Testul 1

SUBIECTUL I

1. Să se demonstreze că $\left(1+\sqrt{3}\right)^2+\left(1-\sqrt{3}\right)^2$ este un număr natural.

2. Să se determine numărul real x, ştiind că şirul 1, x, $x+2$, $7,...$ este progresie aritmetică.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+2x-3}=2\sqrt{3}$.

4. Să se calculeze în câte moduri se poate alcătui o echipă de proiectare formată din 3 specialişti, dintre care cel puţin un biolog şi un chimist, dacă avem la dispoziţie 3 biologi şi 4 chimişti.

5. Se consideră dreptele de ecuaţii $d_1: 2x+3y-5=0$, $d_2: 3x+y-4=0$ şi $d_3: x+y+a=0$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care cele trei drepte sunt concurente.

6. Să se calculeze aria triunghiului ABC în care $AB=8$, $AC=4$ şi $m\left(\measuredangle BAC\right)=45^\circ$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră punctele $A_n\left(n,n^2\right)$, unde $n\in\mathbb{N}$.

a) Să se determine ecuaţia dreptei A_0A_1.

b) Să se calculeze aria triunghiului $A_0A_1A_2$.

c) Să se arate că pentru orice $m,n,p\in\mathbb{N}$, distincte două câte două, aria triunghiului $A_mA_nA_p$ este număr natural.

2. În mulţimea polinoamelor $\mathbb{R}\left[X\right]$ se consideră polinoamele $f=X^3+mX^2+nX+6$ şi $g=X^2-X-2$.

a) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x^2-x-2=0$.

b) Să se determine $m,n\in R$ astfel încât polinomul f să se dividă prin polinomul g.

c) Pentru $m=-4$ şi $n=1$ să se calculeze produsul

$P=f\left(0\right)\cdot f\left(1\right)\cdot...\cdot f\left(2010\right)\cdot f\left(2011\right)$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x+3^x$.

a) Să se calculeze $f'\left(x\right), x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine asimptota spre $-\infty$ a funcţiei f.

c) Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=e^x\sqrt{x^2+1}$.

a) Să se verifice că $\int_0^1 \frac{f\left(x\right)}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=e-1$.

b) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g\left(x\right)=xe^{-x}f\left(x\right)$, cu axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se calculeze $\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+1}\cdot f\left(x\right)dx$.

Testul 2

SUBIECTUL I

1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_2 = 5$ şi $r = 3$. Să se calculeze a_8.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 25$. Să se calculeze $f(-5)\cdot f(-4)\cdot\ldots\cdot f(0)\cdot\ldots\cdot f(4)\cdot f(5)$.

3. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_3(x^2 - 2x) = \log_3(2x-3)$.

4. Să se determine câte numere naturale de 3 cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{0,1,2,5\}$.

5. Să se determine numerele reale a ştiind că lungimea segmentului determinat de punctele $A(-1,2)$ şi $B(4-a,4+a)$ este egală cu 5.

6. Să se calculeze $\sin^2 120^\circ + \cos^2 60^\circ$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră mulţimea $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x-1 & x \end{pmatrix} \middle| \; x \in (0,\infty) \right\}$.

a) Să se arate că $I_2 \in M$.

b) Să se arate că $A(x)\cdot A(y) = A(x\cdot y),\ \forall A(x), A(y)\in M$.

c) Să se arate că $A(x)\cdot A(y) = A(y)\cdot A(x),\ \forall A(x), A(y)\in M$.

2. Se consideră polinomul $f = (X^2-1)(X^2-4)-1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4.

a) Să se verifice că $f = X^4 - 5X^2 + 3$.

b) Să se arate că polinomul f are toate rădăcinile reale .

c) Să se arate că $x_1^{2011} + x_2^{2011} + x_3^{2011} + x_4^{2011} \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.

a) Să se determine $f'(x)$, pentru orice $x\in R$.

b) Să se rezolve ecuaţia $f'(x) = 0$.

c) Să se stabilească intervalele de monotonie ale funcţiei f .

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in N^*}$, dat de $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,dx,\quad \forall n\in N^*$.

a) Să se calculeze I_2.

b) Să se calculeze I_3.

c) Să se verifice că $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}, \forall n\in N^*$.

Testul 3

SUBIECTUL I

1. Să se calculeze al zecelea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_1 = 1$ şi $a_2 = 3$.

2. Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -4x + 1$. Să se determine coordonatele punctului de intersecţie a graficelor celor două funcţii.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $25^{2x+1} - 5^{2011} = 0$.

4. Să se demonstreze egalitatea $C_{x+1}^{y+1} = \dfrac{x+1}{y+1} C_x^y$, $\forall x, y \in \mathbb{N}^*$, $x \geq y$.

5. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC, ştiind că $AB = 3$ şi $m(\hat{C}) = 30^\circ$.

6. Să se calculeze $\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{3\pi}{4}$.

SUBIECTUL II

1. În $M_2(\mathbb{Q})$ se consideră submulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \middle| \, a^2 - 2b^2 = 1, a, b \in \mathbb{Q} \right\}$.

a) Să se arate că $I_2 \in G$.

b) Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.

c) Să se arate că mulţimea G conţine cel puţin 2011 elemente.

2. Pe mulţimea numerelor reale definim legea de compoziţie $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$.

a) Să se arate că $x \circ y = (x-2)(y-2) + 2$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că $x \circ 2 = 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Ştiind că legea de compoziţie este asociativă, să se calculeze valoarea expresiei $E = (-2011) \circ (-2010) \circ \ldots \circ (-2) \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ 2 \circ \ldots \circ 2010 \circ 2011$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x \in R$.

b) Să se studieze semnul funcţiei f'.

c) Să se determine punctele de inflexiune al graficului funcţiei f.

2. Se consideră $I_n = \displaystyle\int_2^3 \frac{x^n}{x^2 - 1} dx$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se verifice că $I_0 = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{3}{2}$.

b) Să se determine I_1.

c) Să se demonstreze că $I_{n+2} - I_n = \dfrac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Testul 4

SUBIECTUL I

1.Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-6$. Să se calculeze $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(10)$.

2. Să se determine valorile reale ale lui m ştiind că soluţiile x_1 şi x_2 ale ecuaţiei $x^2-mx-m-6=0$ verifică relaţia $4(x_1+x_2)+x_1x_2=0$.

3. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_3(x^2-4x+4)=2$.

4. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţia $x\cdot A_5^3\le 300$.

5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-1,-1)$, $B(1,1)$ şi $C(0,-2)$. Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic în A.

6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB=4$, $AC=\sqrt{7}$ şi $BC=\sqrt{3}$. Să se calculeze măsura unghiului B.

SUBIECTUL II

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ şi funcţia $f:M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})$, $f(X)=AX-XA$.

a) Să se calculeze $f(O_2)+f(I_2)$.

b) Să se arate că $f(aX)=af(X)$, $\forall X\in M_2(\mathbb{R})$ şi $\forall a\in\mathbb{R}$.

c) Să se arate că $f(X+Y)=f(X)+f(Y)$, $\forall X,Y\in M_2(\mathbb{R})$.

2. Fie $f=\hat{3}X^5+\hat{3}X^3+\hat{3}X+\hat{4}$, $g=\hat{3}X^3+\hat{3}X^2+\hat{2}X+\hat{3}$ polinoame din inelul $\mathbb{Z}_5[X]$.

a) Să se calculeze $f(\hat{0})+f(\hat{1})$.

b) Să se rezolve în inelul $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ ecuaţia $f(x)=\hat{0}$.

c) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul g.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

a) Să se determine $f'(x)$ şi să se rezove ecuaţia $f'(x)=0$.

b) Să se stabilească intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c) Să se stabilească asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

a) Să se determine $\int_0^1 f(x)\cdot e^{-x}\,dx$.

b) Să se arate că $\int_0^1 f''(x)\,dx=2e-1$.

c) Să se calculeze $\int_1^2 \dfrac{f(x^2)}{x}\,dx$.

Testul 5

SUBIECTUL I

1. Să se determine mulţimea valorilor reale ale lui x pentru care $-4<3x+2<4$.

2. Să se arate că soluţiile x_1 şi x_2 ale ecuaţiei $x^2-(m+1)x+m=0, \quad m\in\mathbb{R}$, verifică relaţia $x_1+x_2-x_1x_2=1$.

3. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $3^{-2x-1}=3^{x^2}$.

4. Să se calculeze probabilitatea ca un element al mulţimii $\{0,1,2,...,20\}$ să fie divizibil cu 9.

5. Să se determine coordonatele punctului M, mijlocul segmentului AB, ştiind că $\overrightarrow{OA}=3\vec{i}+4\vec{j}$ şi $\overrightarrow{OB}=7\vec{i}+2\vec{j}$.

6. Se consideră triunghiul echilateral ABC cu latura de lungime 10.
Să se determine lungimea înălţimii triunghiului ABC.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$.

a) Să se găsească o matrice nenulă $U=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in M_{3,1}(\mathbb{C})$ cu proprietatea $AU=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

b) Să se găsească o matrice nenulă $C\in M_{3,3}(\mathbb{C})$ cu proprietatea $AC=O_3$.

c) Să se arate că nu există o matrice $V=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in M_{3,1}(\mathbb{C})$ cu proprietatea $AV=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale definim legea de compoziţie $x\circ y=xy-x-y+2$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$, oricare ar fi $x,y,z\in\mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că $x\circ y=(x-1)(y-1)+1$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\frac{\sqrt{1}}{2}\circ\frac{\sqrt{2}}{2}\circ...\circ\frac{\sqrt{2011}}{2}$.

SUBIECTUL III

1. 6. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2e^x$.

a) Să se determine $f'(x)$ şi să se rezove ecuaţia $f'(x)$.

b) Să se stabilească intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c) Să se demonstreze că există $c\in(-2,0)$ astfel încât $f''(c)=0$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$.

a) Să se verifice că $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx=e-1$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 x\,f(x)\,dx$.

c) Să se demonstreze că $1 \le \int_0^1 f(x)\,dx \le e$.

Testul 6

SUBIECTUL I

1. Să se calculeze $\lg 20 + \lg 3 - \lg 6$.

2. Să se determine valoarea parametrului real m, ştiind că soluţiile x_1 şi x_2 ale ecuaţiei $x^2 - (m-1)x - m = 0$ verifică egalitatea $2(x_1x_2 + 4) = x_1 + x_2$.

3. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_2(x-3) = 0$.

4.Să se calculeze probabilitatea ca un element din mulţimea $M = \{1, 2, 3, ..., 100\}$ să fie pătrat perfect.

5. Să se determine aria cercului înscris în pătratul de latură 2.

6. Să se dea un exemplu de număr natural n pentru care $\cos\frac{n\pi}{12} = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL II

1. În mulţimea $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ şi $X(a) = I_2 + aA$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze A^3.

b) Să se verifice dacă $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + ab)$, oricare ar fi numerele $a, b \in \mathbb{R}$.

c) Să se calculeze suma $X(1) + X(2) + X(3) + ... + X(2011)$.

2. Se consideră polinoamele $f = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ şi $g = X^2 - 2X + 1$, cu rădăcinile $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $S - S'$, unde $S = x_1 + x_2 + x_3$ şi $S' = y_1 + y_2$.

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului f la g.

c) Să se calculeze produsul $f(y_1) \cdot f(y_2)$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f : \mathrm{R} - \{1\} \to \mathrm{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$.

a) Să se determine $f'(x)$ şi să se rezove ecuaţia $f'(x) = 0$.

b) Să se stabilească intervalele de concavitate şi convexitate ale funcţiei f.

c) Să se stabilească asimptota spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcţiile $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)e^x$ şi $F(x) = x \cdot e^x$.

a) Să se arate că funcţia F este o primitivă pentru funcţia f.

b) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei F, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 1$.

c) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{F(x) - f(x)}{e^x + 1}\,dx$.

Testul 7

SUBIECTUL I

1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ de raţie 2 şi cu $a_3+a_4=8$. Să se determine a_1.

2. Se consideră ecuaţia $x^2-3x+1=0$, cu rădăcinile x_1 şi x_2. Să se arate că $x_1^2+x_2^2\in\mathbb{N}$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^x+25^x=30$.

4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element din mulţimea $A=\{11,12,13,...,20\}$, acesta să fie număr prim.

5. Să se demonstreze că patrulaterul MNPQ cu vârfurile $M(2,0)$, $N(6,4)$, $P(4,6)$ şi $Q(0,2)$ este dreptunghi.

6. Dacă $\sin x=\dfrac{1}{2}$, să se determine $\cos^2 x$.

SUBIECTUL II

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(7,4)$, $B(a,a)$ şi $C(3,-2)$ unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Pentru $a=0$ să se calculeze aria triunghiului ABC.

b) Pentru $a=-2$ să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctele B şi C.

c) Să se determine $a\in\mathbb{R}$, astfel încât punctele B,C şi $M(x,-2)$ sunt coliniare, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale definim legea de compoziţie $x\circ y=3xy+3x+3y+2$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că $x\circ y=3(x+1)(y+1)-1$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine numărul real x pentru care $(x^2-5)\circ 6=-1$.

c) Să se detemine două numere $a,b\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ astfel încât $a\circ b\in\mathbb{N}$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)^3-x^3$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c) Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x+2}$.

a) Să se calculeze $\int f^2(x)dx$.

b) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

c) Folosind, eventual, faptul că $\sqrt{x+2}\leq\sqrt{3}$ pentru orice $x\in[0,1]$, să se arate că $\int_0^1 x^{2011}f(x)dx\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2012}$.

Testul 8

SUBIECTUL I

1. Să se calculeze suma $1+5+9+...+45$.

2. Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^2-4x+1$, $g(x)=2x-1$. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f(x)+2g(x)=-1$.

3. Să se determine numărul real pozitiv x dacă $\lg x+\lg 2=\lg 6$.

4. După o reducere cu 10% un produs costă 99 lei. Să se determine preţul produsului înainte de reducere.

5. Să se dea un exemplu de dreaptă paralelă cu dreapta de ecuaţie $y-3x-3=0$.

6. Să se determine $\cos\alpha$ **,** ştiind că $\sin\alpha=\frac{3}{5}$**,** $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

SUBIECTUL II

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ şi $A_n(n,n+2), n\in\mathbb{N}$.

a) Să se determine ecuaţia dreptei A_0A_1.

b) Să se demonstreze că punctele A_0, A_1, A_2 sunt coliniare.

c) Să se arate că aria triunghiului OA_nA_{n+1} nu depinde de numărul natural n.

2. Fie $f=X^3+aX^2+X+\hat{1}$, $g=X+\hat{3}$ polinoame din inelul $\mathbb{Z}_5[X]$.

a) Să se determine $a\in\mathbb{Z}_5$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g.

b) Pentru $a=\hat{1}$ să se arate că $f=\left(X+\hat{1}\right)\left(X^2+\hat{1}\right)$.

c) Pentru $a=\hat{1}$ să se rezolve în inelul $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ ecuaţia $f(x)=\hat{0}$.

SUBIECTUL III

1. Se considerã funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2^x$.

a) Să se calculeze $f'(x), f''(x)$.

b) Să se arate că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+2, & x\le 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$.

a) Să se arate că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f este convexă pe $(1,\infty)$.

c) Să se calculeze $\int_0^e f(x)dx$.

Testul 9

SUBIECTUL I

1. Să se găsească două numere iraţionale $a \neq b$, pentru care $a \cdot b \in \mathbb{Q}$.

2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât minimul funcţiei $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + m$ să fie egal cu 1.

3. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $3^{x-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}$.

4. Să se determine preţul de vânzare într-un magazin al unui frigider dacă cheltuielile de producţie s-au ridicat la 1100 iar procentul TVA este 24%.

5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-1,-5)$, $B(5,3)$ şi $C(5,-5)$. Să se determine coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC.

6. Să se determine lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic, ştiind că suma acestora este 23, iar aria triunghiului este 60.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cu $x, y \in \mathbb{R}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\det(A) = 0$.

b) Pentru $a = 3$ să se verifice că $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Pentru $a = 3$ să se rezolve ecuaţia matriceală $A \cdot X = B$.

2. Pe mulţimea $G = (3, \infty)$ se consideră legea de compoziţie $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$. Fie funcţia $f:(0,\infty) \to G$, $f(x) = x + 3$.

a) Să se demonstreze că legea "$\circ$" este asociativă.

b) Să se demonstreze că $(G, \circ)$ este grup comutativ.

c) Să se arate că funcţia f este un izomorfism de la grupul $((0,\infty), \cdot)$ la $(G, \circ)$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^4 - x^4$.

a) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Să se determine punctul de inflexiune al graficului funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + e^x, & x \leq 0 \\ \sqrt{x} + 1, & x > 0 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_{-1}^{0} x f(x)\,dx$.

c) Să se determine volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei Ox, a graficului funcţiei $g:[0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

Testul 10

SUBIECTUL I

1. Să se arate că $\log_2(\log_3 9)$ este un număr întreg.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3$. Să se rezolve inecuaţia $f(x)\le 12$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x^2+x+1}=8$.

4. Se consideră mulţimea $A=\{1,2,3,...,10\}$. Să se determine numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii A.

5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-1,-5)$, $B(5,3)$.Să se determine coordonatele simetricului punctului A faţă de punctul B.

6. Să se calculeze $\lg(tg40^\circ)\cdot\lg(tg41^\circ)\cdot...\cdot\lg(tg45^\circ)$.

SUBIECTUL II

1. 13. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+3y+2z=b \\ x-2y+az=5 \\ x+y+4z=4 \end{cases}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze determinantul matricei asociate sistemului.

b) Pentru $a=-1$ şi $b=2$ să se rezolve sistemul.

c) Să se determine numărul real b, ştiind că (x_0,y_0,z_0) este soluţie a sistemului şi că $x_0+y_0+z_0=4$.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}\}$.

a) Să se rezolve în $\mathbb{Z}_6$ ecuaţia $\hat{2}x+\hat{5}=\hat{1}$.

b) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix}$ în $\mathbb{Z}_6$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{Z}_6$ sistemul de ecuaţii $\begin{cases} \hat{2}x+y=\hat{4} \\ x+\hat{2}y=\hat{5} \end{cases}$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+1}$.

a) Să se determine $f'(x)$.

b) Să se stabilească intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

2. Se consideră funcţiile $f,F:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$ şi $F(x)=(x+1)\ln x-x+1$.

a) Să se arate că funcţia F este o primitivă pentru funcţia f.

b) Să se calculeze $\int_1^2 f(e^x)\,dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_1^2 f(x)F(x)\,dx=\dfrac{(3\ln 2-1)^2}{2}$.

Testul 11

SUBIECTUL I

1. Să se dea un exemplu de numere reale a şi b pentru care $\log_8(a-1)-\log_8(b+1)=0$.

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(50)$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=1$.

4. Să se calculeze $C_5^3-C_5^2+C_5^5$.

5. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât dreptele $d_1: x+y-1=0$ şi $d_2: 2x+ay+3=0$ să fie paralele.

6. Să se arate că $\left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\right)^{-1}$ este număr întreg.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine x real ştiind că $\det(A)=0$.

b) Să se verifice egalitatea $A^2=(2x-6)A-(x^2-6x+8)\cdot I_2$.

c) Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $A^2=2A$.

2. Se consideră mulţimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix} \middle| a,b,c\in\mathbb{Z}_4\right\}$.

a) Să se determine numărul elementelor mulţimii G.

b) Să se dea un exemplu de matrice $A\in G$ cu proprietatea că $\det A\neq\hat{0}$ şi $\det A^2=\hat{0}$.

c) Să se determine numărul soluţiilor ecuaţiei $X^2=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $X\in G$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-e\cdot\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,\infty)$.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f .

c) Să se arate că $f(x)\geq 0$, $\forall\ x\in(0,\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

a) Să se determine $\int f(x)dx$, unde $x>0$.

b) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox, a graficului funcţiei $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$, $x\in[1,2]$.

c) Să se calculeze $\int_1^e f(x)\ln x\,dx$.

Testul 12

SUBIECTUL I

1. Să se calculeze $A_5^3 + 2C_4^2$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$. Să se calculeze $f(0)\cdot f(1)\cdot...\cdot f(2011)$.

3. Să se determine cel mai mare număr întreg m pentru care $3^m<30$.

4. Să se arate că numărul $\dfrac{8!}{3!\cdot 5!}-\dfrac{9!}{2!\cdot 7!}$ este natural.

5. Se consideră punctele $A(1,a)$, $B(2,-1)$, $C(3,2)$ şi $D(1,-2)$. Să se determine numărul real a ştiind că dreptele AB şi CD sunt paralele.

6. Să se calculeze produsul $\cos 1^\circ\cdot\cos 2^\circ\cdot...\cos 179^\circ$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră determinantul $D(a)=\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & a & 1\\ a & 1 & 1\end{vmatrix}$, unde a este un număr real.

a) Să se calculeze valoarea determinantului pentru $a=-1$.

b) Să se demonstreze că $D(a)=-(a-1)^2(a+2)$, pentru orice a număr real.

c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $D(a)=-4$.

2. Se consideră mulţimea $M=\left\{A(a)=\begin{pmatrix}a & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\\ a & 0 & a\end{pmatrix}, a\in\mathbb{R}\right\}$.

a) Să se verifice dacă $A(a)\cdot A(b)=A(2ab)$, oricare ar fi numerele a şi b.

b) Să se arate că $A\left(\dfrac{1}{2}\right)$ este element neutru faţă de operaţia de înmulţire a matricelor pe M.

c) Să se determine simetricul elementului $A(1)\in M$ în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor pe M.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\dfrac{1}{e^x}$.

a) Să se calculeze $f(0)+f'(0)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)+f'(x)}{x}$.

c) Să se arate că funcţia f este concavă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 (x^2+1)f(x)dx$.

b) Să se verifice că $\int_0^1 f(x)dx=\ln(2e)$.

c) Să se arate că $\int_0^1 f'(x)\cdot e^{f(x)}\,dx = e(e-1)$.

Testul 13

SUBIECTUL I

1. Să se determine primul termen al progresiei aritmetice $a_1, a_2, 13, 17, \ldots$.

2. Să se determine valorile reale ale lui m ştiind că soluţiile x_1 şi x_2 ale ecuaţiei $x^2 - mx + 1 - m = 0$ are două rădăcini reale distincte.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+1} = x-1$.

4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulţimea numerelor de două cifre, să avem $a \neq b$.

5. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(3,0)$ şi intersectează axa Oy în punctul de ordonată 4.

6. Să se calculeze raza cercului circumscris unui triunghi care are lungimile laturilor de 6, 8 şi 10.

SUBIECTUL II

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $A + A^2 = 2A$.

b) Să se determine matricele $X \in M_2(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, astfel încât $\det(X + A) = 2$.

c) Ştiind că $A^n = A$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, să se demonstreze că $A + 2A^2 + \ldots + nA^n = \dfrac{n(n+1)}{2} A$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră mulţimea de matrice $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & a & \hat{0} \\ b & c & a \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$.

a) Să se determine numărul elementelor mulţimii A.

b) Să se arate că, pentru orice $X \in A$, $X^2 = I_3$ sau $X^2 = O_3$.

c) Să se determine numărul matricelor X din mulţimea A care au proprietatea $X^2 = O_3$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x \in (0,\infty)$.

b) Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(1,0)$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{x}$.

2. Fie $I_n = \int_1^2 x^n \cdot e^x\,dx$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze I_0.

b) Să se arate că $I_1 = e^2$.

c) Să se arate că $(n+1)I_n + I_{n+1} = e\left(2^{n+1}e-1\right)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Testul 14

SUBIECTUL I

1. Să se calculeze $\log_2 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \sqrt[3]{8}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = -2x+3$. Să se arate că numerele $f(1)$, $f(0)$ şi $f(-3)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

3. Să se determine numerele naturale a pentru care $\sqrt{6-a} = 4-a$.

4. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $C_3^1 + xC_4^3 + 3 = 0$.

5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(3,0)$, $B(0,4)$. Să se calculeze distanţa de la punctul O la dreapta AB.

6. Să se arate că $\sin 40^\circ \cdot \sin 140^\circ = \cos^2 130^\circ$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ cu $a,b,c \in \mathbb{R}$.

a) Pentru $a=-1, b=0, c=1$, să se calculeze determinantul Δ.

b) Să se arate că $\Delta = (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right), \forall a,b,c \in \mathbb{R}$.

c) Să se rezolve ecuaţia $\begin{vmatrix} 2^x & 1 & 1 \\ 1 & 2^x & 1 \\ 1 & 1 & 2^x \end{vmatrix} = 0,\ x \in \mathbb{R}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se de legea de compoziţie $x \circ y = -xy + 2x + 2y - 2$.

a) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x \circ 4 = 10$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \circ a = a \circ x = a$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

c) Ştiind că legea este asociativă să se calculeze $\frac{1}{2011} \circ \frac{2}{2011} \circ \ldots \circ \frac{4022}{2011}$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (1,\infty)$.

b) Să se verifice că $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -1$.

c) Să se arate că funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(1,\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:[-4,4]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{16-x^2}$.

a) Să se calculeze $\int_0^4 f^2(x)\,dx$.

b) Să se verifice că $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{f(x)} dx = 0$.

c) Să se demonstreze că $0 \le \int_0^m f(x) dx \le 8$, oricare ar fi $m \in [0,2]$.

Testul 15

SUBIECTUL I

1. Să se arate că numărul $\log_2 3 + \log_2 48 - \log_2 18$ este natural.

2. Să se determine coordonatele punctelor de intersecţie a graficelor funcţiilor $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x - 1$ şi $g(x) = x + 4$.

3. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_5(9 - x^2) = 1$.

4. După două scumpiri succesive cu 10%, respectiv 20% preţul unui produs este de 660lei. Să se determine preţul iniţial al produsului.

5. Să se determine coordonatele punctului B, ştiind că $A(3,4)$ şi $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + \vec{j}$.

6. Să se calculeze aria triunghiului cu laturile 12, 5 şi 13.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se notează $X^2 = X \cdot X$.

a) Să se calculeze $A \cdot B$.

b) Să se demonstreze că $(A + B)^2 = (A - B)^2 = A^2 + B^2$.

c) Să se calculeze inversa matricei $(A - B)^2$.

2. Se consideră $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ inelul claselor de resturi modulo 8.

a) Să se calculeze în $\mathbb{Z}_8$ suma $S = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} + \hat{7}$.

b) Să se calculeze în $\mathbb{Z}_8$ produsul elementelor inversabile ale inelului.

c) Să se rezolve în $\mathbb{Z}_8$ sistemul de ecuaţii $\begin{cases} \hat{2}x + \hat{5}y = \hat{2} \\ \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{5} \end{cases}$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + e^x$.

a) Să se verifice că $f'(0) = 1$.

b) Să se arate că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) Să se calculeze $\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{e^x}$.

2. Fie funcţia $f : [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{2}{x}$.

a) Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei f.

b) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei Ox, a graficului funcţiei f.

c) Să se calculeze $\int_1^2 f(x)\cdot \ln x\,dx$.

Testul 16

SUBIECTUL I

1. Să se calculeze $C_{12}^3 - C_{12}^9$.

2. Ştiind că x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2+3x+1=0$, să se calculeze $x_1^3+x_2^3$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{\sqrt{x-1}}=4$.

4. Să se calculeze probabilitatea ca un element $n\in\{1,2,3,4,5\}$ să verifice relaţia $3^n+4^n>5^n$.

5. Să se calculeze aria unui triunghi echilateral pentru care două dintre vârfuri sunt $A(4,3)$ şi $B(8,6)$.

6. Să se calculeze lungimea diagonalei pătratului cu perimetrul 20.

SUBIECTUL II

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ şi $A_n(n,2^n), n\in\mathbb{N}$.

a) Să se demonstreze că punctele O, A_1, A_2 sunt coliniare.

b) Să se determine numărul de drepte care trec prin cel puţin două dintre punctele O, A_0, A_1, A_2.

c) Să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele $A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, n\in\mathbb{N}$.

2. Pe mulţimea numerelor întregi definim legile de compoziţie $x*y=x+y-3$ şi $x\circ y=xy-3x-3y+12$.

a) Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x\circ x=x*x$.

b) Să se determine numărul întreg a cu proprietatea că $x\circ a=3$, oricare ar fi numărul întreg x.

c) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x*(y+1)=4 \\ (x-y)\circ 1=5 \end{cases}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-x+1$.

a) Să se calculeze $f'(1)$.

b) Să se determine punctul de extrem al funcţiei f.

c) Să se arate că $2-e\le f(2)\le 0$.

2. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{e^x}$ şi $g(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^x}$.

a) Să se verifice că funcţia g este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_0^1 f'(x)g'(x)\,dx=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Testul 17

SUBIECTUL I

1. Să se determine elementele mulţimii $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,2x+1\geq 3x-2\right\}$.

2. Se consideră progresia aritmetică $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ în care $a_1=7$ şi $a_7=37$. Să se calculeze suma primilor 10 termeni ai progresiei.

3. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{4x^2+6x+3}=x+2$.

4. Să se determine numărul natural n dacă $A_n^2=42$.

5. Să se determine panta dreptei determinate de punctele $A\left(-1,-1\right)$ şi $B\left(3,3\right)$.

6. Să se calculeze aria unui triunghi dreptunghic care are un unghi de măsură 60° şi ipotenuza de lungime 8.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze det A.

b) Să se verifice relaţia $A\left(A^2+6I_3\right)=O_3$.

c) Să se arate că $\det\left(I_3+xA^2\right)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul cu coeficienţi reali $f=5X^3+14X^2+7X-2$.

a) Să se calculeze $f(-2)$.

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii lui f la $X+2$.

c) Să se rezolve ecuaţia $f(x)=0$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f:\left(0,\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x-2\right)\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x),\quad x\in\left(0,\infty\right)$.

b) Să se determine $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x^2}$.

2. Se consideră funcţiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=e^x+x^2+2x$ şi $F\left(x\right)=e^x+\dfrac{x^3}{3}+x^2+1$.

a) Să se arate că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f\left(x\right)dx$.

c) Să se calculeze aria suprafeţei plane mărginite de graficul funcţiei $h:[0,1]\to\mathbb{R}$,
$h(x)=\dfrac{f(x)-x^2-2x}{e^x+1}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

Testul 18

SUBIECTUL I

1. Dacă într-o progresie geometrică primul termen este -2 şi raţia 2, să se calculeze termenul al patrulea.
2. Să se demonstreze că pentru orice număr real a, ecuaţia de gradul al doilea
$x^2-(2\sin a)x+1-\cos^2 a=0$ admite soluţii reale egale.
3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x=\sqrt{2-x}$.
4. Să se calculeze în câte moduri se pot alege două persoane dintr-un grup format din 6 persoane.
5. Să se determine numărul real m pentru care vectorii $\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\vec{w}=-\vec{i}+m\vec{j}$ sunt coliniari.
6. Să se determine semnul numărului $\sin\dfrac{\pi}{3}-\cos\dfrac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.
a) Să se calculeze A^2.
b) Să se verifice că $AB-2B=O_2$.
c) Să se arate că dacă $X\in M_2(\mathbb{R})$ şi $A\cdot X\cdot B=O_2$, atunci suma elementelor matricei X este egală cu zero.
2. Pe mulţimea numerelor reale definim legile de compoziţie $x\circ y=x+y+3$,
$x*y=xy-3(x+y)+12$.
a) Să se verifice că $x*y=(x-3)(y-3)+3$, oricare ar fi $x,y\in R$.
b) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia: $\big(x\circ(x+1)\big)+\big(x*(x+1)\big)=11$.
c) Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x\circ(y-1)=0\\ (x+1)*y=x*(y+1)\end{cases}$, $x,y\in R$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x-x\ln 2$.
a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.
b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$.
c) Să se determine punctul de extrem al funcţiei f.
2. Se consideră funcţiile $f,F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\dfrac{x-1}{x}$ şi $F(x)=e^x+x-\ln x$.
a) Să se arate că funcţia F este o primitivă pentru funcţia f.

b) Să se calculeze $\int_1^2 x\left(F(x)-x+\ln x\right)dx$.

c) Să se determine parametrul real m astfel încât aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=e$ să fie egală cu e^m-2.

Soluţii

Testul 1

I. 1) $\left(1+\sqrt{3}\right)^2+\left(1-\sqrt{3}\right)^2=8\in\mathbb{N}$. **2)** $a_4=a_1+3r\Rightarrow r=2\Rightarrow x=3$.

3) $S=\{3,-5\}$. **4)** $C_3^2\cdot C_4^1+C_3^1\cdot C_4^2=30$ posibile echipe.

5) Se pune condiţia ca punctul $\{M(1,1)\}=d_1\cap d_2$ să aparţină dreptei d_3 de unde rezultă $a=-2$. **6)** $S=\dfrac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}=8\sqrt{2}$.

II. 1. a) $(A_0A_1):\begin{vmatrix} x & y & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow x-y=0$; **b)** $\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 1\end{vmatrix}=2\Rightarrow S=1$;

c) $\Delta=\begin{vmatrix} m & m^2 & 1\\ n & n^2 & 1\\ p & p^2 & 1\end{vmatrix}=(p-n)(n-m)(p-m)$. Vom arăta că Δ este număr par. Deoarece două ditre cele trei numere au aceeaşi paritate rezultă că cel puţin o paranteză este număr par , deci Δ este număr par şi astfel pentru orice $m,n,p\in\mathbb{N}$, distincte două câte două, aria triunghiului $A_mA_nA_p$ este număr natural.

2. a) ecuaţia $x^2-x-2=0$ are soluţiile $x_1=-1, x_2=2$;

b) $f\,\vdots\,g\Rightarrow f(-1)=f(2)=0\Rightarrow m=-4,\ n=1$;

c) Din $f(2)=0\Rightarrow P=f(0)\cdot f(1)\cdot\ldots\cdot f(2010)\cdot f(2011)=0$.

III. 1) a) $f'(x)=2^x\ln 2+3^x\ln 3$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2^x+3^x\right)=0+0=0$, dreapta de ecuaţie $y=0$ este asimptotă orizontală la $-\infty$.

c) $f''(x)=2^x(\ln 2)^2+3^x(\ln 3)^2>0, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. a) $\int_0^1\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1 e^x\,dx=e^x\Big|_0^1=e-1$.

b) $A=\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx=\dfrac{1}{2}\int_1^2\sqrt{t}\,dt=\dfrac{1}{3}t\sqrt{t}\Big|_1^2=\dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$.

c) $\int_{-1}^1\sqrt{x^2+1}\cdot f(x)dx=\int_{-1}^1\left(x^2+1\right)\cdot e^x dx=\left(x^2+1\right)e^x\Big|_{-1}^1-2\left[xe^x\Big|_{-1}^1-e^x\Big|_{-1}^1\right]=$

$=2e-\dfrac{6}{e}$.

Testul 2

I. 1) $a_8 = a_2 + 6r = 5 + 18 = 23$.

2) $f(5) = 0 \Rightarrow f(-5)\cdot f(-4)\cdot\ldots\cdot f(0)\cdot\ldots\cdot f(4)\cdot f(5) = 0$.

3) Punem condiţiile de existenţă $x^2 - 2x > 0,\ 2x - 3 > 0$.

$\log_3(x^2 - 2x) = \log_3(2x-3) \Leftrightarrow x^2 - 2x = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$x \in \{1,3\}$. Deoarece $x = 1$ nu verifică condiţiile rezultă $S = \{3\}$.

4) $A_4^3 - A_3^2 = 24 - 6 = 18$.

5) $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(5-a)^2 + (2+a)^2} = \sqrt{2a^2 - 6a + 29}$.

$AB = 5 \Leftrightarrow 2a^2 - 6a + 29 = 25 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow a \in \{1,2\}$.

6) $\sin^2 120^\circ + \cos^2 60^\circ = \sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ = 1$.

II. 1. a) $I_2 = A(1) \Rightarrow I_2 \in M$ **.**

b) $A(x)\cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x-1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y-1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ xy-1 & xy \end{pmatrix} = A(x\cdot y)$.

c) $A(x)\cdot A(y) = A(x\cdot y) = A(y\cdot x) = A(y)\cdot A(x)$.

2. a) $(X^2-1)(X^2-4)-1 = X^4 - 5X^2 + 3 = f$;

b) $x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}},\ x_{3,4} = \pm\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}}$;

c) $x_1^{2011} + x_2^{2011} + x_3^{2011} + x_4^{2011} = x_1^{2011} + (-x_1)^{2011} + x_3^{2011} + (-x_3)^{2011} = 0$.

III. 1) a) $f'(x) = (xe^x)' = e^x(x+1)$. **b)** $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

c)

x	$-\infty$		-1		∞
$f'(x)$	- - - - - - - - -		0	+ + + + + +	
$f(x)$	$\searrow$ $\searrow$ $\searrow$		$\underbrace{-\dfrac{1}{e}}_{\min}$	$\nearrow$ $\nearrow$ $\nearrow$	

f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty,-1]$ şi strict crescătoare pe $[-1,+\infty)$.

2. a) $I_2 = \int_0^1 \dfrac{x^2}{x^2+1}dx = \int_0^1 \left(1 - \dfrac{1}{x^2+1}\right)dx = (x - arctgx)\Big|_0^1 = 1 - \dfrac{\pi}{4}$.

b) $I_3 = \int_0^1 \dfrac{x^3}{x^2+1}dx = \int_0^1 \left(x - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x}{x^2+1}\right)dx = \left(x - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)\Big|_0^1 = 1 - \dfrac{\ln 2}{2}$.

c) $I_{n+2} + I_n = \int_0^1 \dfrac{x^{n+2}}{x^2+1}dx + \int_0^1 \dfrac{x^n}{x^2+1}dx = \int_0^1 \dfrac{x^n(x^2+1)}{x^2+1}dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{n+1}$.

Testul 3

I. 1) $r = 2 \Rightarrow a_{10} = a_1 + 9r = 1 + 18 = 19$.

2) $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=-4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-1 \\ 2x-1=-4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}$, rezultă $M\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

3) $25^{2x+1}-5^{2011}=0 \Leftrightarrow 5^{4x+2}=5^{2011} \Leftrightarrow 4x+2=2011 \Leftrightarrow x=\frac{2009}{4}$.

4) $C_{x+1}^{y+1}=\frac{(x+1)!}{(x-y)!\cdot(y+1)!}=\frac{x+1}{y+1}\cdot\frac{x!}{(x-y)!\cdot y!}=\frac{x+1}{y+1}C_x^y$.

5) $\frac{c}{\sin C}=2R \Leftrightarrow \frac{3}{\sin 30^\circ}=2R \Leftrightarrow R=3$.

6) $\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}=\cos 45^\circ+\cos\left(180^\circ-45^\circ\right)=\cos 45^\circ-\cos 45^\circ=0$.

II. 1. a) $X(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$; $I_2=X(1,0), 1^2-2\cdot 0^2=1 \Rightarrow I_2 \in G$.

b) Fie $A,B\in G \Rightarrow A=X(a,b), B=X(c,d), a^2-2b^2=1, c^2-2d^2=1$,

atunci $A\cdot B=X(ac+2bd, ad+bc)$. Pentru ca $A\cdot B\in G$ trebuie să mai arătăm că

$(ac+2bd)^2-2(ad+bc)^2=1$. Într-adevăr $(ac+2bd)^2-2(ad+bc)^2=\left(a^2-2b^2\right)\left(c^2-2d^2\right)=1\cdot 1=1$.

c) Fie $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\in G$ şi şirul de matrice din G distincte două câte două $A, A^2, A^3, \ldots A^n, \ldots$ de unde rezultă că G are o infinitate de elemente deci G conţine cel puţin 2011 elemente.

2. a) Se verifică prin calcul. **b)** $x\circ 2=2=(x-2)(2-2)+2=2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

c) $E=(-2011)\circ(-2010)\circ\ldots\circ(-2)\circ(-1)\circ 0\circ 1\circ 2\circ\ldots\circ 2010\circ 2011=$.

$=(a\circ 2)\circ b=2\circ b=2$.

III. 1) a) $f'(x)=\left(x^3-3x\right)'=3x^2-3=3\left(x^2-1\right)$.

b)

x	$-\infty$		-1		1		∞
$f'(x)$	+ + + +		0	- - - - -	0	+ + +	

c)

x	$-\infty$		0		∞
$f''(x)$	- - - - - - - -		0	+ + + + + +	

$x=0$ este punct de inflexiune

2. a) $I_0=\int_2^3\frac{1}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Big|_2^3=\frac{1}{2}\ln\frac{2}{4}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

b) $I_1=\int_2^3\frac{x}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\int_2^3\frac{2x}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|\Big|_2^3=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$.

c) $I_{n+2}-I_n=\int_2^3\frac{x^{n+2}}{x^2-1}dx-\int_2^3\frac{x^n}{x^2-1}dx=\int_2^3\frac{x^n\left(x^2-1\right)}{x^2-1}dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_2^3=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$.

Testul 4

I. 1) $f(2)=0 \Rightarrow f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(10)=0$.

2) $4(x_1+x_2)+x_1x_2=0 \Leftrightarrow 4m-m-6=0 \Leftrightarrow 3m=6 \Leftrightarrow m=2$.

3) Punem condiţia de existenţă $x^2-4x+4>0$.
$\log_3(x^2-4x+4)=2 \Leftrightarrow x^2-4x+4=3^2 \Leftrightarrow x^2-4x-5=0 \Leftrightarrow x\in\{-1,5\}$.

4) $x\cdot A_5^3\le 300 \Leftrightarrow 60x\le 300 \Leftrightarrow x\le 5$.

5) $m_{AB}\cdot m_{AC}=1\cdot(-1)=-1 \Rightarrow AB\perp AC \Rightarrow$ că triunghiul ABC este dreptunghic în A.

6) $\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow B=30^\circ$.

II. 1. a) $f(O_2)+f(I_2)=O_2+O_2=O_2$.

b) $f(aX)=A(aX)-(aX)A=a(AX-XA)=a\,f(X)$.

c) $f(X+Y)=A(X+Y)-(X+Y)A=AX+AY-XA-YA=f(X)+f(Y)$.

2. a) $f(\hat{0})+f(\hat{1})=\hat{4}+\hat{3}=\hat{2}$.

b) $f(\hat{0})=\hat{4}$, $f(\hat{1})=\hat{3}$, $f(\hat{2})=\hat{0}$, $f(\hat{3})=\hat{3}$, $f(\hat{4})=\hat{0} \Rightarrow S=\{\hat{2},\hat{4}\}$.

c) $c=X^2-X+\hat{3}$**;** $r=\hat{0}$**.**

III. 1) a) $f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$**,** $f'(x)=0 \Leftrightarrow x\in\{0,-2\}$**.**

b) Tabelul de variaţie al funcţiei este:

x	$-\infty$		-2		-1		0		∞
$f'(x)$		+ + + +	0	- - - -	/	- -	0	+ + + +	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow\nearrow\nearrow$	$\underbrace{-4}_{\text{max}}$	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	$\underbrace{0}_{\text{min}}$	$\nearrow\nearrow\nearrow$	$+\infty$

Din tabel observăm că f este strict crescătoare pe $(-\infty,-2)$ şi pe $(0,\infty)$, şi strict descrescătoare pe $(-2,-1)$ şi pe $(-1,0)$.

c) $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1,\ n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=-1$**,** rezultă că dreapta de ecuaţie $y=x-1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

2. a) $\int_0^1 f(x)\cdot e^{-x}\,dx=\int_0^1 e^x dx=e^x\Big|_0^1=e-1$.

b) $\int_0^1 f''(x)dx=\int_0^1 (f'(x))'\,dx=f'(x)\Big|_0^1=e^x(x+1)\Big|_0^1=2e-1$.

c) $\int_1^2 \dfrac{f(x^2)}{x}dx=\dfrac{1}{2}\int_1^2 2x\cdot e^{x^2}dx=\dfrac{1}{2}\int_1^2\left(e^{x^2}\right)'dx=\dfrac{1}{2}e^{x^2}\Big|_1^2=\dfrac{e^4-e}{2}$.

Testul 5

I. 1) $x \in \left(-2, \frac{2}{3}\right)$. **2)** $x_1 + x_2 - x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow m + 1 - m = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ (A).

3) $S = \{-1\}$. **4)** $p = \frac{c_f}{c_p} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$. **5)** $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 4\vec{j} \Rightarrow A(3,4)$ şi $\overrightarrow{OB} = 7\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow B(7,2) \Rightarrow M(5,3)$.

6) $h = l\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$.

II. 1. a) $AU = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + 2b + 3c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases}$; alegem $c = 3$ şi inlocuind obţinem $a = 3, b = -6$, deci $U = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

; **b)** $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; **c)** $AV = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$; Dacă scoatem z din prima ecuaţie şi înlocuim

în celelalte obţinem $0 = -4$ de unde rezultă că sistemul nu are soluţii deci nu există o matrice

$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{C})$ cu proprietatea $AV = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. a) Se verifică prin calcul. **b)** $(x-1)(y-1) + 1 = xy - x - y + 1 + 1 = x \circ y$.

c) $\frac{\sqrt{1}}{2} \circ \frac{\sqrt{2}}{2} \circ \ldots \circ \frac{\sqrt{2011}}{2} = \underbrace{\left(\frac{\sqrt{1}}{2} \circ \frac{\sqrt{2}}{2} \circ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{a} \circ \frac{\sqrt{4}}{2} \circ \underbrace{\left(\frac{\sqrt{5}}{2} \circ \frac{\sqrt{6}}{2} \circ \ldots \circ \frac{\sqrt{2011}}{2}\right)}_{b} =$

$= (a \circ 1) \circ b = 1 \circ b = 1$.

III. 1) $f'(x) = e^x(x^2 + 2x)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, -2\}$;

x	$-\infty$			-2			0		∞
$f'(x)$	+	+	+	+ 0	- -	- -	0 +	+	+ +
$f(x)$	↗	↗		$\underbrace{\frac{4}{e^2}}_{\text{max}}$	↘	↘	$\underbrace{0}_{\text{min}}$	↗	↗

Din tabel rezultă că f este strict crescătoare pe $(-\infty, -2]$, strict descrescătoare pe $[-2, 0]$, strict crescătoare pe $[0, \infty)$, $x = -2$ este punct de maxim şi $x = 0$ este punct de minim.

$f''(c) = 0 \Leftrightarrow c^2 + 4c + 2 = 0 \Leftrightarrow c \in \left\{-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}\right\}$, $c = -2 + \sqrt{2} \in (-2, 0)$.

2. a) $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx = \int_0^1 e^x dx = e - 1$.

b) $\int_0^1 x\, f(x)dx = \int_0^1 x e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2x e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{x^2}\right)' dx = \frac{1}{2} e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}$.

c) Dacă $0\le x\le 1\Rightarrow f(0)\le f(x)\le f(1)\Rightarrow 1\le f(x)\le e$. Din proprietatea de monotonie a integralei definite, obţinem că $1\le\int_0^1 f(x)dx\le e$.

Testul 6

I. 1) $\lg 20+\lg 3-\lg 6=\lg 60-\lg 6=\lg\frac{60}{6}=\lg 10=1$.

2) $2(x_1x_2+4)=x_1+x_2\Leftrightarrow 2(-m+4)=m-1\Leftrightarrow 3m=9\Leftrightarrow m=3$.

3) $\log_2(x-3)=0\Leftrightarrow x-3=2^0,\ x-3>0\Leftrightarrow x=5$.

4) Pătratele perfecte sunt: $1^2, 2^2,\dots,10^2$, $p=\frac{c_f}{c_p}=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}=0{,}1$.

5) $r=1\Rightarrow S=\pi r^2=\pi$. **6)** $n=4$.

II. 1. a) $A^3=A$.

b) $X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+(a+b+ab)A=X(a+b+ab)$.

c) $X(1)+X(2)+X(3)+\dots+X(2011)=2011\cdot I_2+(1+2+\dots+2011)A=$
$=2011\cdot I_2+1006\cdot 2011\cdot A$.

2. a) Aplicăm relaţiile lui Viète şi avem $S=-3, S'=2\Rightarrow S-S'=-5$.

b) $c=X+5,\ r=12X-4$. **c)** $y_1=y_2=1\Rightarrow f(y_1)\cdot f(y_2)=(f(1))^2=64$.

III. 1) a) $f'(x)=\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-2x-2=0,\ x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$.

b) $f''(x)=\frac{6}{(x-1)^3}$, rezultă f este concavă pe intervalul $(-\infty,1)$ şi f este convexă pe intervalul $(1,\infty)$.

c) $m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1,\ n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-m\cdot x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x-1}=2$, rezultă că dreapta de ecuaţie $y=x+2$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

2. a) F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F'(x)=(xe^x)'=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că F este o primitivă a funcţiei f.

b) $F(x)\ge 0,\forall x\in[0,1]\Rightarrow A=\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1 xe^x\,dx=(x-1)e^x\Big|_0^1=1$.

c) $\int_0^1\frac{F(x)-f(x)}{e^x+1}dx=\int_0^1\frac{-e^x}{e^x+1}dx=-\ln\left|e^x+1\right|\Big|_0^1=\ln\frac{2}{e+1}$.

Testul 7

I. 1) $a_3+a_4=8\Rightarrow a_1+2r+a_1+3r=8\Rightarrow 2a_1+5r=8\Rightarrow a_1=-1$.

2) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3^2-2\cdot 1=7\in\mathbb{N}$.

3) Notăm $5^x = t > 0$, ecuaţia devine $t^2 + t - 30 = 0$ cu soluţiile $t_1 = 5, t_2 = -6$ (nu convine), $5^x = t_1 \Leftrightarrow 5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow S = \{1\}$.

4) $p = \dfrac{c_f}{c_p} = \dfrac{4}{10} = 0,4$.

5) Se arată că laturile opuse sunt egale de unde rezultă că este paralelogram şi apoi se arată că are un unghi drept($m_{MN} \cdot m_{NP} = -1$).

6) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \dfrac{3}{4}$.

II. 1. a) $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 26 \Rightarrow A_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot |\Delta| = 13$.

b) Din $y_B = y_C = -2 \Rightarrow BC \parallel Ox \Rightarrow (BC): y = -2$.

c) $\Delta = \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ x & -2 & 1 \end{vmatrix} = (a+2)(x-3)$; $\Delta = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow a = -2$.

2. a) $3(x+1)(y+1) - 1 = 3xy + 3x + 3y + 2 = x \circ y$.

b) $(x^2 - 5) \circ 6 = -1 \Leftrightarrow 21(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$.

c) $3(a+1)(b+1) - 1 \in \mathbb{N}$, luăm $a + 1 = \dfrac{4}{3},\ b + 1 = \dfrac{3}{4} \Rightarrow a = \dfrac{1}{3},\ b = -\dfrac{1}{4}$. Deci am găsit două numere $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $a = \dfrac{1}{3},\ b = -\dfrac{1}{4}$ astfel încât $a \circ b = 2 \in \mathbb{N}$.

III. 1) a) $f'(x) = \left(3x^2 + 3x + 1\right)' = 6x + 3$.

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$			$-\frac{1}{2}$			∞
$f'(x)$	- - -	- - -	- - -	0	+ +	+ +	+ +
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\underbrace{-\frac{1}{e}}_{\min}$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

f este strict descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$ şi strict crescătoare pe $\left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

c) $f''(x) = 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. a) $\int f^2(x)\,dx = \int (x+2)\,dx = \dfrac{x^2}{2} + 2x + C$.

b) $f(x) \geq 0, \forall x \in [0,1] \Rightarrow A = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{x+2}\,dx = \dfrac{2\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right)}{3}$.

c) $\int_0^1 x^{2011} f(x)\,dx \le \int_0^1 x^{2011}\sqrt{3}\,dx = \sqrt{3}\,\frac{x^{2012}}{2012}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2012}$.

Testul 8

I. 1) $1+5+9+...+45 = \frac{(1+45)12}{2} = 276$.

2) $f(x)+2g(x)=-1 \Leftrightarrow 4x^2-4x+1+2(2x-1)=-1 \Leftrightarrow 4x^2=0 \Leftrightarrow x=0$.

3) $\lg x+\lg 2=\lg 6 \Leftrightarrow \lg 2x=\lg 6 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=3$, $S=\{3\}$.

4) $p-\frac{10}{100}p=99 \Leftrightarrow 90p=9900 \Leftrightarrow p=110$.

5) $y-3x=0$. **6)** $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5}$ **.**

II. 1. a) $A_0(0,2),\ A_1(1,3) \Leftrightarrow \Delta=\begin{vmatrix} x & y & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=-x+y-4 \Rightarrow$ ecuaţia dreptei A_0A_1 este: $-x+y-4=0$.

b) $\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & 4 & 1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow$ punctele A_0, A_1, A_2 sunt coliniare.

c) $\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1\\ n & n+2 & 1\\ n+1 & n+3 & 1\end{vmatrix}=-2 \Rightarrow A=\frac{1}{2}\cdot|\Delta|=1$**.**

2. a) $f \vdots g \Rightarrow f(-\hat{3})=\hat{0} \Leftrightarrow f(\hat{2})=\hat{0} \Leftrightarrow \hat{4}a=\hat{4} \Leftrightarrow a=\hat{1}$

b) $(X+\hat{1})(X^2+\hat{1})=X^3+X^2+X+\hat{1}=f$. **c)** $S=\{\hat{2},\hat{3},\hat{4}\}$

III. 1) a) $f'(x)=1+2^x\ln 2,\ \ f''(x)=2^x(\ln 2)^2$**.**

b) Din $f'(x)=1+2^x\ln 2>0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Din $f''(x)=2^x\ln^2 2>0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f$ este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. a) f este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ şi $l_s(1)=l_d(1)=f(1)=0$ de unde f este continuă şi în 1, rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Fie F o primitivă a funcţiei f pe $(1,\infty) \Rightarrow F''(x)=f'(x)=\frac{1}{x}>0$,

$\forall x\in(1,\infty) \Rightarrow F$ este convexă pe $(1,\infty)$.

c) $\int_0^e f(x)\,dx=\int_0^1 (x^2-3x+1)\,dx+\int_1^e \ln x\,dx=\frac{5}{3}$.

Testul 9

I. 1) $a=\sqrt{2}, b=-\sqrt{2}$.

2) $-\dfrac{\Delta}{4a}=1 \Leftrightarrow \dfrac{-\left(m^2-4m\right)}{4}=1 \Leftrightarrow \left(m-2\right)^2=0 \Leftrightarrow m=2$.

3) $3^{x-2}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 3^{x-2}=3^{-\sqrt{x}} \Leftrightarrow x-2=-\sqrt{x}$. Prin ridicare la pătrat se obţine ecuaţia $x^2-5x+4=0$ cu soluţiile $x_1=1, x_2=4$ (nu verifică) $\Rightarrow S=\{1\}$.

4) $p=1100+\dfrac{24}{100}\cdot 1100=1100+264=1364$ lei.

5) $x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=3,\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=-\dfrac{7}{3}$.

6) $\begin{cases} c_1+c_2=23 \\ c_1\cdot c_2=120 \end{cases}$, catetele sunt soluţiile ecuaţiei $t^2-23t+120=0,\ t_1=15, t_2=8$, deci catetele sunt 15 şi 8.

II. 1. a) $a=2$; **b)** Se verifică că $A\cdot A^{-1}=I_2$; **c)** $A\cdot X=B \Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot B=$
$=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2. a) $\left(x\circ y\right)\circ z=xyz-3xy-3yz-3xz+9x+9y+9z-24$,
$x\circ\left(y\circ z\right)=xyz-3xy-3yz-3xz+9x+9y+9z-24$.
Din $\left(x\circ y\right)\circ z=x\circ\left(y\circ z\right), \forall x,y,z\in G$ rezultă că legea "$\circ$" este asociativă.

b) $e=4\in G,\ x'=\dfrac{3x-8}{x-3}=3+\dfrac{1}{x-3}\in G$. Deoarece legea de compoziţie este asociativă, comutativă, admite element neutru şi orice element este simetrizabil, rezultă că $\left(G,\circ\right)$ este grup comutativ.

c) Se arată că f este bijectivă (injectivă şi surjectivă) şi f este morfism ($f\left(xy\right)=f\left(x\right)\circ f\left(y\right)$), de unde rezultă că f este un izomorfism de la grupul $\left(\left(0,\infty\right),\cdot\right)$ la $\left(G,\circ\right)$.

III. 1) a) $f'(x)=4\left(x+1\right)^3-4x^3$.

b) Din $f'(x)=4\left(x+1\right)^3-4x^3=4\left(3x^2+3x+1\right)>0, \forall x\in\mathbb{R}$ ($\Delta<0$), rezultă funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) $f''\left(x\right)=24x+12=24\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$.

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		∞
$f''(x)$	- - - - - - -		0	+ + + + + +	

$x=0$ este punct de inflexiune.

2. a) f este continuă pe $\mathbb{R}^*$ şi $l_s\left(0\right)=l_d\left(0\right)=f\left(0\right)=1$ de unde f este continuă şi în 0, rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} xf\left(x\right)dx=\int_{-1}^{0} x\left(x^2+e^x\right)dx=\left.\left(\frac{x^4}{4}+\left(x-1\right)e^x\right)\right|_{-1}^{0}=\frac{2}{e}-\frac{5}{4}$.

c) $V=\pi\int_0^1 g^2(x)\,dx=\pi\int_0^1\left(1+\sqrt{x}\right)^2 dx=\pi\int_0^1\left(1+2\sqrt{x}+x\right)dx=$

$=\pi\left(x+\dfrac{4}{3}x\sqrt{x}+\dfrac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\dfrac{17\pi}{6}$.

Testul 10

I. 1) $\log_2\left(\log_3 9\right)=\log_2 2=1$.

2) $f(x)\le 12\Leftrightarrow x^2+3\le 12\Leftrightarrow x^2\le 9\Leftrightarrow x\in[-3,3]$.

3) $2^{x^2+x+1}=8\Leftrightarrow x^2+x+1=3\Leftrightarrow x^2+x-2=0,\ x_1=1,\ x_2=-2$.

4) Mulţimea A are $C_{10}^3=\dfrac{10!}{7!\cdot 3!}=120$ submulţimi cu trei elemente.

5) Fie A' simetricul punctului A faţă de punctul B . Punctul B este mijlocul segmentului AA' de unde rezultă $A'(11,11)$.

6) $tg45^\circ=1\Rightarrow \lg\left(tg45^\circ\right)=0\Rightarrow \lg\left(tg40^\circ\right)\cdot\lg\left(tg41^\circ\right)\cdot\ldots\cdot\lg\left(tg45^\circ\right)=0$.

II. 1. a) $\det A=\begin{vmatrix}1&3&2\\1&-2&a\\1&1&4\end{vmatrix}=2a-14$. **b)** Pentru $a=-1$ şi $b=2$, sistemul este $\begin{cases}x+3y+2z=2\\x-2y-z=5\\x+y+4z=4\end{cases}$,

$\det A=-16\ne 0\Rightarrow$ sistemul are soluţia unică $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{15}{4},\ y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{-3}{4},\ z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}=\dfrac{1}{4}$. **c)** Din

$x_0+y_0+z_0=4$ şi ultima ecuaţie rezultă $z_0=0$, $y_0=-\dfrac{1}{3},\ x_0=\dfrac{13}{3}\Rightarrow b=\dfrac{10}{3}$.

2. a) $\hat{2}x+\hat{5}=\hat{1}\Leftrightarrow \hat{2}x=\hat{2}\Leftrightarrow x\in\left\{\hat{1},\hat{4}\right\}$. **b)** $\begin{vmatrix}\hat{1}&\hat{2}&\hat{3}\\\hat{2}&\hat{3}&\hat{1}\\\hat{3}&\hat{1}&\hat{2}\end{vmatrix}=\hat{0}+\hat{0}+\hat{0}-\hat{3}-\hat{1}-\hat{2}=\hat{0}$.

c) Înmulţind prima ecuaţie cu $\hat{4}$ obţinem $\begin{cases}\hat{3}x=\hat{3}\\x+\hat{2}y=\hat{5}\end{cases}$, de unde rezultă $S=\left\{\left(\hat{1},\hat{2}\right),\left(\hat{3},\hat{4}\right),\left(\hat{5},\hat{0}\right)\right\}$.

III. 1) a) $f'(x)=\dfrac{-2\left(x^2+x-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$.

b) $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2+x-1=0,\ x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		∞
$f'(x)$	- - - - -		0	+ + +	0	- - - - -	
$f(x)$	$\searrow$ $\searrow$		m	$\nearrow$ $\nearrow$	M	$\searrow$ $\searrow$	

f este strict descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty,\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]$;

f este strict crescătoare pe $\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$;

f este strict descrescătoare pe intervalul $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2+1}\overset{l'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{2x}=0$.

2. a) F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F'(x)=\left((x+1)\ln x-x+1\right)'=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$,
rezultă că F este o primitivă a funcţiei f.

b) $\int\limits_1^2 f\left(e^x\right)dx=\int\limits_1^2\left(x+e^{-x}\right)dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}-e^{-x}\right)\right|_1^2=\frac{3}{2}+\frac{e-1}{e^2}$.

c) $\int\limits_1^2 f(x)F(x)dx=\int\limits_1^2\left(\frac{F^2(x)}{2}\right)'dx=\left.\frac{F^2(x)}{2}\right|_1^2=\frac{(3\ln 2-1)^2}{2}$.

Testul 11

I. 1) $\log_8(a-1)=\log_8(b+1)\Leftrightarrow a-1=b+1>0$, $a=9, b=7$.

2) $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(50)=\frac{(3+101)\cdot 50}{2}=2600$.

3) Prin ridicare la pătrat rezultă $2\sqrt{x}\sqrt{1-x}=0\Leftrightarrow x\in\{0,1\}$, $S=\{0,1\}$.

4) $C_5^3-C_5^2+C_5^5=10-10+1=1$. **5)** $d_1\parallel d_2\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{a}\neq\frac{-1}{3}\Leftrightarrow a=2$.

6) $\left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2\in\mathbb{Z}$.

II. 1. a) $\det A=0\Leftrightarrow(x-3)^2-1=0\Leftrightarrow x-3=\pm1\Leftrightarrow x\in\{2,4\}$.

b) $A^2=\begin{pmatrix}x-3 & 1\\ 1 & x-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-3 & 1\\ 1 & x-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(x-3)^2+1 & 2x-6\\ 2x-6 & (x-3)^2+1\end{pmatrix}$;

$(2x-6)A-\left(x^2-6x+8\right)\cdot I_2=(2x-6)\begin{pmatrix}x-3 & 1\\ 1 & x-3\end{pmatrix}-\left(x^2-6x+8\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}(x-3)^2+1 & 2x-6\\ 2x-6 & (x-3)^2+1\end{pmatrix}$.

c) $A^2=2A\Rightarrow\begin{cases}(x-3)^2+1=2x-6\\ 2x-6=2\end{cases}\Leftrightarrow x=4$.

2. a) $a,b,c\in\left\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3}\right\}$, deci fiecare poate lua câte 4 valori. Atunci numărul elementelor mulţimii G este $4\cdot4\cdot4=64$.

b) Fie $A=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}$. Avem $\det A=ac$ şi $\det A^2=a^2c^2$. Dacă $a=\hat{2}, c=\hat{3}$, b poate fi orice element din $\mathbb{Z}_4$. De exemplu $A=\begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{1}\\ \hat{0} & \hat{3}\end{pmatrix}$.

c) Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}\in G$. $X^2=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a^2 & ab+bc\\ \hat{0} & c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$.

Sistemul $\begin{cases}a^2=\hat{1}\\ ab+bc=\hat{0}\\ c^2=\hat{0}\end{cases}$ are soluţiile : $\begin{cases}a=\hat{1}\\ b=\hat{0}\\ c=\hat{0}\end{cases}$, $\begin{cases}a=\hat{3}\\ b=\hat{0}\\ c=\hat{0}\end{cases}$, $\begin{cases}a=\hat{1}\\ b=\hat{0}\\ c=\hat{2}\end{cases}$, $\begin{cases}a=\hat{3}\\ b=\hat{0}\\ c=\hat{2}\end{cases}$.

În concluzie, ecuaţia $X^2=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$, $X\in G$, are patru soluţii.

III. 1) a) $f'(x)=1-\dfrac{e}{x}=\dfrac{x-e}{x}$.

b)

x	0			e			∞
$f'(x)$	- - -	- - -	- - -	0	+ + +	+ +	+ +
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

f este strict descrescătoare pe $(0,e]$ şi strict crescătoare pe $[e,\infty)$.

c) Din tabel rezultă că $f(x)\geq 0$, $\forall\ x\in(0,\infty)$.

2. a) $\int f(x)\,dx=\int\left(x+\dfrac{1}{x}\right)dx=\dfrac{x^2}{2}+\ln x+C$.

b) $V=\pi\int_1^2 g^2(x)\,dx=\pi\int_1^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2dx=\pi\int_1^2\left(x^2+2+\dfrac{1}{x^2}\right)dx=$

$=\pi\left(\dfrac{x^3}{3}+2x-\dfrac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\dfrac{29\pi}{6}$.

c) $\int_1^e\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\ln x\,dx=\int_1^e x\ln x\,dx+\int_1^e\dfrac{\ln x}{x}\,dx=\dfrac{e^2+3}{4}$.

Testul 12

I. 1) $A_5^3+2C_4^2=60+12=72$. **2)** Din $f(1)=0\Rightarrow f(0)\cdot f(1)\cdot\ldots\cdot f(2011)=0$.

3) $m=3$. **4)** $\dfrac{8!}{3!\cdot 5!}-\dfrac{9!}{2!\cdot 7!}=56-36=20\in\mathbb{N}$.

5) $AB\parallel CD\Rightarrow m_{AB}=m_{CD}\Rightarrow\dfrac{-1-a}{1}=\dfrac{4}{2}\Rightarrow a=-3$.

6) $\cos 90^\circ=0\Rightarrow\cos 1^\circ\cdot\cos 2^\circ\cdot\ldots\cos 179^\circ=0$.

II. 1. a) $D(-1)=-4$;

b) $D(a)=-(a-1)^2(a+2)\Leftrightarrow 3a-a^3-2=-(a-1)^2(a+2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3a-a^3-2=3a-a^3-2$ (A);

c) $D(a)=-4 \Leftrightarrow -(a-1)^2(a+2)=-4 \Leftrightarrow a^3-3a-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a+1)(a^2-a-2)=0$, ecuaţia are soluţiile $x_1=x_2=-1,\ x_3=2$.

2. a) $A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2ab & 0 & 2ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 2ab & 0 & 2ab \end{pmatrix}=A(2ab)$.

b) $A(a)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)=A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A(a)=A(a), \forall a\in\mathbb{R}$**.**

c) $A(1)\cdot A(1')=A\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow A(2\cdot 1')=A\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow 1'=\frac{1}{4}$**.** Deci simetricul elementului $A(1)\in M$ în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor pe M este elementul $A\left(\frac{1}{4}\right)$.

III. 1) a) $f'(x)=\left(x-e^{-x}\right)'=1+e^{-x}$**;** $f(0)+f'(0)=0-1+1+1=1$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)+f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-e^{-x}+1+e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+0=1$.

c) $f''(x)=-e^{-x}<0, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ funcţia f este concavă pe $\mathbb{R}$.

2. a) $\int_0^1\left(x^2+1\right)f(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2+2x+1\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\right|_0^1=\frac{7}{3}$.

b) $\int_0^1 f(x)\,dx=\ln(2e)=\int_0^1\left(1+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=\left.\left(x+\ln\left(x^2+1\right)\right)\right|_0^1=1+\ln 2=\ln 2e$.

c) $\int_0^1 f'(x)\cdot e^{f(x)}\,dx=\int_0^1\left(e^{f(x)}\right)'dx=\left.e^{f(x)}\right|_0^1=e(e-1)$.

Testul 13

I. 1) $r=4\Rightarrow a_2=9\Rightarrow a_1=5$.

2) $\Delta>0\Leftrightarrow m^2+4m-4>0\Leftrightarrow m\in\left(-\infty,-2-2\sqrt{2}\right)\cup\left(-2+2\sqrt{2},\infty\right)$.

3) $\left(\sqrt{x+1}\right)^2=(x-1)^2\Leftrightarrow x^2-3x=0\Leftrightarrow x(x-3)=0$. Soluţiile sunt $x_1=0$ (nu verifică) şi $x_2=3\Rightarrow$ $S=\{3\}$.

4) Numere de două cifre sunt în total 90 (de la 10 la 99).
Numerele pentru care $a=b$ sunt : $11,22,33,44,55,66,77,88,99$. Rezultă că avem $90-9=81$ numere pentru care $a\neq b$.

Probabilitatea este $p=\frac{c_f}{c_t}=\frac{81}{90}=\frac{9}{10}$.

5) $A(3,0), B(0,4)$**,** $d:\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$**,** $d:4x+3y-12=0$.

6) $10^2=6^2+8^2\Rightarrow A=90^\circ\Rightarrow R=\frac{ip}{2}=\frac{10}{2}=5$.

II. 1. a) $A^2=A\Rightarrow A+A^2=2A$.

b) $\det(X+A)=2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+4 & -6 \\ 2 & x-3 \end{vmatrix}=2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=-2$.

c) $A^n=A \Rightarrow A+2A^2+...+nA^n=(1+2+3+...+n)A=\dfrac{n(n+1)}{2}A$.

2. a) $a,b,c\in\mathbb{Z}_2$ rezultă că avem $2\cdot2\cdot2=8$ elemente în mulțimea A.

b) Dacă $X\in A \Rightarrow X^2=\begin{pmatrix} a^2 & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & a^2 & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & a^2 \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{Z}_2 \Rightarrow X^2=I_3$ sau $X^2=O_3$.

c) $X_1=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $X_3=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $X_4=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}$.

III. 1) a) $f'(x)=2x+\dfrac{2}{x^3}$.

b) $d: y-y_A=f'(x_A)(x-x_A) \Leftrightarrow y=4(x-1)$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\frac{2}{x^3}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{2}{x^4}\right)=2+0=2$.

2. a) $I_0=\int_1^2 e^x dx=e^x\Big|_1^2=e^2-e$.

b) $I_1=\int_1^2 xe^x dx=xe^x\Big|_1^2-\int_1^2 e^x dx=2e^2-e-(e^2-e)=e^2$.

c) $(n+1)I_n+I_{n+1}=\int_1^2\left[(n+1)x^ne^x+x^{n+1}e^x\right]dx=\int_1^2\left[x^{n+1}e^x\right]'dx=x^{n+1}e^x\Big|_1^2=$

$=e(2^{n+1}e-1)$.

Testul 14

I. 1) $\log_2 4+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}-\sqrt[3]{8}=2+2-2=2$. **2)** $1,3,9$, $q=3$.

3) $\left(\sqrt{6-a}\right)^2=(4-a)^2 \Leftrightarrow a^2-7a+10=0,\ a_1=5$ (nu verifică), $a_2=2$. $S=\{2\}$. **4)**

$C_3^1+xC_4^3+3=0 \Leftrightarrow 4x=-6 \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2}$.

5) $d(O,AB)=\dfrac{c_1\cdot c_2}{ip}=\dfrac{12}{5}$.

6) $\sin 40^\circ\cdot\sin 140^\circ=\sin^2 40^\circ=\cos^2 50^\circ=\cos^2 130^\circ$.

II. 1. a) $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$. **b)** Se verifică prin calcul că

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc\right)$.

c) $\begin{vmatrix} 2^x & 1 & 1 \\ 1 & 2^x & 1 \\ 1 & 1 & 2^x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left(2^x + 2\right)\left(4^x + 1 + 1 - 2^x - 2^x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\left(2^x + 2\right)\left(2^x - 1\right)^2 = 0$ cu soluţia unică $x = 0$.

2. a) $x \circ 4 = 10 \Leftrightarrow -2x + 6 = 10 \Leftrightarrow x = -2$; **b)** $a = 2$.

c) $\frac{1}{2011} \circ \frac{2}{2011} \circ \ldots \circ \frac{4022}{2011} = a \circ 2 = 2$.

III. 1) a) $f'(x) = \frac{(2x-1)'(x-1) - (2x-1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$.

b) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = f'(2) = -1$. **c)** $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in (1,\infty) \Rightarrow$ f este descrescătoare pe intervalul $(1,\infty)$.

2. a) $\int_0^4 f^2(x)dx = \int_0^4 \left(16 - x^2\right)dx = \left.\left(16x - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^4 = \frac{128}{3}$.

b) Deoarece intervalul este simetric şi funcţia impară rezultă $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{f(x)}dx = 0$.

c) Dacă $0 \le x \le m \le 2 \Rightarrow \sqrt{12} \le \sqrt{16 - x^2} \le 4$ deci $0 \le f(x) \le 4$. Din proprietatea de monotonie a integralei definite, obţinem că $0 \le \int_0^m f(x)dx \le 8$.

Testul 15

I. 1) $\log_2 3 + \log_2 48 - \log_2 18 = \log_2 \frac{3 \cdot 48}{18} = \log_2 8 = 3 \in \mathbb{N}$.

2) Sistemul $\begin{cases} y = x^2 - 3x - 1 \\ y = x + 4 \end{cases}$ are soluţiile $(-1,3), (5,9)$, rezultă că punctele de intersecţie a celor două grafice sunt $A(-1,3), B(5,9)$.

3) $\log_5\left(9 - x^2\right) = 1 \Leftrightarrow 9 - x^2 = 5, 9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

4) $p + \frac{10}{100}p + \frac{20}{100}\left(p + \frac{10}{100}p\right) = 660 \Leftrightarrow p = 500$ lei.

5) $\overrightarrow{AB} = (a-3)\vec{i} + (b-4)\vec{j} = \vec{i} + \vec{j} \Rightarrow a = 4,\ b = 5$.

6) $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow m\left(\hat{A}\right) = 90^\circ \Rightarrow S = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30$.

II. 1. a) $A \cdot B = O_3$. **b)** $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 = A^2 + B^2$**,** $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 = A^2 + B^2$**.**

c) $C \overset{not}{=} \left(A-B\right)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I_3 \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{9}I_3$.

2. a) $S = \left(\hat{1}+\hat{7}\right)+\left(\hat{2}+\hat{6}\right)+\left(\hat{3}+\hat{5}\right)+\hat{4} = \hat{4}$; **b)** Mulţimea elementelor inversabile din $\mathbb{Z}_8$ este $\left\{\hat{1},\hat{3},\hat{5},\hat{7}\right\} \Rightarrow P = \hat{1}\cdot\hat{3}\cdot\hat{5}\cdot\hat{7} = \hat{1}$.

c) $\begin{cases} \hat{2}x+\hat{5}y=\hat{2} \\ \hat{3}x+\hat{2}y=\hat{5} \,/\cdot\hat{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{2}x+\hat{5}y=\hat{2} \\ x=\hat{7}+\hat{2}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\hat{7} \\ y=\hat{4} \end{cases}$.

III. 1) a) $f'(x) = 2x+e^x \Rightarrow f'(0)=1$.

b) $f''(x) = 2+e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+e^x}{e^x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2+e^x}{e^x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$.

2. a) $\int f(x)\,dx = \int\left(x+\frac{2}{x}\right)dx = \frac{x^2}{2}+2\ln|x|+C$.

b) $V = \pi\int_1^2 f^2(x)\,dx = \pi\int_1^2\left(x^2+\frac{4}{x^2}+4\right)dx = \pi\left(\frac{x^3}{3}-\frac{4}{x}+4x\right)\Big|_1^2 = \frac{25\pi}{3}$.

c) $\int_1^2 f(x)\cdot\ln x\,dx = \int_1^2\left(x+\frac{2}{x}\right)\cdot\ln x\,dx = \int_1^2 x\cdot\ln x\,dx + 2\int_1^2\frac{1}{x}\cdot\ln x\,dx =$

$= \left(\ln 2\right)^2 + 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

Testul 16

I. 1) $C_{12}^3 - C_{12}^9 = 0$. **2)** $x_1^3+x_2^3 = \left(x_1+x_2\right)\left[\left(x_1+x_2\right)^2-3x_1x_2\right] = -3\left(9-3\right) = -18$.

3) $2^{\sqrt{x-1}} = 2^2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x=5$. **4)** $p = \frac{c_f}{c_p} = \frac{1}{5}$.

5) $l = AB = 5 \Rightarrow S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$. **6)** $d = l\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

II. 1. a) $\Delta = 0 \Rightarrow O, A_1, A_2$ sunt coliniare; **b)** $OA_1, OA_0, A_0A_1, A_0A_2$, deci 4 drepte.

c) $\Delta = \begin{vmatrix} n & 2^n & 1 \\ n+1 & 2^{n+1} & 1 \\ n+2 & 2^{n+2} & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$.

2. a) $x\circ x = x*x \Leftrightarrow x^2-6x+12 = 2x-3 \Leftrightarrow x^2-8x+15=0$, $x_1=3, x_2=5$.

b) $x\circ a = 3 \Leftrightarrow \left(a-3\right)\left(x-3\right)=0, \forall x\in\mathbb{Z} \Rightarrow a=3$.

c) $\begin{cases} x*\left(y+1\right)=4 \\ \left(x-y\right)\circ 1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ -x+y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$.

III. 1) a) $f'(x) = \frac{1}{x}-1 = \frac{1-x}{x}$, $f'(1)=0$.

b) Tabelul de variaţie al funcţiei este:

x	0					1					∞
$f'(x)$	+	+	+	+ + +		0	- - - -	- - -	- - -	- - -	-
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\underbrace{0}_{\max}$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$-\infty$

Din tabel observăm că f este strict crescătoare pe $(0,1]$ şi strict descrescătoare pe $[1,\infty)$, $x=1$ este punct de maxim.

c) Avem $1<2<e \overbrace{\Leftrightarrow}^{f\ strict\ descresc.} f(1)>f(2)>f(e) \Leftrightarrow 0>f(2)>2-e$.

2. a) g este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $g'(x)=\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^x}\right)' = f(x), \forall x\in\mathbb{R}$,

rezultă că g este o primitivă a funcţiei f.

b) $\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx=\int\limits_0^1\left(\dfrac{g^2(x)}{2}\right)'dx=\dfrac{g^2(x)}{2}\Bigg|_1^2=\dfrac{e^2-1}{2e}$.

c) Deoarece $f'(x)=\left(e^x+e^{-x}\right)'=g(x)$ şi $g'(x)=\left(e^x-e^{-x}\right)'=f(x)\Rightarrow$

$\int\limits_0^1 f'(x)g'(x)\,dx=\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

Testul 17

I. 1) $A=\{0,1,2,3\}$. **2)** $a_7=a_1+6r\Rightarrow 6r=30\Rightarrow r=5$.

3) $\left(\sqrt{4x^2+6x+3}\right)^2=(x+2)^2 \Leftrightarrow 3x^2+2x-1=0,\ x_1=-1,\ x_2=\dfrac{1}{3}, S=\left\{-1,\dfrac{1}{3}\right\}$.

4) $A_n^2=42\Leftrightarrow (n-1)n=42, n\ge 2\Leftrightarrow n=7$.

5) $m_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=1$. **6)** $S=\dfrac{c_1\cdot c_2}{2}=\dfrac{4\cdot 4\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}$.

II. 1. a) det A=0. **c)** $\det\left(I_3+xA^2\right)=\begin{vmatrix}1-2x & 2x & 2x\\ 2x & 1-5x & x\\ 2x & x & 1-5x\end{vmatrix}=(1-6x)^2\ge 0$.

2. a) $f(-2)=0$; **b)** $r=0, c=5X^2+4X-1$;

c) $f(x)=0\Leftrightarrow (x+2)\left(5x^2+4x-1\right)=0$, $x_1=-2, x_2=-1, x_3=\dfrac{1}{5}$.

III. 1) a) $f'(x)=\ln x+\dfrac{x-2}{x}$. **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=-1$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2}{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=1\cdot 0=0$.

2. a) F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F'(x)=\left(e^x+\dfrac{x^3}{3}+x^2+1\right)'=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că F este o primitivă a funcţiei f.

b) $\int_0^1 f(x)\,dx = F(x)\Big|_0^1 = F(1) - F(0) = e + \frac{1}{3}$.

c) $h(x) \geq 0, \forall x \in [0,1] \Rightarrow A = \int_0^1 h(x)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx = \ln\left(e^x+1\right)\Big|_0^1 = \ln\frac{e+1}{2}$.

Testul 18

I. 1) $a_4 = a_1 \cdot q^3 = -16$.

2) $\Delta = 4\sin^2 a - 4\left(1-\cos^2 a\right) = 4\left(\sin^2 a + \cos^2 a\right) - 4 = 0 \Rightarrow$ ecuaţia admite soluţii reale egale.

3) $x^2 = \left(\sqrt{2-x}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = -2$ (nu verifică) $\Rightarrow S = \{1\}$.

4) $C_6^2 = 15$.

5) $\frac{2}{-1} = \frac{3}{m} \Leftrightarrow 2m = -3 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$.

6) $\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} > 0$.

II. 1. a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2A$. **b)** $AB - 2B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = O_2$.

c) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Din $A \cdot X \cdot B = O_2$ rezultă $a+b+c+d = 0$.

2. a) Se verifică prin calcul;

b) $\left(x \circ (x+1)\right) + \left(x * (x+1)\right) = 11 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$,

$S = \{1, 2\}$; **c)** $\begin{cases} x \circ (y-1) = 0 \\ (x+1) * y = x * (y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -2 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$.

III. 1) a) $f'(x) = 2^x \ln 2 - \ln 2 = \left(2^x - 1\right)\ln 2$.

b) $\lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = f'(3) = 7\ln 2$.

c)

x	$-\infty$			0			∞
$f'(x)$	- - -	- - -	- - -	0	+ +	+ +	+ +
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	1 min	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

$x = 0$ este punct de minim.

2. a) F este derivabilă pe $(0,\infty)$, $F'(x) = \left(e^x + x - \ln x\right)' = f(x), \forall x \in (0,\infty)$,
rezultă că F este o primitivă a funcţiei f.

b) $\int_1^2 x\left(F(x) - x + \ln x\right)dx = \int_1^2 xe^x\,dx = xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = e^2$.

c) $f(x) \geq 0, \forall x \in [1,e] \Rightarrow A = \int_1^e f(x)\,dx = F(x)\Big|_1^e = e^e - 2$. $A = e^m - 2 \Rightarrow e^m - 2 = e^e - 2 \Rightarrow m = e$.