30$ numere $\Rightarrow 12,15,\ldots,99$.

b) $1=1$ (A) $\quad 1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3=9$ (A) $\quad 1!+2!+3!+4!=33\; 1!+2!+3!+4!+\underbrace{5!}_{\substack{ultima\\ cifra\,0}}\ldots=\ldots 3$

Pentru $\quad n\geq 5\Rightarrow U(a)=3\Rightarrow\neq K^2$

Clasa a VI-a

1. a) $a-b=\dfrac{a+b}{4}\Rightarrow 3a=5b$ Cum $\begin{matrix}3|5b\\5|3a\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}3|b\\5|a\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}a=5\\b=3\end{matrix}$

b) $a-b+a\cdot b=2002\;(a-1)(b+1)=2001$

$$S=\{(2002,0);(668,2);(88,22),(70,28),(30,68);(24,86);(4,666);(2,2000)\}$$

2. $E=\dfrac{x+2+y+5}{(x+2)(y+5)}=\dfrac{1}{y+5}+\dfrac{1}{x+2}\;\begin{matrix}x+2=k\\y+5=-k\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}x=k-2\\y=-k-5\end{matrix},\;k\in\mathbb{N}$

3. a) $\triangle ABD\Rightarrow m(\sphericalangle BAD)=30^\circ\;\dfrac{m(\sphericalangle DAB)}{3}=\dfrac{m(\sphericalangle DAC)}{4,5}\Leftrightarrow\dfrac{30}{3}=\dfrac{m(\sphericalangle DAC)}{4,5}$

$\left.\begin{matrix}m(\sphericalangle DAC)=45^\circ\\m(\sphericalangle BAE)=75^\circ\end{matrix}\right\}\Rightarrow\triangle BAE\Rightarrow m(\sphericalangle AEB)=75^\circ\Rightarrow\triangle ABE$ isoscel $\xrightarrow{def}(AB)\equiv(BE)$

b) $\triangle BFA$ isoscel, MF mediană $\Rightarrow MF$ înălţime $\Rightarrow MF\perp AB$

c) MD mediatoarea lui $BF\Rightarrow MD\perp BE$ dar $BE\not\perp AC\Rightarrow MD\not\parallel AC$

Clasa a VII-a

1. a) $\sqrt{4+\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{31}}<4|2\Leftrightarrow\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{31}<12$

<2 $\quad$ <4 $\quad$ <6 $\quad$ (Adevărat)

b) $\left(x^2+10x+34\right)\left(y^2-6y+232\right)=2007\Leftrightarrow\underbrace{\left[(x+5)^2+9\right]}_{\geq 9}\cdot\underbrace{\left[(y-3)^2+223\right]}_{\geq 223}=2007$

$\Rightarrow\begin{matrix}(x+5)^2=0\\(y-3)^2=0\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}x=-5\\y=3\end{matrix}$

2.a) $10^{2006}-10^{2005}=9\cdot 10^{2005}=90\cdot 10^{2004}=\left(2^2+3^2+4^2+5^2+6^2\right)\cdot\left(10^{1002}\right)^2$

b) $\left(a+a+1\right)^2=4a^2+4a+1=\left(2a^2+2a\right)+\left(2a^2+2a+1\right)$

3.Fie $AD\perp BC$ şi E,F,G intersecţiile: $AD\cap CM=\{F\};BM\cap AD=\{E\};BM\cap AC=\{G\}$

$\Rightarrow\triangle EGC\equiv\triangle EFC\Rightarrow(EG)\equiv(EF)\Rightarrow\triangle EGA\equiv\triangle EFM$

$(EA)\equiv(EM)\xrightarrow{def}\triangle AEM$ isoscel cu $m(\sphericalangle AEM)=120^\circ$ ceea ce conduce la $m(\sphericalangle MAE)=15^\circ$

$m(\sphericalangle BAM)=15^\circ$, adică $\triangle AMB$ isoscel şi apoi $\triangle AMC$ isoscel

Clasa a VIII-a

1. a) $a_n=\cdots=5\cdot(n+2)^2+10\;a_n\in(1024,2048)\Leftrightarrow\dfrac{1014}{5}<(n+2)^2<\dfrac{2038}{5}\Leftrightarrow$

$\sqrt{202,8}<n+2<\sqrt{407,6}\Leftrightarrow n\in\{13,14,15,16,17,18\}$

b) $x=2007^4+2\cdot(2007-1)^2+4\cdot 2007-1=2007^4+2\cdot 2007^2+1=(2007^2+1)^2$

2.a) $\left(\frac{1}{a^2c^2}-\frac{2}{abcd}+\frac{1}{b^2d^2}\right)+\left(\frac{1}{a^2d^2}-\frac{2}{abcd}+\frac{1}{c^2d^2}\right)+\left(\frac{1}{a^2b^2}-\frac{2}{abcd}+\frac{1}{c^2d^2}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{ac}-\frac{1}{bd}\right)^2+\left(\frac{1}{ad}-\frac{1}{bc}\right)^2+\left(\frac{1}{ab}-\frac{1}{cd}\right)^2=0$

$ac=bd\ \ ad=bc\ \ ad=cd$

Din $\left.\begin{matrix}ac=bd\\ ad=bc\end{matrix}\right|\Rightarrow a^2cd=b^2cd\Leftrightarrow a^2=b^2\Leftrightarrow |a|=|b|$

Analog $|a|=|c|$ şi $|a|=|d|\Rightarrow$ concluzia

b) $\Leftrightarrow\ \frac{1}{4}\cdot\frac{6-2}{2\cdot4\cdot6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{8-4}{4\cdot6\cdot8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{10-6}{6\cdot8\cdot10}+...+\frac{1}{4}\cdot\frac{(2n+2)-(2n-2)}{(2n-2)\cdot2n\cdot(2n+2)}>\frac{1}{36}$

$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot4}-\cancel{\frac{1}{4\cdot6}}+\cancel{\frac{1}{4\cdot6}}-\cancel{\frac{1}{6\cdot8}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{(2n-2)\cdot2n}}-\frac{1}{2n\cdot(2n+2)}\right)>\frac{1}{36}$

$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4n\cdot(n+1)}\right)>\frac{1}{36}\Big|\cdot4\Leftrightarrow\frac{1}{8}-\frac{1}{9}>\frac{1}{4n\cdot(n+1)}\Leftrightarrow n\cdot(n+1)>18\Leftrightarrow n\geq4,\ n\in\mathbb{N}$

3.a) Fie $A'E II BC'$ astfel încât $E-A-D\Rightarrow m\sphericalangle(A'C;BC')=m\sphericalangle(A'C;A'E)\xrightarrow{R.T.P.}\triangle A'CE$ dreptunghic $\Rightarrow m\sphericalangle(A'C;BC')=90^\circ$

b) distanţa este perpendiculara din Q pe A'C, unde $\{Q\}=BC'\cap CB'$ prin calcule obţinem

$d(A'C,BC')=\frac{a\sqrt{6}}{6}$ Observaţie: Distanţa se poate calcule folosind şi volumul tetraedrului.

Ediţia a IV-a : 2008

Clasa a V-a

1. $a=100\cdot6^n$ $b=60\cdot12^n$ i) $3\cdot2^n$ ii) $n=2$ iii) $n=2k, 100=6^2+8^2$ $a=(8\cdot6^k)^2+(6\cdot6^k)^2$

2. a) $A=111\cdot(a+b+c)=3\cdot37\cdot(a+b+c)$

$(a+b+c)\leq27\Rightarrow a+b+c\neq37$, deci A nu este pătrat perfect

b) $x=6c+r, r<6$, **(1)** $x^2=36a+2r$, **(2)**

(2)$\Rightarrow x\ par\xrightarrow{(1)} r$ nr. par, $r\neq0\Rightarrow r\in\{2,4\}$

(1), (2)$\Rightarrow(6c+r)^2=3a+25\Rightarrow r^2-2r\,\vdots\,6\Rightarrow r\neq4$ Pentru r=2, c=3 verifică

3. $\frac{a\cdot(a-b)\cdot100}{21b\cdot(b-3c)}$ ireductibilă $\Rightarrow b\notin\{2,4,5,6,8\}, a\notin\{3,6,7,9\}$, a > b, b > 3c

b = 1, c = 0, $a\in\{2,5\}$ b = 3, c = 0, $a\in\{4,5,8\}$ b = 7, $c\in\{0,2\}$, a = 8

Clasa a VI-a

$$\frac{a+2}{b}=\frac{b+2}{c}=\frac{c+2}{d}=\frac{d-6}{a}=\frac{(a+2)+(b+2)+(c+2)+(d-6)}{a+b+c+d}=1$$

1.a)
deci, d = a + 6, c = a + 4, b = a + 2, $a\in\{1,2,3\}$ de unde A are 3 elemente

b) $x^2+y^2\,\vdots\,3\Rightarrow x\,\vdots\,3$ şi $y\,\vdots\,3$ Avem x = 3a şi y = 3b $\underbrace{9a^2+9b^2}_{\vdots9}=\underbrace{1983}_{nu\ e\ \vdots9}$, deci ecuaţia nu are soluţie

1. a)Multipli de 3 : $3\cdot1,3\cdot2,...,3\cdot669$, avem 669 multipli de 3
Printre ei multipli de 7 : $7\cdot1,7\cdot2,...,7\cdot95$, avem 95 multipli de 7
Deci mulţimea A are 669 – 95 = 574 elemente

b)Elementele mulţimii A sunt de forma:
$(3\cdot 1, 3\cdot 2, ..., 3\cdot 6), (3\cdot 8, 3\cdot 9, ..., 3\cdot 13), \ldots$ grupe de câte 6, în care ultimul număr este de forma $3\cdot(7k-1)$, k = nr. grupei
$289 = 6\cdot 48 + 1$, atunci al 289-lea element al mulţimii A este $3\cdot(7\cdot 48-1)+6 = 1011$
3. $\triangle RAE \equiv \triangle MAE\ (C.C.)$ **(1)**
$\triangle MAF \equiv \triangle SAF\ (C.C.)$ **(2)**
a)(1) $\Rightarrow \sphericalangle RAE \equiv \sphericalangle MAE$
(2) $\Rightarrow \sphericalangle MAF \equiv \sphericalangle SAF$
R, A, S coliniare $\Rightarrow m(\sphericalangle RAS) = 180^\circ \Rightarrow 2\cdot m(\sphericalangle BAC) = 180^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$
b)(1)$\Rightarrow AR = AM$
(2)$\Rightarrow AM = AS \Rightarrow AR = AS \Rightarrow \triangle RAS$ isoscel
$\triangle RAS$ echilateral $\Rightarrow m(\sphericalangle RAS) = 60^\circ \Rightarrow 2\cdot m(\sphericalangle BAC) = 60^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle BAC) = 30^\circ$

Clasa a VII-a

a) Fie $x(x-1)(x+1)(x+2) = t\ \dfrac{t+3}{t+15} = \dfrac{t-6}{t+2} \Rightarrow t = 24$
$(x-1)x(x+1)(x+2) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = (-4)\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot(-1) \Rightarrow x \in \{2, -3\}$
b) Fie $\underbrace{11...1}_{1004} = x$ $A = x\cdot 100...0 + 5x + 1 = x\cdot(9x+1) + 5x + 1 = 9x^2 + 6x + 1 = (3x+1)^2$
2. a) $a\cdot b\cdot c = prim \Rightarrow$ doi factori sunt 1 şi celălalt număr prim
$a = b = 1 \Rightarrow c = 3$ $a = b = 1 \Rightarrow b \in \{3,5\}$ $b = c = 1 \Rightarrow a \in \{2,3\}$ $\overline{abc} \in \{113, 131, 151, 211, 311\}$
b) n număr par .... $n = 2, x = \pm 2$
n număr impar .... $n = 5, x = \pm 88$

3. Fie $TE \perp AB, CD \perp AB, B_1F \perp B$, $\dfrac{S_{ART}}{S_{BB1R}} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot AR\cdot ET}{\frac{1}{2}\cdot BR\cdot B1F}$ $\triangle BB_1R \sim \triangle ATR \Rightarrow$

$$\frac{S_{BB_1R}}{S_{ART}} = \left(\frac{RB}{RA}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{S_{BB_1R}}}{S_{ART}} = \frac{RB}{RA} \text{ Analog } \frac{\sqrt{S_{CC_1T}}}{\sqrt{S_{ART}}} = \frac{TC}{TA} \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{S_{BB_1R}}}{\sqrt{S_{ART}}} = \frac{RB}{RA}\ \frac{\sqrt{S_{CC1T}}}{\sqrt{S_{ART}}} = 1$$
$$\Rightarrow \sqrt{S_{BB_1R}} + \sqrt{S_{CC_1T}} = \sqrt{S_{ART}}$$
b) $$\frac{S_{ABC}}{S_{ART}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CD}{\frac{1}{2}\cdot AR\cdot TE} = \frac{AB}{AR}\cdot\frac{AC}{TA} = \left(1+\frac{RB}{RA}\right)\left(1+\frac{TC}{TA}\right)$$
$$= 2 + \frac{RB}{RA}\cdot\frac{TC}{TA} \le 2 + \left(\frac{\frac{RB}{RA}+\frac{TC}{TA}}{2}\right)^2 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow S_{ART} \ge \frac{9}{4}\cdot S_{ABC}$$

4.Păianjenul *P* poate iscodi, cu diavoleasca sa minte, alţi trei complici de tâlhării, *Q, R, S* aşezaţi simetric lui faţă de *BC*, *CA*, *AB.* Amu, dacă ar plănui să treacă spre musca *M,* peste *BC*, urma sa de pe faţa unsuroasă ar fi taman pe dreapta *QM*, iar distanţa ce ar trebui să o acopere până la pradă ar fi taman cât $|QM|$. Are deci *P* de cercetat, care complice al său, *Q, R* sau *S* este mai aproape de musca *M*. O psiholoagă parşivă *M*, aşezată pe mediatoarea lui *QR*, l-ar arunca pe pizmaşul *P* în dilema: care din complicii săi *Q* sau *R* ar fi mai aproape? Alte două mediatoare, ar întâlni-o pe aceasta, în centrul *H* al cercului împrejmuitor al triunghiului *QRS*. Din prima mediatoare socotită, cea a lui $[QR]$, pe faţa unsuroasă a sticlei *ABC,* ar fi în atenţie doar segmentul $[CH]$. Vicleanul ar putea lua aminte că acest segment face cu *CA*, unghiul pe care îl face *CP* cu *CA*.

Ar fi deci potrivit să zicem ca grecoteii, că este *izogonalul* lui *P*. (Ei ziceau *izo* şi *gonos*, nu ca noi: egal şi unghiuri.)

Semnele ce ni le-ar da careva, că a pornit judecată bună ar fi.

a) Triunghiul de complici *QRS*.

b) Segmentele $[AH],[BH],[CH]$.

c) Centrul *H* al cercului împrejmuitor al triunghiului *QRS*.

Am primi aceste semne, dacă ar fi potrivit povestite în limba lui, sau aşa cum se zice prin cele cărţi de geometrie ale şcolerului. Asta, pentru a nu crede şcolerul acela, că este destul să ai manuale şi să le laşi a fi cercetate, doar de muşte şi păianjeni. Acestora de la urmă, izvodirea manualelor le-ar fi de bun folos: păianjenului cum să ajungă rapid la hrana trebuitoare, muştelor să deprindă vicleşuguri psihologice care să le salveze vieţile.

Zicem deci, că asta nu este o glumă, să râdă cei proşti, ci o problemă serioasă, de viaţă sau de moarte.

Autorul a uitat iar să se semneze

Clasa a VIII-a

1. $x^2=y^2 \Rightarrow y=\pm x$ $y=x$, $1+\dfrac{1}{2x-1}=2 \Leftrightarrow x=1, y=1$, $y=-x$, $\dfrac{1}{2x+1}-1=2 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3}$, $y=\dfrac{1}{3}$

2. a) Fie $\sqrt{x-2007}=a$, $\sqrt{y+2007}=b$, Ecuaţia devine $a+b-1=\dfrac{a^2+b^2}{2}$

$(a-1)^2+(b-1)^2=0 \Leftrightarrow a=b=1$ $x=2008$, $y=-2006$

b) $a^2+4b \geq (a+2)^2$ $b^2-4a \leq (b-2)^2 \Leftrightarrow b=a+1$

3. a) *SO* mediană în $\triangle SAC$ $SA^2+SC^2=2\cdot SO^2+\dfrac{AC^2}{2}$ Analog $SB^2+SD^2=2\cdot SO^2+\dfrac{BD^2}{2}$

$SA^2+SB^2+SC^2+SD^2=4SO^2+AC^2=4SO^2+2a^2$

b)Dacă $VA_2 \perp AS, A_2 \in AS$, atunci $VA\cdot SA_1=SA\cdot VA_2$ avem $SA_1=\dfrac{SA\cdot VA_2}{VA} \geq SA\cdot \sin x$

Analog $SB_1 \geq SD\cdot \sin x$, $SC_1 \geq SC\cdot \sin x$ $SD_1 \geq SD\cdot \sin x$, deci

$SA_1^2+SB_1^2+SC_1^2+SD_1^2 \geq \left(SA^2+SB^2+SC^2+SD^2\right)\cdot \sin x \geq 2a^2\cdot \sin x$

Egalitatea are loc pentru $S=0$

Ediţia a V-a : 2009

Clasa a V-a

1.$U\left(A^2\right)=\{0,1,4,5,6,9\}$ Având 7 numere pătrate perfecte observăm că una din cele 6 cifre se repetă $\Rightarrow$ *U(diferenţei)=0*

2.Demonstraţia se face prin reducere la absurd.

Presupunem $(\exists)$ $d|1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2008+1$ $d|1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2009+1$

Din $d|1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2008+1 \Rightarrow d|1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2009+2009...$

Dar $d|1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2009+1 \Rightarrow d|diferenta \Rightarrow d|2008$, dar $d|1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2008+1 \Rightarrow$

$d|1$, deci $d=1 \Rightarrow$ F ireductibilă

3. a) $\dfrac{77777^3}{22222^3\cdot 8^2}=\dfrac{77777^3}{22222^3\cdot 4^3}=\dfrac{77777^3}{88888^3}<1$ b) $\dfrac{\overline{37ab}}{\overline{3ab7}}>1$ pentru $a=7 \Rightarrow \dfrac{\overline{377b}}{\overline{37b7}} \Rightarrow$

$b\in\{0,1,2,...,6\}$ pentru $a<7$ (A), $\forall b\in\{0,1,2,...,9\}$

Clasa a VI-a

1.a)se foloseşte congruenţa triunghiurilor sau proprietatea mediatoarei prin tranzitivitate $\Rightarrow (OM)\equiv(ON)$ $\xRightarrow{definitie}$ $\triangle OMN$ isoscel b) se foloseşte inegalitatea triunghiurilor

din $\left.\begin{array}{l}\triangle OPM \Rightarrow OM+OP>MP\\ \triangle OPN \Rightarrow ON+OP>PN\end{array}\right\}\Rightarrow$ Din a)$\Rightarrow (OM)\equiv(OP)\equiv(ON)$

După înlocuire şi adunare $\Rightarrow 4\cdot OP>MP+PN\,|:4\Rightarrow OP>\dfrac{MP+PN}{4}$

2.- din transformări şi calcule obţinem $x+y=y+z=x+z\Rightarrow x=y=z$

- reciproc considerăm $x=y=z=t\Rightarrow$egalitatea (A)

3.- egalăm primul raport cu celelalte rapoarte

- obţinem $y=2x$; $z=3x$; $t=4x\Rightarrow x\le 9\Rightarrow x=2\Rightarrow y=4,\ z=6,\ t=8\Rightarrow \overline{xyzt}=2468$

Clasa a VII-a

1.Fie $x^2+x+5=k^2\,|\cdot 4\Rightarrow 4\cdot x^2+4x+1+19=4k^2$

$\Rightarrow(2k)^2-(2x+1)^2=19\Leftrightarrow(2k+2x+1)(2k-2x-1)=19\Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}2k+2x+1=19\\ 2k-2x-1=1\end{array}\right|\xRightarrow{+} 4k=20\Rightarrow k=5,\ x=4$

a) $2n+1=(n+1)^2-n^2$ $2009=2\cdot 1004+1=1005^2-1004^2$ Presupunem $2010=a^2-b^2\Rightarrow 2$ cazuri:

i) $\left.\begin{array}{l}a=2k\\ b=2p\end{array}\right|\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a^2=4k^2\\ b^2=4p^2\end{array}\right|\Rightarrow a^2-b^2\,\vdots\,4$ ii) $\left.\begin{array}{l}a=2k+1\\ b=2p+1\end{array}\right|\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a^2=(2k+1)^2\\ b^2=(2p+1)^2\end{array}\right|\Rightarrow a^2-b^2\,\vdots\,4$

Dar $2010\not\vdots\,4\Rightarrow 2010=a^2-b^2$ (Fals)

b) Se ştie că $(a+b)^n=M_a+b^n$ Deci $\left.\begin{array}{l}37^x=(36+1)^x=M_3+1\\ 13^y=(12+1)^x=M_3+1\end{array}\right\}\Rightarrow 37^x-13^y=M_3$

3. Se calculează aria trapezului în funcţie de *a* şi baza mică. $AD=2a\sqrt{3}$

$$A_{ABCD}=\frac{(2x+2x+2a)\cdot 2a\sqrt{3}}{2}=(4x+2a)\cdot a\sqrt{3}$$

Clasa a VIII-a

a) Efectuăm calculul $\Rightarrow \dfrac{n(n+1)}{2}-\dfrac{n}{4}=\dfrac{n(2n+1)}{4}$

b) Ținând cont de a) $\Rightarrow$

$\sqrt{x_1-1}+\sqrt{x_2-2}+...+\sqrt{x_n-n}+\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(2-\frac{1}{4}\right)+...+\left(n-\frac{1}{4}\right)=x_1+x_2+...+x_n$ sau

$\left(\sqrt{x_1-1}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{x_2-2}-\frac{1}{2}\right)^2+...+\left(\sqrt{x_n-n}-\frac{1}{2}\right)^2=0$ obţinem $x_1=\dfrac{5}{4},\ x_2=\dfrac{9}{4},\ \ldots,\ x_n=\dfrac{4n+1}{4}$.

2. a) în $\triangle ABO$ aplicăm teorema cosinusului $\cos A=\dfrac{AO^2+AB^2-BD^2}{2\cdot AO\cdot AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow m(\sphericalangle A)=45^\circ$

b) $m\sphericalangle(AO,(BCB'))=m\sphericalangle(AO,OM)=m\sphericalangle(AOM)$ $tg\sphericalangle(AOM)\xrightarrow{\Delta ABO}\dfrac{AM}{OM}=\dfrac{6\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

c) $(ABC')\cap(B'AC)=AO$ Fie $C'P\perp AO$, calculăm $C'P$ ca înălţimea $\Delta AOC'$ şi obţinem $C'P=6\sqrt{2}$ cm. $B'P$ este înălţimea $\triangle B'AO$, $B'P=6\sqrt{2}$ cm.Unghiul plan asociat diedrului este $B'PC'$ $\triangle PC'B'$ este dreptunghic în A, deci unghiul căutat este de 90^0

3. a) $xy+1>x+y \Leftrightarrow x(y-1)-(y-1)>0 \Leftrightarrow (y-1)\cdot(x-1)>0$ (A)

b) din $x,y\in(0,1)\Rightarrow x\cdot y\in(0,1)$în relaţia a) înlocuim *x* cu xy şi *y* cu *z* şi obţinem

$$\left.\begin{array}{l} xyz+1>xy+z \\ xy+1>x+y \end{array}\right| \xrightarrow{+} xyz+2>x+y+2$$

Ediţia a VI-a : 2010

Clasa a V-a

1. a) $n=4\cdot\underbrace{111...11}_{n}\cdot10^n+4\cdot\underbrace{111...11}_{n}-8\cdot\underbrace{111...11}_{n}$ Notăm $\underbrace{111...11}_{n}=x.$ $10^n=\underbrace{999...99}_{n}+1=9x+1.$

$n=4x(9x+1)+4x-8x=36x^2+4x+4x-8x=36x^2$; $n=(6x)^2=\underbrace{666\cdots66}_{n}{}^2$

b) $7=16-9=4^2-3^2$; $7\cdot7^{2010}=4^2\cdot7^{2010}-3^2\cdot7^{2010}$

$7^{2011}=4^2\cdot(7^{1005})^2-3^2\cdot(7^{1005})^2=(4\cdot7^{1005})^2-(3\cdot7^{1005})^2$

2. a) Fie *a* şi *b* cele două numere naturale. Dacă $a=b$, atunci $a-a=0$ şi $a:a=1$, fals. Deci $a>b$ şi avem $a-b=\frac{a}{b}$, de unde $b|a$ şi $a=b\cdot c$ cu $c\in\mathbb{N}^*$. Deci $bc-b=c$ sau $b(c-1)=c$, de unde $c\geq2$. Din $b(c-1)=c$ rezultă că $b=\frac{c}{c-1}=\frac{c-1}{c-1}+\frac{1}{c-1}\leq2$ $b=1$ conduce la $c-1=c$, contradicţie. $b=2$ conduce la $2c-2=c$, de unde $c=2$. Deci $a=4$ şi $b=2$

b) Cea mai mică valoare a lui *v* este $1\cdot2\cdot4\cdot7=56$. Mai putem avea: $v=1\cdot2\cdot4\cdot8=64$, $v=1\cdot2\cdot4\cdot9=72$, $v=1\cdot2\cdot4\cdot10=80$ etc, fals pentru că $v<64$ Deci bunicul are 56 de ani, iar cei patru nepoţi au un an, 2 ani, 4 ani şi 7 ani

3.S-au tras în total $18\cdot10=180$ de lovituri . Au nimerit ţinta $180-40=140$ de lovituri. În primul şi al treilea cerc au intrat $140-40=100$ de lovituri ; obţinându-se $920-40\cdot6=680$ de puncte
Dacă toate cele 100 de lovituri ar fi nimerit în primul cerc s-ar fi obţinut $100\cdot10=1000$ de puncte. S-au obţinut astfel în plus $1000-680=320$ de puncte. Diferenţa de punctaj dintr-o lovitură în primul cerc şi una în al treilea cerc este de 8 puncte. Deci au fost $320:8=40$ de lovituri în cercul al treilea şi 60 de lovituri în primul cerc.

Clasaa VI-a

1. a) i) $a_1=3=3+4\cdot0$; $a_2=7=3+4\cdot1$; $a_3=11=3+4\cdot2$; $a_4=15=3+4\cdot3$; ...; $a_{58}=231=3+4\cdot57$, deci $231\in A$ ii) $a_{100}=3+4\cdot99=399$

b) Fie *p* numărul numerelor scrise pe un rând. Numărul 100 se află pe rândul din mijloc, conduce la concluzia că numărul rândurilor este impar (egal cu $2n+1, n\in\mathbb{N}^*$). De la numărul 101 (inclusiv) la 193 (inclusiv) se află 193-100=93 de numere
Deci $n\cdot p=93$, de unde $n\in\{1,3,31,93\}$
Dacă $n=1$, atunci $p=93$ şi în tabel sunt $93\cdot3=279$ de numere
Dacă $n=31$, atunci $p=3$ şi în tabel sunt $63\cdot3=189$ de numere, imposibil, pentru că $189<193$.
Dacă $n=93$, atunci $p=1$ şi în tabel sunt $187\cdot1=187$ de numere, imposibil, pentru că $187<193$...
Prin urmare, în tabel sunt scrise 279 sau 217 de numere.

2. Avem $\overline{abcd}=6\cdot\overline{bcd}+\overline{acd}$, unde $\overline{bcd}>\overline{acd}$. (1)

Deci $1000a+\overline{bcd}=6\cdot\overline{bcd}+100a+\overline{cd}$ sau $900a=5\cdot\overline{bcd}+\overline{cd}$. (2)
Cum $5|900a$ şi $5|5\cdot\overline{bcd}$, din (2) rezultă că $5|\overline{cd}$, adică $d\in\{0;5\}$

Cazul $d=0$ implică $900a=5\cdot\overline{bc0}+\overline{c0}$, de unde $90a=5\cdot\overline{bc}+c$. Deci $c\in\{0;5\}$.
$c=0$ conduce în (1) la $\overline{ab00}=6\cdot\overline{b00}+\overline{a00}$ sau $\overline{ab}=6b+a$, de unde $9a=5b$. Din *a, b* cifre şi $(9,5)=1$, conduce la $a=5$ şi $b=9$. Numărul 5900 este soluţie
Cazul $c=5$ conduce la $900a=5\cdot\overline{b50}+50$ în (2) sau $90a=5\cdot\overline{b5}+5$ sau $18a=10b+6$ sau $9a=5b+3$, de unde $a=2$ şi $b=3$. Numărul 2350 este soluţie
Cazul $d=5$. Din (2) se obţine $900a=5\cdot\overline{bc5}+\overline{c5}$ sau $90a=50b+6c+3$, de unde $2|3$, fals

Prin urmare, $\overline{abcd}\in\{5900,2350\}$.
3. Arătăm că oricare ar fi poziţia semidreptelor (OC şi (OB avem relaţia
$m(\sphericalangle MON)=\frac{1}{2}\cdot\left[m(\sphericalangle AOC)+m(\sphericalangle BOD)\right]$.
Cazul I: $(OB\subset Int(\sphericalangle AOC)$. $m(\sphericalangle MON)=m(\sphericalangle MOB)+m(\sphericalangle BOC)+m(\sphericalangle CON)=$
$=\left[\frac{1}{2}m(\sphericalangle AOB)+\frac{1}{2}m(\sphericalangle BOC)\right]+\left[\frac{1}{2}m(\sphericalangle BOC)+\frac{1}{2}m(\sphericalangle COD)\right]==\frac{1}{2}\left[m(\sphericalangle AOC)+(\sphericalangle BOD)\right]$

Deci $68^\circ=\frac{1}{2}\cdot 90^\circ+\frac{1}{2}\cdot m(\sphericalangle BOD)$, de unde $m(\sphericalangle BOD)=46^\circ$

Cazul II. $(OB=(OC$. $m(\sphericalangle MON)=\frac{1}{2}\left[m(\sphericalangle AOC)+m(\sphericalangle BOD)\right]$, de unde $m(\sphericalangle BOD)=46^\circ$.

Cazul III. $(OC\subset Int(\sphericalangle AOB)$. $m(\sphericalangle MON)=m(\sphericalangle MOB)+m(\sphericalangle BON)=\frac{m(\sphericalangle AOB)+2\cdot m(\sphericalangle BON)}{2}=$
$=\frac{m(\sphericalangle AOC)+m(\sphericalangle BOC)+m(\sphericalangle BON)+m(\sphericalangle BON)}{2}=\frac{m(\sphericalangle AOC)+m(\sphericalangle CON)+m(\sphericalangle BON)}{2}=$
$=\frac{m(\sphericalangle AOC)+m(\sphericalangle NOD)+m(\sphericalangle BON)}{2}=\frac{m(\sphericalangle AOC)+m(\sphericalangle BOD)}{2}$,
de unde $m(\sphericalangle BOD)=46^\circ$

Clasaa VII-a

1. a) $\sqrt{\overline{ab}}=\sqrt{(b+6)b}$ Avem că $(b+2)^2<b(b+6)<(b+3)^2$
$b(b+6)$ nu este pătrat perfect, deci $\sqrt{\overline{ab}}\notin Q$.
b) $4x^2+y^2+65\le 28|x|+8|y|$ este echivalent cu $4|x|^2+|y|^2-28|x|+49+16-8|y|\le 0$ sau
$(2|x|-7)^2+(|y|-4)^2\le 0$. Deci $2|x|-7=0$ şi $|y|-4=0$, de unde $|x|=\frac{7}{2}$ şi $|y|=4$

Prin urmare, $x\in\left\{-\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right\}$ şi $y\in\{-4;4\}$

2. a) $\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}=\frac{1}{4}$, de unde $6y+4x=3xy$, echivalent cu $6y=x(3y-4)$, atunci
$x=\frac{6y}{3y-4}=\frac{6y-8+8}{3y-4}=2+\frac{8}{3y-4}\in\mathbb{Z}$, rezultă că $3y-4|8$
$3y-4\in\{-8;-4;-2;-1;1;2;4;8\}$, de unde $y\in\{1;2;4\}$ şi $x\in\{-6;6;3\}$.
$(x,y)\in\{(-6;1),(6;2),(3;4)\}$

b) $r=\frac{a^2+7b^2}{b^2}\cdot\frac{b^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2+7b^2}{b^2}:\frac{a^2-b^2}{b^2}=\left(\frac{a^2}{b^2}+7\right):\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)=$

$=\frac{(2\sqrt{2}-1)^2+7}{(2\sqrt{2}-1)^2-1}==\frac{16-4\sqrt{2}}{8-4\sqrt{2}}=\frac{4-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{\left(4-\sqrt{2}\right)\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)}{2^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{8+4\sqrt{2}-2\sqrt{2}-2}{4-2}=3+\sqrt{2}$

3. Notăm $AB=a$ şi $BC=b$ şi fie $AM\perp BC$, $\left(M\in(BC)\right)$. Avem $m\left(\sphericalangle AEB\right)=50^\circ$

$A_{ABE}=\frac{AB\cdot BE\cdot\sin 30^\circ}{2}=\frac{BE\cdot AE\cdot\sin 50^\circ}{2}$, de unde $AB\sin 30^\circ=AE\sin 50^\circ$ (1)

Din $\triangle MAB$, avem $\sin 50^\circ=\frac{b}{2a}$. (2) şi (1) conduc la $AE=\frac{AB\sin 30^\circ}{\sin 50^\circ}=\frac{a^2}{b^2}$

Deci $\frac{AE}{AB}=\frac{a}{b}$ sau $\frac{AE}{AC}=\frac{a}{b}$, dar $\frac{BD}{BC}=\frac{a}{b}$, deci $DE\parallel AB$

Urmează că $m\left(\sphericalangle CDE\right)=m\left(\sphericalangle ABC\right)=40^\circ$

Clasaa VIII-a

1. a) $x^4+1\geq 2x^2$ este echivalentă cu $(x^2-1)^2\geq 0$ (1), $y^4+1\geq 2y^2$ este echivalentă cu $(y^2-1)^2\geq 0$ (2)
Deci $x^4+y^4+x^2+y^2+2\geq(3x^2+y^2)$ (3)
Iar $x^2+y^2\geq 2xy$ este echivalentă cu $(x-y)^2\geq 0$ (4).Prin urmare, $x^4+y^4+x^2+y^2+2\geq 6xy$
Avem egalitate în (4) dacă $=y$, iar în (1) şi (2) dacă $|x|=1$ şi $|y|=1$.
Cum $x^4+y^4+x^2+y^2+2>0$, $\forall x,y\in R$, din $x^4+y^4+x^2+y^2+2=6xy$ rezultă $xy>0$. Deci $(x,y)\in\{(-1;-1),(1,1)\}$.

b) $x^{2001}+\frac{1}{x^{2003}}\geq 2\sqrt{\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{x}$ (1) Arătăm că $\frac{2}{x}\geq\frac{6x^{1000}}{16x^{2002}-5x^{1001}+1}$. (2)

$16x^{2002}-5x^{1001}+1>16x^{2002}-8x^{1001}+1=(4x^{1001}-1)^2\geq 0$.

Deci $\frac{2}{x}\geq\frac{6x^{1000}}{16x^{2002}-5x^{1001}+1}$ este echivalentă cu $16x^{2002}-5x^{1001}+1\geq 3x^{1001}$, adică
$16x^{2002}-8x^{1001}+1\geq 0$, astfel spus $(4x^{1001}-1)^2\geq 0$. (3)
Din (1), (2) şi (3) rezultă inegalitatea dată
În (1) avem egalitatea dacă $x^{2001}=\frac{1}{x^{2003}}$ sau $x^{4004}=1$, de unde
$(x^{2002}-1)(x^{2002}+1)=0$ sau
$(x^{1001}-1)(x^{1001}+1)(x^{2002}+1)=0$ Cum $x^{1001}+1>0$ şi $x^{2002}+1>0$, oricare ar fi $x>0$, avem $x^{1001}-1=0$, de unde $\left(x-1\right)(x^{1000}+x^{999}+\cdots+x+1)=0$, adică $x=1$.
Dar pentru $x=1$ în (3) nu avem egalitate, deci nici în inegalitatea dată nu avem egalitate.

2. $n^4+n^3+n+1=n^3\left(n+1\right)+\left(n+1\right)=\left(n+1\right)\left(n^3+1\right)=\left(n+1\right)^2\left(n^2-n+1\right)$.
Determinăm valorile întregi ale lui *n* pentru care numărul n^2-n+1 este pătrat perfect
Fie $n^2-n+1=k$, $k\in Z$. Avem $4n^2-4n+1+3=(2k)^2$, de unde
$(2n-1)^2-(2k)^2=-3=\left(-3\right)\cdot\left(+1\right)=3\cdot\left(-1\right)$. Se obţine $n\in\{0,1\}$ Deci $n\in\{-1;0;1\}$

3. a) Fie punctele O_1 şi O_2 astfel încât $\{O_1\}=AD'\cap A'D$ şi $\{O_2\}=A'C\cap BD'$.
$O_1O_2\parallel AB$ (linie mijlocie) şi cum $AB\perp\left(ADD'\right)$ rezultă că $O_1O_2\perp\left(ADD'\right)$
Deci $O_1O_2\perp AD'$ şi $O_1O_2\perp A'D$. Dar $\left(ABD'\right)\cap\left(CD'A\right)=O_1O_2$.
Prin urmare, $m\left(\sphericalangle\left(ABD'\right);\left(CDA'\right)\right)=m\left(\sphericalangle A'O_1D'\right)=90^\circ$, adică $\left(ABD'\right)\perp\left(CDA'\right)$

b) Diametrul cercului circumscris $\triangle CC'O'$ este $(O'C)$. Cum $(OC') \equiv (O'C)$ rezultă că şi (OC') este diametrul aceluiaşi cerc, adică $m(\sphericalangle OPC') = 90^\circ$ şi $OP \perp AC'$.

În cub $BD \perp (ACC')$, deci $AC' \perp BD$. Din $AC' \perp BD$ şi $AC' \perp OP$, iar $BD \cap OP = \{O\}$, rezultă că $AC' \perp (PBD)$

$\triangle APO \sim \triangle ACC'$ *(u.u.)*, de unde $\frac{AP}{AC} = \frac{AO}{AC'}$, adică $AP = \frac{10\sqrt{2} \cdot \frac{10\sqrt{2}}{2}}{10\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm

Ediţia a VII-a : 2011

Clasaa V-a

1. Notăm cu $U(n)$ ultima cifră a numărului natural *n*.Avem $U(x^2) \in \{0;1;4;5;6;9\}$ şi $U(x^4) \in \{0;1;5;6\}$ Două elemente *a* şi *b* ale mulţimii *M* au diferenţa divizibilă cu 10 dacă $U(a) = U(b)$Cum $U(x^4) \in \{0;1;5;6\}$ (pentru valori distincte posibile), conform principiului cutiei, dintre 5 elemente ale mulţimii M, cel puţin doua satisfac condiţia dată.Numărul minim este 5.

2. Notăm cu $U(n)$ ultima cifră a numărului natural *n*.

$U(3^{4k} + 6^{4k} + 7^{4k} + 8^{4k}) = U(3^{4k}) + U(6^{4k}) + U(7^{4k}) + U(8^{4k}) =$
$= U(3^4 + 6^4 + 7^4 + 8^4) = U(1+6+1+6) = U(14) = 4$, unde $k \in \mathbb{N}$.

$U(3^{4k+1} + 6^{4k+1} + 7^{4k+1} + 8^{4k+1}) = U(3^1) + U(6^1) + U(7^1) + U(8^1) = U(24) = 4$, $k \in \mathbb{N}$

$U(3^{4k+2} + 6^{4k+2} + 7^{4k+2} + 8^{4k+2}) = U(3^2) + U(6^2) + U(7^2) + U(8^2) = U(9+6+9+4) = U(28) = 8$,

$U(3^{4k+3} + 6^{4k+3} + 7^{4k+3} + 8^{4k+3}) = U(3^3) + U(6^3) + U(7^3) + U(8^3) = U(7+6+3+2) = U(18) = 8$

$U(N) = U(502 \cdot 4 + 503 \cdot 4 + 503 \cdot 8 + 503 \cdot 8) = U(8+2+4+4) = U(18) = 8$. $\qquad k \in \mathbb{N}$

Soluţie alternativă:

$N = (3+6+7+8) + (3^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2) + ... + (3^{2011} + 6^{2011} + 7^{2011} + 8^{2011}) \Rightarrow$

$= 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{2011} = 3(1 + 3^1 + 3^2 + 3^3) + 3^5(1 + 3^1 + 3^2 + 3^3) + \cdots + 3^{2005}(1 + 3^1 + 3^2 + 3^3) +$

$+3^{2009} + 3^{2010} + 3^{2011} = M_{40} + 3^{2009} + 3^{2010} + 3^{2011}$.

$U(3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{2011}) = U(3^{2009} + 3^{2010} + 3^{2011}) = U(3^1 + 3^2 + 3^3) = U(39) = 9$ etc.

3. *n* este pătrat perfect dacă $n = 29 \cdot 29k^2 = 841k^2$, unde $k \in IN^*$.

$n = 841k^2$ şi $841k^2 < 10000 \Rightarrow k^2 \leq 11$, deci $k \in \{1;2;3\}$. $4 \mid \overline{abc} \Rightarrow c \in \{0;2;4;6;8\}$.

$k = 1 \Rightarrow a + b^2 + c^4 = 29$, de unde $c \leq 2$, adică $c \in \{0;2\}$.

$c = 0 \Rightarrow a + b^2 = 29$, de unde $b = 5$ şi $a = 4$.

$c = 2 \Rightarrow a + b^2 = 13$, de unde $a = 9$ şi $b = 2$ sau $a = 4$ şi $b = 3$.

$k = 2 \Rightarrow a + b^2 + c^4 = 29 \cdot 4 = 116$, de unde $c \leq 3$, deci $c \in \{0;2\}$.

$c = 0 \Rightarrow a + b^2 = 116$, fals, pentru că $b^2 + a \leq 90$.

$c = 2 \Rightarrow a + b^2 = 100$, fals, pentru că $b^2 + a \leq 90$.

$k = 3 \Rightarrow a + b^2 + c^4 = 29 \cdot 9 = 261$, de unde $c \leq 4$, deci $c \in \{0;2;4\}$.

$c \in \{0;2\}$ conduce la $a + b^2 \geq 245$, fals.

$c = 4 \Rightarrow a + b^2 = 261 - 256 = 5$, de unde $a = 1$ şi $b = 2$ sau $a = 4$ şi $b = 1$ sau $a = 5$ şi $b = 0$.

Deci $\overline{abc} \in \{450;432;124;414;504;922\}$. Însă numai numerele 432; 124 şi 504 se divid cu 4.

Numerele $\overline{abc}$ căutate sunt: 432, 124 şi 504.

4. a) Toate numerele reprezentate de cifrele numerelor trebuie să fie divizori ai lui 6, adică 1, 2, 3 sau 6. Numerele pot avea:

- O cifră de 6 şi 2010 cifre de 1, adică 2011 numere
- O cifră de 2, o cifră de 3 şi 2009 cifre de 1, adică $2011 \cdot 2010$ numere

(cifra 2 poate ocupa oricare din cele 2011 poziţii, iar cifra 3 oricare din cele 2010 rămase)
- În total sunt: $2011+2011\cdot 2010=2011^2=4044121$ de numere.
b) $10^{a-1}<2^{2011}<10^a$ şi $10^{b-1}<5^{2011}<10^b$ .de unde $10^{a+b-2}<10^{2011}<10^{a+b}$.
Deci $a+b-1=2011$, de unde $a+b=2012$.

Clasaa VI-a

1. $N=\underbrace{5656...56}_{22\ cifre}=56\cdot\underbrace{10101...101}_{21\ cifre}=7\cdot 2^3\cdot\underbrace{10101...101}_{21\ cifre}$

Exponentul lui 2 din descompunerea în factori primi ai lui *N* este impar, deci *N* nu este pătrat perfect (sau exponentul lui 7 este impar).

b) $\overline{xy}+\overline{yx}=55$ conduce la $x+y=5$. Cum $x\neq 0$ şi $y\neq 0$ rezultă că $\overline{xy}\in\{14,41,23,32\}$.
$\overline{xy}=14$ conduce la $n(n+1)=2\cdot 492=2^3\cdot 3\cdot 41$, nu convine.
$\overline{xy}=23$ conduce la $n(n+1)=2\cdot 483=2\cdot 3\cdot 7\cdot 23$, nu convine.
$\overline{xy}=32$ conduce la $n(n+1)=2\cdot 474=2^3\cdot 3\cdot 79$, nu convine.
$\overline{xy}=41$ conduce la $n(n+1)=2\cdot 465=2\cdot 3\cdot 5\cdot 31=30\cdot 31$, de unde $n=30$, soluţie.Deci $n=30$.

2. $x=1\Rightarrow 506=y^2=M_4+2$ - nu este soluţie; $x=2\Rightarrow 507=y^2=U(y^7)=7$ - nu este soluţie;
$x=3\Rightarrow 511=y^2=M_4+3$ - nu este soluţie; $x=4\Rightarrow 529=y^2$, de unde $y=23$, soluţie;
$x=5\Rightarrow 625=y^2$, de unde $y=25$, soluţie; $x=6\Rightarrow 1225=y^2$, de unde $y=35$, soluţie;
$x=7\Rightarrow 5545=y^2$, $5|5545$ dar $25\nmid 5545$ - nu este soluţie;
$x=8\Rightarrow y^2=40825=1633\cdot 5^2$, dar $U(1633)=3$ - nu este soluţie;
$x=9\Rightarrow y^2=363385$; $5|y^2$ dar $25\nmid y^2$- nu este soluţie;
$x\geq 10\Rightarrow x!+505=y^2$; $5|x!+505$,dar $25\nmid x!+505$ - nu se obţin soluţii;
Deci $(x,y)\in\{(4;23);(5;25);(6;35)\}$.

3. a) Produsul tuturor elementelor lui A este $P=2^{11}\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13$.
Pentru a extrage cel mai mic număr de elemente din A astfel încât produsul numerelor rămase să fie pătrat perfect trebuie să eliminăm câte un factor prin din P care are exponentul impar, adică pe 2, 5, 11 şi 13.
b)Se observă că: $2\cdot 14=4\cdot 7$; $3\cdot 5=1\cdot 15$; $8\cdot 9=6\cdot 12$; $2\cdot 3=1\cdot 6$; $3\cdot 8=4\cdot 6$; $3\cdot 14=6\cdot 7$; $2\cdot 3\cdot 8=1\cdot 4\cdot 12$; $2\cdot 3\cdot 14=1\cdot 7\cdot 12$; $5\cdot 8\cdot 9=4\cdot 6\cdot 15$. Deci putem avea $B=\{2;3;5;8;9;14\}$ şi $C=\{1;4;6;7;12;15\}$. (1) Înlocuind pe rând în (1) perechile $(8;9)$ cu $(6;12)$; $(2;14)$ cu $(4;7)$; $(3;5)$ cu $(6;12)$; $(2;14)$ cu $(4;7)$; $(3;5)$ cu $(1;15)$; $(2;3)$ cu $(1;6)$; $(3;8)$ cu $(4;6)$; $(3;14)$ cu $(6;7)$ şi tripletele $(2;3;8)$ cu $(1;4;12)$; $(2;3;14)$ cu $(1;7;12)$ şi (5;8;9) cu $(4;6;15)$ se obţin cel puţin 10 soluţii.

4. a) $\triangle BPM\equiv\triangle BQM$ (L.U.L.) $\Rightarrow(MP)\equiv(MQ)$ $\triangle APM\equiv\triangle CMQ$ (L.L.L.) $\Rightarrow\sphericalangle PAM\equiv\sphericalangle MCQ$, de unde $m(\sphericalangle BAC)=180^\circ-m(\sphericalangle PAM)=180^\circ-m(\sphericalangle MCQ)=m(\sphericalangle BCA)$
$\triangle ABM\equiv\triangle CBM$ (L.U.U.), de unde $(AB)\equiv(AC)$; $(AM)\equiv(MC)$ şi
$m(\sphericalangle AMB)=m(\sphericalangle BMC)=\dfrac{180^\circ}{2}=90^\circ$. Deci $BM\perp AC$.
b) $\triangle BPN\equiv\triangle BQN$ (L.L.L.)Deci $m(\sphericalangle PBN)=m(\sphericalangle NBQ)$ şi $(BN$ este bisectoarea $\sphericalangle PBQ$.
Cum şi $(BM$ este bisectoarea $\sphericalangle PBQ$ rezultă că puncteleA,M,N sunt coliniare,
c) Din $\triangle BPN\equiv\triangle BQN$ rezultă că: $m(\sphericalangle PNB)=m(\sphericalangle BNQ)=\dfrac{180^\circ}{2}=90^\circ$.
Deci $BN\perp PQ$ şi cum $(BM$ coincide cu $(BN$ rezultă că $BM\perp PQ$, de unde $AC\parallel PQ$.
Soluţie alternativă şi rapidă:
Dacă se utilizează proprietăţile triunghiului isoscel se acordă punctajul corespunzător.

Clasaa VII-a

1. Ecuaţia este echivalentă cu: $x^2(y-2)+2\cdot x(y-2)+(y-2)=64$

$\Leftrightarrow (x^2+2x+1)\cdot(y-2)=64 \Leftrightarrow (x+1)^2(y-2)=64$, (1)

Deci $(x+1)^2\in\{1,4,16,64\}$. $(x+1)^2=1\Rightarrow x=0$, fals.

$(x+1)^2=4\Rightarrow x=1$ şi din (1) $\Rightarrow y=18$, fals. $(x+1)^2=16\Rightarrow x=3$ şi din (1) $\Rightarrow y=6$ soluție.

$(x+1)^2=64\Rightarrow x=7$ şi din (1) $\Rightarrow y=3$, soluţie. Deci $\overline{xy}\in\{36;73\}$.

2. Inegalitatea dată este echivalentă cu $\dfrac{2^n}{(1+2^n)^2}+\dfrac{3^n}{(1+2^n+3^n)^2}+\dfrac{1}{2^n+3^n}>\dfrac{1}{2}$.

$n=0\Rightarrow \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{2}$, evident $\qquad n=1\Rightarrow \dfrac{2}{9}+\dfrac{3}{36}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{91}{180}>\dfrac{1}{2}$, soluţie

Cazul $n\ge 2: n\ge 2\Rightarrow \dfrac{2^n}{(1+2^n)^2}<\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow 1+2\cdot 2^n+2^{2n}>6\cdot 2^n \Leftrightarrow 1+2^{2n}>4\cdot 2^n$

$\Leftrightarrow 1+2^n(2^n-4)>0$, evident.

$\dfrac{3^n}{(1+2^n+3^n)^2}<\dfrac{1}{6}$ pentru că $\dfrac{3^n}{(3^n)^2}<\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow \dfrac{1}{3^n}<\dfrac{1}{6}$, evident.

$\dfrac{1}{2^n+3^n}<\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow 2^n+3^n>6$, evident.

Deci $\dfrac{2^n}{(1+2^n)^2}+\dfrac{3^n}{(1+2^n+3^n)^2}+\dfrac{1+2^n+3^n}{2^n+3^n}<\dfrac{1}{2}$, $(\forall)n\ge 2$ .Prin urmare, $n\in\{0,1\}$.

3. Fie punctul $F\in(BC)$ astfel încât $(BD)\equiv(BF)$ şi $AE\perp BD$ ($E\in BC$). $\triangle ABE$ este isoscel cu $(AB)\equiv(BE)$, iarBD este mediatoarea segmentului (AE), deci $(AD)\equiv(ED)$, (1)

$m(\sphericalangle BAD)=m(\sphericalangle BED)=100^\circ$ .Deci $m(\sphericalangle DEC)=80^\circ$, iar $m(\sphericalangle DFB)=\dfrac{180^\circ-20^\circ}{2}=80^\circ$

şi $\triangle EDF$ este isoscel, de unde $(DE)\equiv(DF)$, (2) $\quad m(\sphericalangle BCA)=m(\sphericalangle FDC)=40^\circ$.

$\triangle DFC$ este isoscel cu $(DF)\equiv(FC)$, (3)

Din (1), (2) şi (3) $\Rightarrow BC=BF+FC=BD+AD$.

4. Notăm $AB=c; AC=b$ şi $BC=a$ .Fie punctele F,D,E pe latura (AB) astfel încât $CF\perp AB$ $(AC)\equiv(AD)$ şi $m(\sphericalangle BCE)=18^\circ$. $m(\sphericalangle AEC)=m(\sphericalangle EBC)+m(\sphericalangle ECB)=36^\circ$.

Deci $\triangle ACE$ este isoscel şi $CE=b$. $\triangle CEB$ este isoscel, deci $CE=EB=b$ şi $AE=c-b$,

iar $FE=\dfrac{c-b}{2}$ şi $FB=\dfrac{c-b}{2}+b=\dfrac{b+c}{2}$.

Cu teorema lui *Pitagora* în triunghiurile *CFE* şi *CFB* se obţine:

$FC^2=CE^2-FE^2=BC^2-FB^2$, de unde $b^2-\left(\dfrac{c-b}{2}\right)=a^2-\left(\dfrac{b+c}{2}\right)^2$,

de unde $a^2=b^2+bc$ şi, prin urmare, $\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{a}$, adică $\dfrac{BC}{AC}-\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AB}{BC}$.

Soluţie alternativă: Se aplică *teorema lui Pitagora generalizată* în $\triangle ABC$.

Clasaa VIII-a

1. Arătăm că $ED \cap AC \neq \phi$.Din teorema catetei în $\triangle ABC$ rezultă $\frac{BD}{DC}=\frac{AB^2}{AC^2}$

$\frac{BE}{EA}=\frac{BC}{AC}$ *(teorema bisectoarei* Însă $\frac{AB^2}{AC^2}\neq\frac{BC}{AC}\Leftrightarrow\frac{AB^2}{AC}\neq BC\Leftrightarrow AB^2\neq AC\cdot BC$

(pentru că $BD\neq AC$ şi $AB^2=BD\cdot BC$ (teorema catetei))

Rezultă că $ED \nparallel AC$, deci $ED\cap AC\neq\phi$.Prin urmare, ED înţeapă planul α .

2. a) $(x,y)\in[0,1]\Rightarrow 1-x\geq 0$ şi $1-y\geq 0$.
Deci $(1-x)(1-y)\geq 0$, de unde $1-x-y+xy>0$, adică $xy+1\geq x+y$, (1)
Egalitatea avem dacă $x=y=1$.

b)Fie triunghiul echilateral *ABC* cu latura 1 şi punctele
M,N,P respectiv pe laturile $[AB]$, $[BC]$ şi $[AC]$ astfel încât: $AM=x$, $BN=y$ şi $CP=z$.
Avem: $A_{AMP}+A_{MBN}+A_{CPN}\leq A_{ABC}$, de unde

$$\frac{x(1-z)\sin 60^\circ}{2}+\frac{y(1-x)\sin 60^\circ}{2}+\frac{z(1-y)\sin 60^\circ}{2}\leq\frac{1^2\cdot\sin 60^\circ}{2} \quad (2)$$

Deci $x(1-z)+y(1-x)+z(1-y)\leq 1$, de unde $x+y+z\leq xz+xy+yz+1$. (3)
Egalitate avem în (2) dacă triunghiurile *AMP*, *MBN* şi *CPN* sunt degenerate (se întâmplă dacă *punctele M, N, P* coincide cu vârfurile triunghiului *ABC*).
Egalitate avem în (3) dacă $x=y=1$ şi $z=0$ sau $x=1$ şi $y=z=0$ sau
$x=z=1$ şi $y=0$ sau $y=z=1$şi $x=0$ sau $y=1$ şi $x=z=0$ sau $z=1$ şi $x=y=0$.
Soluţie alternativă: $x,y,z\in[0,1]\Rightarrow x-1\leq 0$; $y-1\leq 0$ şi $z-1\leq 0$, de unde
$(x-1)(y-1)(z-1)\leq 0\Rightarrow xyz-xz-yz+z-xy+x+y-1\leq 0\Leftrightarrow xyz+x+y+z\leq xz+yz+xy+1$
Cu atât mai mult $x+y+z\leq xy+xz+yz+1$.
Egalitate avem în (4) dacă $x=y=1$ şi $z=0$ sau $x=1$ şi $y=z=0$ etc.

3. Ecuaţia dată este echivalentă cu $(x-1)^2+(y-1)^2=(z-1)^2+1$, (1)
Dacă $x=2$, atunci $(y-1)^2=(z-1)^2$, de unde $y=z$.
Tripletul $(2,k,k)$ este soluţie, unde $k\in\mathbb{N}^*$, $k\geq 2$, k prim.
Ecuaţia (1) fiind simetrică în *x* şi *y*, şi tripletul $(q,2,q)$ este soluţie a ecuaţiei (1), unde
$q\in\mathbb{N}^*$, $q\geq 2$, q prim.
Dacă $z=2$, atunci $(x-1)^2+(y-1)^2=2$, de unde $x=y=2$.
Dacă $x\geq 3$; $y\geq 3$ şi $z\geq 3$, atunci numărul $(x-1)^2+(y-1)^2$ este par, iar numărul
$(z-1)^2+1$ este impar, contradicţie în (1).
Prin urmare, $(x,y,z)\in\{(2,k,k),(q,2,q)\}$, unde $k,q\in\mathbb{N}$; k şi q numere prime, $k\geq 2$ şi $q\geq 3$.

4. a) Punctele *E, D'* şi *B'* sunt coliniare şi $(ED')\equiv(D'B')$
$BB'\|EN$ şi $(EN)\equiv(BB')$ implică *BB'NE* este paralelogram, deci punctele *B, D', N* sunt coliniare şi $(ND')\equiv(D'B)$.Notăm cu *T, R, P* şi *Q* centrele pătratelor *ABCD, A'B'C'D', A''D'C''E* şi, respectiv, *MD''FN*.Triunghiurile *AB'C, A'C'D, A''C''D''* şi *EFM* sunt echilaterale. Deci punctele *I, O, G* şi *H* sunt centrele de greutate ale acestor triunghiuri.
Deci $I\in TB'$; $O\in DR$; $G\in PD''$ şi $H\in EQ$ cu $TI=\frac{TB'}{3}$, $OR=\frac{DR}{3}$, $PG=\frac{1}{3}PD''$ şi $QH=\frac{1}{3}EQ$.
Cu t.f.a. se obţine *I, O, G, H*$\in BN$.
Din asemănări de triunghiuri (t.f.a.) se arată că $IB=OD'=OI=\frac{1}{3}BD'$ şi $GD'=GH=HN=\frac{1}{3}ND'$
Însă $(BD')\equiv(D'N)$, deci $(HG)\equiv(OI)$.

Ediţia a VIII-a : 2012

Clasa a V-a

1. a) $\left.\begin{array}{l} A = 2^{1+2+3+\cdots+99} \cdot 26 = 26 \cdot 2^{\frac{99\cdot 100}{2}} = 26 \cdot 2^{4950} = 26 \cdot 8^{1650} \\ B = 3^{3302} - 3^{3301} + 21 \cdot 3^{3300} = 3^{3300} \cdot (9 - 3 + 21) = 27 \cdot 9^{1650} \end{array}\right\} \Rightarrow A < B$

b) $\Rightarrow \overline{ab3} = 243 = 3^5 = 3^{2+4-1} \Rightarrow a = 2$ şi $b = 4$

2. a) $U(x^2) = \{0,1,4,5,6,9\}$ $U(5y^2) = \{0,5\} \Rightarrow U(x^2) - U(5y^2) \neq 2$

$\Rightarrow \nexists$ numere naturale x şi y care să verifice relaţia

b) $A = \frac{13}{23} + \frac{13 \cdot \cancel{101}}{23 \cdot \cancel{101}} + \frac{13 \cdot \cancel{10101}}{23 \cdot \cancel{10101}} + \cdots + \frac{13 \cdot \cancel{1010\cdots101}}{23 \cdot \cancel{1010\cdots101}} = \underbrace{\frac{13}{23} + \frac{13}{23} + \cdots + \frac{13}{23}}_{de\ 299\ \text{ori}} = 299 \cdot \frac{13}{23} = 13^2$

3. $x^y + y = 5^3 + 3 = 125 + 3 = 128$

Clasa a VI-a

1. a) $\Leftrightarrow 503y = 2012 - x^2 \Leftrightarrow y = \frac{2012 - x^2}{503} = \frac{2012}{503} - \frac{x^2}{503} = = 4 - \frac{503^2 \cdot k^2}{503} = 4 - 503 \cdot k^2$, pentru $x = 503k$, unde $k \in Z$ $x = 503k$, $y = 4 - 503 \cdot k^2$.

b) $\Leftrightarrow \frac{\frac{x}{1}}{9} = \frac{\frac{y}{14}}{9}$ şi $\frac{\frac{y}{21}}{9} = \frac{\frac{z}{17}}{9} \Leftrightarrow \frac{x}{11} = \frac{y}{14} \wedge \frac{y}{21} = \frac{z}{17} \Rightarrow x = \frac{11y}{14}$; $z = \frac{17y}{21} \overset{inlocuim}{\Longrightarrow} \frac{11y}{42} + \frac{y}{7} + \frac{17y}{42} = 34 \Leftrightarrow$

$\frac{34y}{42} = 34 \Rightarrow y = 42 \Rightarrow x = 33 \Rightarrow z = 34$.

2. $n = ... = 5 \cdot \left[2(a+b+) \cdot \frac{2(a+b+c)}{9}\right] = 5 \cdot \frac{20(a+b+c)}{9} = 100 \cdot \frac{a+b+c}{9} = \left(\frac{10}{3}\right)^2 \cdot (a+b+c)$

$\Rightarrow a+b+c = k^2 \Rightarrow 1+6+9 = 16 = 4^2 \Rightarrow \overline{abc} = 169$ $\max(a+b+c) = 7+8+9 = 24$

3. a) $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle P$ (corespondente congruente) $\Rightarrow \triangle APN$ isoscel $\overset{def}{\Longrightarrow} (AP) \equiv (AN)$

b) $\triangle AMN \equiv \Delta AQP$ $(U.L.U.)$ c) $\triangle PMN \equiv \triangle NQP$ $(U.L.U.)$

Clasa a VII-a

1. a) se adună la egalitate pe rând a^2, b^2, c^2 şi se obţine

$$\begin{array}{l} 2012 + a^2 = (a+c)(a+b) \\ 2012 + b^2 = (b+a)(b+c) \\ 2012 + c^2 = (a+c)(b+c) \end{array} \overset{inlocuim}{\Longrightarrow} \text{A}=|(a+b)(b+c)(a+c)| \in \mathbb{Q}$$

b) $0,a(b) = \frac{\overline{ab} - a}{90} = \frac{10a + b - a}{90} = \frac{9a + b}{90} \Leftrightarrow \frac{9a+b}{90} = \frac{a}{b} \Rightarrow b$ este divizor al lui 90 $\Rightarrow b = 9 \Rightarrow a = 9$

2. a) $1 = 1, \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3} < \frac{2}{3}, \ldots \frac{1}{2012} < \frac{2011}{2012} \xrightarrow{+} a < b$ b) $x \geq 1$, $y \geq 2$.

Dacă $\frac{x-1}{2} = k$ şi $\frac{3y-7}{2} = p \Rightarrow x = 2k+1$ şi $y = \frac{2p+7}{3} \Rightarrow k, p \in N$

Aplicăm definiţia părţii întregi $\Rightarrow \begin{matrix} k \le \sqrt{2k} < k+1 \\ p \le \sqrt{\dfrac{2p+1}{3}} < p+1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} k \in \{0,1,2\} \\ p \in \{0,1\} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A = \{1,3,5\} \\ B = \{3\} \end{matrix}$

$A \cup B = \{1,3,5\}$; $A \cap B = \{3\}$.

3. a) $\Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$ (A) b) $\Leftrightarrow MD \cdot CN = \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{(DP+PC)^2}{4} \xrightarrow{a)} DP \cdot PC = \dfrac{(DP+PC)^2}{4}$

$\Rightarrow (MD) \equiv (DP)\ (CN) \equiv (PC) \Rightarrow P$ este mijlocul lui DC.

c) $\Rightarrow \triangle QAB$, $\triangle QCD$ isoscel $\Rightarrow$ bisectoarea este şi înălţime.

Clasa a VIII-a

1. a) Folosind formulele de calcul prescurtat sau formula radicalilor dubli obţinem:

$A = \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2} - 2\sqrt{3} - 1 = \left|\sqrt{5}+\sqrt{3}\right| - \left|\sqrt{5}-\sqrt{3}\right| - 2\sqrt{3} - 1 =$

$= \sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}-2\sqrt{3}-1 = -1 \Rightarrow A^{2012} = (-1)^{2012} = 1$

b) $\Leftrightarrow p^4 + 2 \cdot p^3 + x \cdot p + y = t^2 - 1 \Leftrightarrow p^4 + 2 \cdot p^3 + x \cdot p + y + 1 = t^2$

Exemplu: $p = 3 \Rightarrow 81 + 54 + 3x + y + 1 = t^2 \Leftrightarrow 135 + 3x + y + 1 = t^2 \Rightarrow \begin{vmatrix} x = 2 \\ y = 2 \end{vmatrix}$

$p = 4 \Rightarrow 256 + 128 + 4x + y + 1 = t^2 \Leftrightarrow 384 + 4x + y + 1 = t^2 \Rightarrow \begin{vmatrix} x = 3 \\ y = 3 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \begin{matrix} x = p-1 \\ y = p-1 \end{matrix} \xrightarrow{\text{înlocuire}} p^4 + 2p^3 + p(p-1) + p + 1 = t^2 - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^4 + 2p^3 + p^2 = t^2 \Leftrightarrow (p^2 + p) = t^2$ (A)

2. a) Notăm $a+1 = t \Rightarrow a = t-1 \Rightarrow$

$\dfrac{t-1}{t} + \dfrac{b}{(t+b)^2} + \dfrac{1}{t+b} \le 1 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{t} + \dfrac{2b+t}{(t+b)^2} \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{2b+t}{(t+b)^2} \le \dfrac{1}{t} \Leftrightarrow 2bt + t^2 \le t^2 + 2bt + b^2$ (A)

$\Leftrightarrow$ avem egalitatea $\dfrac{a+1}{a+1} = 1$.b) $a < 8$, $b < 6 \Rightarrow$ de exemplu pentru $a = 4, b = 5$:

$3\sqrt{a+b} + 2\sqrt{8-a} + \sqrt{6-b} = 3\sqrt{4+5} + 2\sqrt{8-4} + \sqrt{6-5} = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 = 9 + 4 + 1 = 14$ (A)

3. a) demonstrăm că $A'C \perp NP$ şi $A'C \perp NM \Rightarrow A'C \perp (MNP)$.

Prin calcule în triunghiurile NPM şi $APM \Rightarrow A \in (MNP)$.

b) $\sin u = \sin\left[(ABC);(MNP)\right] = \dfrac{C.O.}{IP.} = \dfrac{DD'}{D'O} = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{6}$ unde $AC \cap BD = \{O\}$

Ediţia a IX-a : 2013

Clasa a V-a

1. i) În $61a^2 + 2 \cdot 61b - 2c = 2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61 \Rightarrow c = 61 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + 2b = 35 \Rightarrow \begin{matrix} a = 5 \Rightarrow b = 5 \ (A) \\ a = 3 \Rightarrow b = 13 \ (A) \end{matrix}$

ii) $A = 10^{n^2+n} \cdot 10^2 = 10^{n(n+1)} \cdot (64+36) = 10^{2k}(8^2+6^2) = (8 \cdot 10^k)^2 + (6 \cdot 10^k)^2$

2. i) $\Rightarrow b(10a+c) = a(10b+c) + 1 \Leftrightarrow$

$10ab + bc = 10ab + ac + 1 \begin{vmatrix} -10ab \\ -ac \end{vmatrix} \Leftrightarrow c(b-a) = 1 \Rightarrow c = 1$

$$\text{Şi } b-a=1= \begin{array}{l} 9-8 => b=9, a=8 \\ 8-7 => b=8, a=7 \\ 7-6 => b=7, a=6 \\ 6-5 => b=6, a=5 \\ 5-4 => b=5, a=4 \\ 4-3 => b=4, a=3 \\ 3-2 => b=3, a=2 \\ 2-1 => b=2, a=1 \end{array} =>=> \begin{array}{l} \overline{abc}=\{981,871,761,651,\dots,211\} \\ \overline{abc}=\{891,781,671,561,\dots,121\} \end{array}$$

ii) $\begin{array}{l} a=\frac{x+(7^3)^{671}}{x+(7^4)^{503}}=\frac{x+7^{2013}}{x+7^{2012}}>1 \\ b=\frac{y+(5^4)^{503}}{y+(6^3)^{671}}=\frac{y+5^{2012}}{y+6^{2013}}<1 \end{array} => a>b$

Din $\frac{3a+2b}{6}=\frac{3b+c}{7} => 7(3a+2b)=6(3b+c) <=> 21a=4b+6c => a=2$

$$\frac{3a+2b}{6}=\frac{a+4c}{11}, a=2 => 11(6+2b)=6(2+4c) <=> 27+11b=12c =>$$

$=> b=3 \ => c=5 => \overline{abc}=235$

Clasa a VI-a

1. $<=> \frac{x+43}{x}=\frac{y+10}{y}=\frac{z+8}{z} <=> 1+\frac{43}{x}=1+\frac{10}{y}=+\frac{8}{z}/-1 \ <=> \frac{x}{43}=\frac{y}{10}=\frac{z}{8}=k => => x=$ $43k, y=10k, z=8k \ => 2013k^2=2013 =>$

$$k=\mp 1 => \begin{array}{l} x=43 \\ y=10 (A) \\ z=8 \end{array} sau \begin{array}{l} x=-43 \\ y=-10 (F) (anulează numitorii) \\ z=-8 \end{array}$$

2. i) $a\cdot b=[a,b]\cdot(a,b) \xRightarrow{înlocuiesc} 9\ [a,b]=[a,b]\cdot(a,b)\cdot(a,b)/:[a,b] =>$ $=> (a,b)=3 => a$ şi b nu sunt prime între ele

ii) Din $\overline{abc} \vdots 37 => \overline{abc}=100a+10b+c=74a+26a+10b+c=$

$$\mathcal{M}_{37}+\underbrace{(26a+10b+c)}_{\mathcal{M}_{37}} => c=\mathcal{M}_{37}-26a-10b$$

Dar $\overline{bca}=100b+10c+a=\mathcal{M}_{37}+26b+10\cdot(\mathcal{M}_{37}-26a-10b)=$ $=\mathcal{M}_{37}+26b-260a-100b+a=\mathcal{M}_{37}-\underbrace{74}_{\vdots 37}b-\underbrace{259}_{\vdots 37}a=\mathcal{M}_{37} \vdots 37$

3. i) Din simetrie sau congruență $=>=> \begin{array}{c} (AE)\equiv(AO)\equiv(AF) \\ \sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle A_2 \equiv \sphericalangle A_3 \equiv \sphericalangle A_4 \end{array} =>$

$$=> \begin{array}{l} m\widehat{EAO}=2\cdot m\widehat{A_1} \\ m\widehat{FAO}=2\cdot m\widehat{A_3} \end{array} => \widehat{EAO}\equiv\widehat{FAO} =>=> \Delta EAM \underbrace{\equiv}_{L.U.L} \Delta FAM => (EM)\equiv(FM) \xRightarrow{def}$$

$=> \Delta MEF isoscel$ Dar $\Delta EAF isoscel \ => AM \perp EF$

ii)Un exemplu:

Clasa a VII-a

1. i) $=> m; n=m+1; p=m+2 => m+1=\frac{m+m+2}{2}=m+1\ (A)$

$n^2-mp=(m+1)^2-m(m+2)=\cdots=1$

ii) $y=\frac{x+z}{2}; y^2-xz=1 => \frac{(x+z)^2}{4}-xz=1 => \cdots => z-x=2 =>$

$=> z=x+2, y=x+1 => concluzia$

2. i) $<=> y^2 - x^2 = 2013^2 <=> (y+x)(y-x) = 2013^2 => (x,y) = (0{,}2013)$
expl: $(y+x)(y-x) = 3^2 \cdot (11 \cdot 61)^2$ ii) fiecare termen are forma generală: $\frac{1}{(k+1)\cdot\sqrt{k}} = \sqrt{k} \cdot \frac{1}{(k+1)\cdot k} =$
$\sqrt{k}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sqrt{k}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = \left(1 + \sqrt{\frac{k}{k+1}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$
$2\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$ Deci $\frac{1}{(k+1)\cdot\sqrt{k}} < 2\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) => a < 2\left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2012}} - \frac{1}{\sqrt{2013}}\right) =$
$2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2013}}\right) => [a] = 1$
3. i)
$\Delta ADE \sim \Delta GCE => \cdots \frac{AD}{CG} = \frac{1}{2} => 2AD = CG$ Fie Mmijlocul lui $[CG] => (CM) \equiv (MG) \equiv (DA)$ dar$MG \| DA$
$\xRightarrow{propr.} GMAD$paralelogram$\xRightarrow{propr.}$
H este și mijlocul lui $DM => (DH) \equiv (HM)$
În ΔAGC: HMeste linie mijlocie $\xRightarrow{\text{T.l.mij.}} HM = \frac{AC}{2} => DH = \frac{AC}{2}$

ii) de exemplu:

Clasa a VIII-a

1. i) $\begin{matrix} \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0 \\ \left(\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)^2 \geq 0 \\ \left(\sqrt{c} - \sqrt{a}\right)^2 \geq 0 \end{matrix} <=> \left.\begin{matrix} a + b \geq 2\sqrt{a \cdot b} \ /\cdot \sqrt{c} \\ b + c \geq 2\sqrt{b \cdot c} \ /\cdot \sqrt{a} \\ c + a \geq 2\sqrt{a \cdot c} \ /\cdot \sqrt{b} \end{matrix}\right\} \overset{+}{\Rightarrow}$ cerința

ii) $7x^2 + 7xy + 6xy + 6y^2 = 2y^2 - 2x^2$ sau $6x^2 + 7xy + 6xy + 7y^2 = 3y^2 - 3x^2$
$(x+y)(7x+6y) = 2(y^2 - x^2)(x+y)(6x+7y) = 3(y^2 - x^2)$
$7x + 6y = 2(y-x)6x + 7y = 3(y-x)$

$=> \frac{6x+7y}{7x+6y} = \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}si \quad \begin{matrix} x = -y \\ \ldots \\ -1 \in \mathbb{Q} \end{matrix}$
Sau $9x^2 + 13xy + 4y^2 = 0 \ /: y^2 \ldots$

i) $=> \left.\begin{matrix} a = 2\left(\sqrt{7} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}\right) \ => \frac{a}{b} = -\frac{2}{3} \\ b = -3\left(\sqrt{7} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}\right) \\ c = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots - \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{matrix}\right\} \frac{a}{b} + c = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0 \in \mathbb{N}$

ii) $2\sqrt{x-2010} + 2\sqrt{y+2012} + 2\sqrt{z-4} - x - y - z - 1 = 0 \ /\cdot -1 <=>$
$(\sqrt{x-2010} - 1)^2 + (\sqrt{y+2012} - 1)^2 + (\sqrt{z-4} - 1)^2 = 0 <=> \left| \begin{matrix} x = 2011 \\ y = -2011 \\ z = 5 \end{matrix} \right.$
Cond. pentru $\sqrt{\ldots} => x \geq 2010; y \geq -2012; z \geq 4$

a) $\Delta BB'E \equiv \Delta BCE' \Rightarrow (CE') \equiv (B'E') \Rightarrow$ proiecțiile vârfului unghiului drept pe ipotenuza BE' vor fi același punct $P \Rightarrow \left.\begin{matrix} CP \perp BE' \\ B'P \perp BE' \end{matrix}\right\} \overset{T}{\Rightarrow} BE' \perp (CPB') \overset{def}{\Longrightarrow} BE' \perp B'C$ b) Fie $PQ \perp B'C si BE' \perp (CPB') \Rightarrow$ $BE' \perp PQ^{\vee} PQ \perp BE' si PQ \perp B'C \Rightarrow d(BE'; B'C) = PQ$

$$\left.\begin{matrix} \Delta CBE' \Rightarrow CP = \dfrac{c_1 \cdot c_2}{ip} = \dfrac{\sqrt{30} \cdot 2\sqrt{30}}{BE'} \\ \Delta BB'E' \Rightarrow B'P = \cdots = \dfrac{\sqrt{30} \cdot 2\sqrt{30}}{BE'} \\ \Delta BEE' \overset{T.P.}{\Longrightarrow} BE' = 5\sqrt{6} \end{matrix}\right| \overset{tranz}{\Longrightarrow} (CP) \equiv (B'P) = 2\sqrt{6}$$

PQmediană, înălime și bisectoarea $\sphericalangle B'PC \Delta PB'Q \overset{T.P.}{\Longrightarrow} PQ = 3cm$

Ediția a X-a: 2014

Clasa a V-a

1. a) $\left.\begin{matrix} 4x < 7x \\ 7y = 7y \end{matrix}\right| \underset{-}{+} \overline{2013 < 7(x+y)} \Leftrightarrow x+y > \dfrac{2013}{7} > 287$ (A)

$\left.\begin{matrix} 4x = 4x \\ 4y < 7y \end{matrix}\right| \underset{-}{+} \overline{4(x+y) < 2013} \Leftrightarrow x+y < \dfrac{2013}{4} < 504$ (B)

(A) si (B) $\Rightarrow 287 < x+y < 504$ b) $343^{671} = (7^3)^{671} = 7^{2013} = 7^3 \cdot 7^{2010} = 343 \cdot 7^{2010}$

$16^{1007} = (4^2)^{1007} = 4^{2014} = 4^4 \cdot 4^{2010} = 256 \cdot 4^{2010} \qquad \Leftrightarrow 343^{671} > 16^{1007}$

2. a) Facem metoda reducerii la absurd

$$\begin{matrix} a < 672 \\ \Rightarrow b < 672 \\ c < 672 \end{matrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} a \le 671 \\ b \le 671 \\ c \le 671 \end{matrix}\right| \overset{+}{\Rightarrow} a+b+c \le 2013(F) \Rightarrow \text{cel puţin un număr este mai mare ca } 671$$

b) Presupunem că fracţia se simplifică prin d

$\Rightarrow d / 38n+5 \Rightarrow d / 53(38n+5) \Rightarrow d / 2014n+265$

$d / 53n+7 \Rightarrow d / 38(53n+7) \Rightarrow d / 2014n+266$

$\Rightarrow d / 1 \Rightarrow$ fracţia ireductibilă

3. a) din ii) $\Rightarrow a+2c = d-b$

iii) $\Rightarrow 10a-10c = 6+d-b \Leftrightarrow 10a-10c = 6+a+2c \Leftrightarrow$

$3a-4c = 2 \Rightarrow a \in \{2,4,6,8\}$

$Fie a = 2 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow d-b = a+2c = 4 = 4-0 \Rightarrow 2014; = 5-1(F) - c = b; = 6-2(F) - a = b$

$= 7-3 \Rightarrow 2317; = 8-4 \Rightarrow 2418; = 9-5 \Rightarrow 2519$

$a = 4 \Rightarrow 4c = 10(F)$ $a = 6 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow d-b = 14(F)$ $a = 8 \Rightarrow 4c = 22(F)$

$S = 2014+2317+2418+2519 = 9268 = 331 \cdot 28$

b) i) $\dfrac{1}{c+1}\left(1+\dfrac{a-r}{ac+r}\right) = \dfrac{1}{c+1} \cdot \dfrac{ac+r+a-r}{ac+r} = \dfrac{a(c+1)}{(c+1)\cdot(ac+r)} = \dfrac{a}{ac+r}$

ii) $\dfrac{2014}{6041} = \dfrac{1}{3} \cdot \left(1+\dfrac{1}{6041}\right) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{18123}$ $6041 : 2014 = 2\dfrac{4048}{2013}$

Clasa a VI-a

1. a) Scădem 45 format din $1+2+3+\ldots+9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{x+3}{2}-1\right) + \left(\dfrac{x+7}{3}-2\right) + \left(\dfrac{x+13}{4}-3\right) + \ldots \left(\dfrac{x+91}{10}-9\right) = 0 \Leftrightarrow$

$<=> \frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{3}+\ldots+\frac{x+1}{10}=0 <=> (x+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots.+\frac{1}{10}\right)=0 => x+1=0 <=> x=-1$

b) i) Fie $(3a+11b)\vdots 9 => b\vdots 3 => b=3p => 3(a+11p)\vdots 9 => (a+11p)\vdots 3 => a+11p=3h => a=3h-11p$

Atunci $6a-2b=6a-6p=6(a-p)=6(3h-12p)=18(h-4p)\vdots 18 => P\vdots 9\cdot 18=162$

ii) Fie $(6a-2b)\vdots 9 => b\vdots 3 => b=3k => 6a-6k=6(a-k)\vdots 9 => a-k=3q => a=3q+k$

Atunci $3a+11b=3(3q+k)+33k=(9q+36k)\vdots 9$ Cum $(6a-2b)\vdots 2 => P\vdots 2\cdot 9\cdot 9=162$

2. a) Împărţim inegalitatea prin $abcd => \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1767}{abcd}\le 10$ Suma maximă dacă a,b,c,d minime $=> a=2, b=3, c=5, d=7 => S=9\frac{62}{105}<10$ (A)

b) i) – Clasa a V-a ii) - $\frac{2014}{8055}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{8055}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{32220}$

3. Se poate folosi proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi sau congruenţe de triunghiuri

$\triangle BAD\equiv\triangle BFD(l.u.) => (AB)\equiv(FB)$, $\triangle AIB\equiv\triangle FIB(l.u.l.) => (AI)\equiv(FI)$

$\triangle AID\equiv\triangle FID(l.l.l.) => m(\sphericalangle DAI)=m(\sphericalangle DFI)=45° => m(\sphericalangle IFG)=45°$

Analog $\triangle CAE\equiv\triangle CGE(l.u.) => (AC)\equiv(GC)$, $\triangle AIC\equiv\triangle GIC(l.u.l.) => (AI)\equiv(GI)$

$\triangle AIE\equiv\triangle GID(l.l.l.) => m(\sphericalangle IAE)=m(\sphericalangle IGE)=45° => m(\sphericalangle IGF)=45° \overset{\triangle IGF}{\Rightarrow} m(\sphericalangle FIG)=90°$

Clasa a VII-a

1. a)Obs. $p=2 => k^2=7^2$ (A) Dar $24p+1$ este impar $=> k=2t+1$ şi ecuaţia devine

$24+1=(2t+1)^2 <=> 24p+1=4t^2+4t+1 <=> 6p=t(t+1) => 6\cdot 5\, sau\, p=5, 6\cdot 7\, sau\, p=7$

Discuţie: $-din\, 6p=t(t+1) => t=6u\, sau\, t+1=6u => 6p=6u(6u+1) <=>$

$p=u(6u+1) => u=1 => p=7 => din\, t+1=6u => t=6u-1 =>$

$=> 6p=6u(6u-1) => p=u(6u-1) => u=1, p=5$

b) i) $\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{m-q}{nm+q}\right)=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{mn+q+m-q}{mn+q}=\frac{m(m+1)}{(m+1)(mn+q)}=\frac{m}{mn+q}$

ii) $\frac{1151}{2014}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{144}{1007}\right)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{7}\left(1+\frac{1}{1007}\right)\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{14}+\frac{1}{14098}$

2. a) $<=> a(a+1)=p^{2b}+2\, din\, a(a+1)=2q => p=2 <=> a(a+1)=2^{2b}+2$

$<=> a(a+1)-2=2^{2b} <=> a^2+a-2=2^{2b} <=> (a+2)(a-1)=2^{2b}$

Dar $a+2$ şi $a-1$ sunt de parităţi diferite

Cum $a+2\ge 2 => a-1=1 => a=2 => 2^{2b}=2^2 => b=1$

b) folosim inegalitatea mediilor $\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy} <=>$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(\frac{abd}{c}+\frac{abc}{d}\right)\ge\sqrt{\frac{abd}{c}\cdot\frac{abc}{d}}=ab\\ \frac{1}{2}\left(\frac{bcd}{a}+\frac{abc}{d}\right)\ge\sqrt{\frac{bcd}{a}\cdot\frac{abc}{d}}=bc\\ \frac{1}{2}\left(\frac{bcd}{a}+\frac{acd}{b}\right)\ge\sqrt{\frac{bcd}{a}\cdot\frac{acd}{b}}=cd\\ \frac{1}{2}\left(\frac{acd}{b}+\frac{abd}{c}\right)\ge\sqrt{\frac{acd}{b}\cdot\frac{abd}{c}}=ad\end{array}\right\}\overset{+}{\Rightarrow} cz$$

3. a) Fie $AC \cap BD = \{O\}$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\triangle OAB \overset{T.P.}{\Rightarrow} AB^2 = OA^2 + OB^2 \\ \triangle ODC \overset{T.P.}{\Rightarrow} DC^2 = OC^2 + OD^2\end{array}\right| \overset{+}{\Rightarrow} AB^2 + CD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 \\ \left.\begin{array}{l}\triangle OAD \overset{T.P.}{\Rightarrow} AD^2 = OA^2 + OD^2 \\ \triangle OBC \overset{T.P.}{\Rightarrow} BC^2 = OB^2 + OC^2\end{array}\right| \overset{+}{\Rightarrow} AB^2 + CD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2\end{array}\right| => a)$$

b) Construim $CM \perp AB => MB = AB - CD$

$\triangle BCM \overset{T.P.}{\Rightarrow} BC^2 = (AB - CD)^2 + AD^2 = AB^2 + AD^2 + CD^2 - 2AB \cdot CD <=>$

$BC^2 - AB^2 = AD^2 + CD^2 - 2AB \cdot CD$ (*)

Din a) $=> AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2 <=> BC^2 - AB^2 = CD^2 - AD^2 =>$

$CD^2 - AD^2 = AD^2 + CD^2 - 2AB \cdot CD <=> AD^2 = AB \cdot CD <=> AD = \sqrt{AB \cdot CD}$

Trebuie să dem. că $AB + CD > 2AD <=> AB + CD > 2 \cdot \sqrt{AB \cdot CD} <=> \left(\sqrt{AB} - \sqrt{CD}\right)^2 > 0$ (A)

Clasa a VIII-a

1. a) $a^2b^2 - 11a^2 - 11b^2 + 121 = 2014 <=> (a^2 - 11)(b^2 - 11) = 38 \cdot 53$

$\begin{array}{l} a^2 - 11 = 38 \\ b^2 - 11 = 53 \end{array} <=> \begin{array}{l} a_{1,2} = \mp 7 \\ b_{1,2} = \mp 8 \end{array} => S = \{(7,8);(-7,-8);(7,-8);(-7,8)\}$

$\begin{array}{l} a^2 - 11 = 53 \\ b^2 - 11 = 38 \end{array} <=> \begin{array}{l} a_{1,2} = \mp 8 \\ b_{1,2} = \mp 7 \end{array} => S = \{(8,7);(-8,-7);(8,-7);(-8,7)\}$

$\begin{array}{l} a^2 - 11 = 19 \\ b^2 - 11 = 106 \end{array} (F)$ b) $Fie\ f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{Z} => \left.\begin{array}{l} f(x-2) = a(x-2) + b \\ f(x+2) = a(x+2) + b \end{array}\right| \Rightarrow$

$[a(x-2) + b] \cdot [a(x+2) + b] = x^2 - 2x - 3 <=>$

$a^2x^2 + 2abx + b^2 - 4a^2 = x^2 - 2x - 3 <=> (a^2 - 1)x^2 + (2ab + 2)x + b^2 - 4a^2 + 3 = 0 (\forall) x \in \mathbb{R}$

Dacă $a^2 - 1 \neq 0,$ atunci ecuaţia are maxim 2 soluţii $=>$

$a^2 - 1 = 0 <=> a_{1,2} = \mp 1 \overset{???}{\Rightarrow} b_{1,2} = \mp 1 => \begin{array}{l} f_1(x) = x + 1 \\ f_2(x) = -x + 1 \end{array}$ Analog: $2ab = 0$ $d = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. a) Deoarece $2x + 1 = n^2$ şi faptul că printre numerele

$2x + 2, 2x + 3, \ldots, 3x + 2 (\nexists) k^2 => 3x + 2 < (n+1)^2$ şi $2x + 1 = n^2 => x = \frac{n^2 - 1}{2} \Rightarrow 3 \cdot \frac{n^2 - 1}{2} + 2 < (n+1)^2 \Leftrightarrow \ldots$

$\ldots => n(n-4) < 1 => n > 4$ nu convine $=> n \in \{1, 2, 3, 4\} => \begin{array}{l} n = 1 => x = 0 (F) \\ n = 2 => 2x + 1 = 4 (F) \\ n = 3 => 2n + 1 = 9 => x = 4 \\ n = 4 => 2x + 1 = 16 (F) \end{array}$

b) i) $\frac{1}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{m-q}{mn+q}\right) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{mn + q + m - q}{mn + q} = \ldots = \frac{m}{mn+q}$

ii) $\frac{247}{420} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{37}{210}\right) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{2}{35}\right)\right] = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{6}\left[1 + \frac{1}{18}\left(1 + \frac{1}{35}\right)\right]\right\} =$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 6}+\frac{1}{2\cdot 6\cdot 18}+\frac{1}{2\cdot 6\cdot 18\cdot 35}$

Există şi altă descompunere: $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{14}$

3. a) Fie $a<b<c=>b-a=1=>b=a+1$

Din $|c-d|=1=>d-c=1=>d=c+1$

Dar $a^2+b^2+c^2=d^2=>a^2+(a+1)^2+c^2=(c+1)^2<=>\ldots$

$\ldots<=>a(a+1)=c$

$V=a\cdot b\cdot c=a\cdot(a+1)\cdot a\cdot(a+1)=\left[a(a+1)\right]^2$

$|V-2014|=min$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fie}\, V=(6\cdot 7)^2=42^2=1764\\ \text{Sau}\, V=(7\cdot 8)^2=56^2=3136\end{array}\right. => V=42^2=1764$$

b) $V=a\cdot b\cdot c=6\cdot 7\cdot c=42^2=>c=42=>\begin{array}{l}d=c+1=43\\ sau\ d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=43\end{array}$

Cuprins

$$\sum_{j=1}^{m}\gamma_{ij}(t)\xi_j(t)+\sum_{j,k=1}^{m}\beta_{ijk}(t;t-\lambda)\xi_j(t)\xi_k(t-\lambda)+\sum_{j=1}^{m}\int_{t-\lambda}^{t}\gamma'_{ij}(\tau)\xi_j(\tau)d\tau+$$

$$+\sum_{j,k=1}^{m}\xi_k(t-\lambda)\int_{t-\lambda}^{t}\frac{\partial\beta_{ijk}(\tau;t-\lambda)}{\partial\tau}\xi_j(\tau)d\tau+\sum_{j,k=1}^{m}\xi_j(t)\int_{t-\mu}^{t-\lambda}\frac{\partial\beta_{ijk}(t;\theta)}{\partial\theta}\xi_k(\theta)d\theta+$$

$$+\sum_{j,k=1}^{m}\int_{t-\lambda}^{t}d\tau\int_{t-\mu}^{t-\lambda}\frac{\partial^2\beta_{ijk}(\tau;\theta)}{\partial\theta\partial\tau}\xi_j(\tau)\xi_k(\theta)d\theta \;=2$$

$i=1,2,\ldots,n.$

ISBN 978-973-0-18958-2