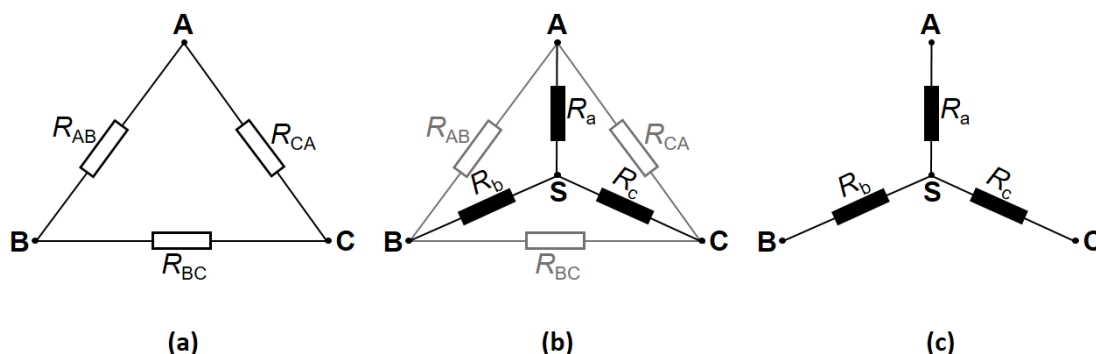


TRANSFORMAREA TRIUNGHI – STEA

Relații de echivalare

O porțiune de rețea alcătuită din trei rezistoare conectate pe laturile unui triunghi poate fi echivalată cu un ansamblu format din alte trei rezistoare dispuse în stea. În figura de mai jos prezentăm modul în care **triunghiul ABC** din figura (a) se echivalează cu **steaua ABC** din figura (c).



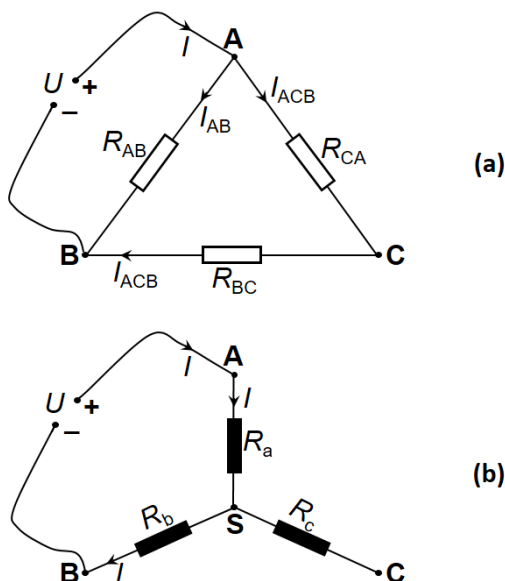
Cele două conexiuni (triunghi și stea) sunt echivalente dacă rezistența echivalentă măsurată între oricare două puncte este aceeași și în montajul triunghi și în montajul stea, $R_{e_triunghi} = R_{e_stea}$.

Conexiune între punctele A și B (figura alăturată):

În figura (a): rezistoarele R_{CA} și R_{BC} sunt parcurse de același curent electric, I_{ACB} , deci sunt conectate în serie, având rezistența echivalentă ($R_{BC} + R_{CA}$). Această grupare serie este conectată în paralel cu rezistorul R_{AB} , având aceeași tensiune la borne, U . Așadar:

$$R_{e_triunghi_AB} = \frac{R_{AB}(R_{BC} + R_{CA})}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}.$$

În figura (b): rezistoarele R_a și R_b sunt parcurse de același curent electric deoarece



rezistorul R_c nu este inclus într-un circuit închis, deci prin rezistorul R_c nu trece curent electric. Așadar:

$$R_{e_stea_AB} = R_a + R_b.$$

$$\text{Din } R_{e_stea_AB} = R_{e_triunghi_AB} \Rightarrow R_a + R_b = \frac{R_{AB}(R_{BC} + R_{CA})}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} \quad (1)$$

Conexiune între punctele B și C (figura alăturată):

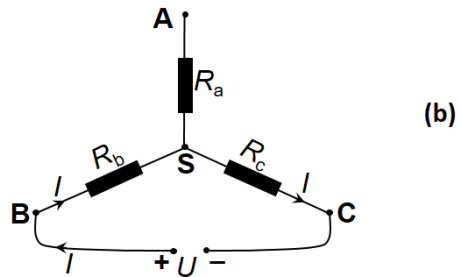
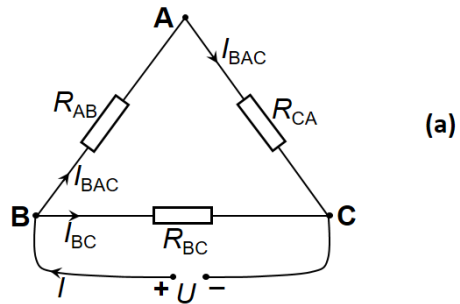
În figura (a): rezistoarele R_{AB} și R_{CA} sunt parcurse de același curent electric, I_{BAC} , deci sunt conectate în serie, având rezistența echivalentă $(R_{AB} + R_{CA})$. Această grupare serie este conectată în paralel cu rezistorul R_{BC} , având aceeași tensiune la borne, U . Așadar:

$$R_{e_triunghi_BC} = \frac{R_{BC}(R_{AB} + R_{CA})}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}.$$

În figura (b): rezistoarele R_b și R_c sunt parcurse de același curent electric deoarece rezistorul R_a nu este inclus într-un circuit închis, deci prin rezistorul R_a nu trece curent electric. Așadar:

$$R_{e_stea_BC} = R_b + R_c.$$

$$\text{Din } R_{e_stea_BC} = R_{e_triunghi_BC} \Rightarrow R_b + R_c = \frac{R_{BC}(R_{AB} + R_{CA})}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} \quad (2)$$



Conexiune între punctele C și A (figura alăturată):

În figura (a): rezistoarele R_{AB} și R_{BC} sunt parcurse de același curent electric, I_{ABC} , deci sunt conectate în serie, având rezistența echivalentă $(R_{AB} + R_{BC})$. Această grupare serie este conectată în paralel cu rezistorul R_{CA} , având aceeași tensiune la borne, U . Așadar:

$$R_{e_triunghi_CA} = \frac{R_{CA} (R_{AB} + R_{BC})}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}.$$

În figura (b): rezistoarele R_a și R_c sunt parcurse de același curent electric deoarece rezistorul R_b nu este inclus într-un circuit închis, deci prin rezistorul R_b nu trece curent electric. Așadar:

$$R_{e_stea_CA} = R_a + R_c.$$

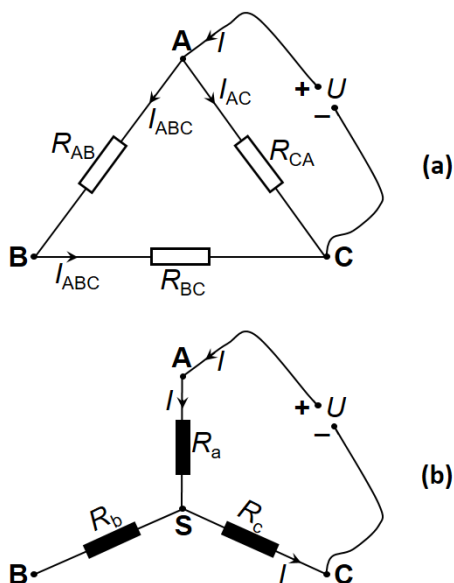
$$\text{Din } R_{e_stea_CA} = R_{e_triunghi_CA} \Rightarrow R_a + R_c = \frac{R_{CA} (R_{AB} + R_{BC})}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} \quad (3)$$

Adunăm relațiile (1), – (2) și (3):

$$\begin{aligned} R_a + R_b &= \frac{R_{AB} (R_{BC} + R_{CA})}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} \\ -R_b - R_c &= \frac{-R_{BC} (R_{AB} + R_{CA})}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} \\ R_a + R_c &= \frac{R_{CA} (R_{AB} + R_{BC})}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} \end{aligned}$$

$$\text{și obținem: } 2R_a = \frac{R_{AB} R_{BC} + R_{AB} R_{CA} - R_{BC} R_{AB} - R_{BC} R_{CA} + R_{CA} R_{AB} + R_{CA} R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} \Rightarrow$$

$$R_a = \frac{R_{AB} R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} \quad (4)$$



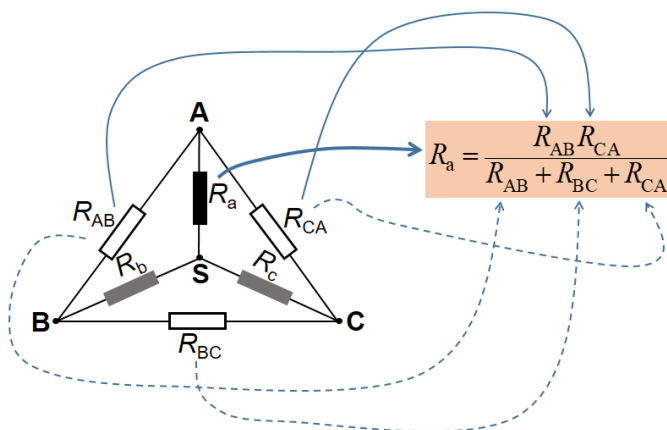
Analog se obțin:

$$R_b = \frac{R_{AB} R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} \quad (5)$$

și respectiv:

$$R_c = \frac{R_{BC} R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} \quad (6)$$

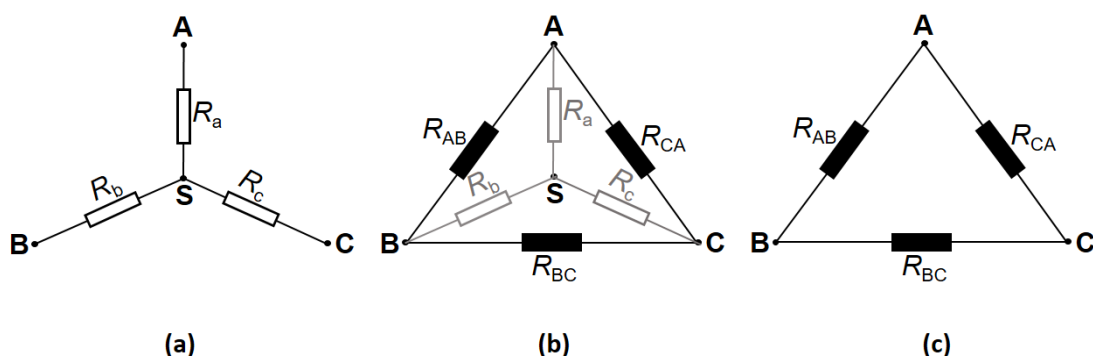
În concluzie, relațiile de transformare arată că **o rezistență de pe stea este egală cu produsul celor două rezistențe alăturate de pe triunghi, raportat la suma tuturor rezistențelor de pe triunghi**, așa cum observăm în exemplul din imaginea alăturată.



TRANSFORMAREA STEA – TRIUNGHI

Relații de echivalare

O porțiune de rețea alcătuită din trei rezistoare conectate în stea poate fi echivalată cu un ansamblu format din alte trei rezistoare dispuse pe laturile unui triunghi. În figura de mai jos prezentăm modul în care **steaua ABC** din figura (a) se echivalează cu **triunghiul ABC** din figura (c). Practic, este vorba de transformarea inversă transformării triunghi-
stea.



Cele două conexiuni (triunghi și stea) sunt echivalente dacă rezistența echivalentă măsurată între oricare două puncte este aceeași și în montajul triunghi și în montajul stea, $R_{e_triunghi} = R_{e_stea}$, iar relațiile (4), (5) și (6) aflate anterior rămân valabile. Din aceste relații vom exprima rezistențele de pe triunghi, R_{AB} , R_{BC} și R_{CA} în funcție de rezistențele de pe stea, R_a , R_b și R_c .

$$\frac{R_{AB}R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} = R_a \quad (7)$$

$$\frac{R_{AB}R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} = R_b \quad (8)$$

$$\frac{R_{BC}R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} = R_c \quad (9)$$

Raportăm relațiile (7) și (9) și obținem: $\frac{R_{AB}}{R_{BC}} = \frac{R_a}{R_c} \Rightarrow R_{BC} = \frac{R_{AB}R_c}{R_a} \quad (10)$

Raportăm relațiile (8) și (9) și obținem: $\frac{R_{AB}}{R_{CA}} = \frac{R_b}{R_c} \Rightarrow R_{CA} = \frac{R_{AB}R_c}{R_b} \quad (11)$

Înlocuim relațiile (10) și (11) în relația (9):

$$\frac{\frac{R_{AB}R_c}{R_a} \cdot \frac{R_{AB}R_c}{R_b}}{R_{AB} + \frac{R_{AB}R_c}{R_a} + \frac{R_{AB}R_c}{R_b}} = R_c \Leftrightarrow \frac{R_{AB}^2 R_c^2}{R_a R_b} = R_{AB} R_c \left(1 + \frac{R_c}{R_a} + \frac{R_c}{R_b} \right) \Leftrightarrow$$

$$R_{AB} = \frac{R_a R_b}{R_c} \left(1 + \frac{R_c}{R_a} + \frac{R_c}{R_b} \right) \Rightarrow$$

$$R_{AB} = \frac{R_a R_b}{R_c} + R_a + R_b \quad (12)$$

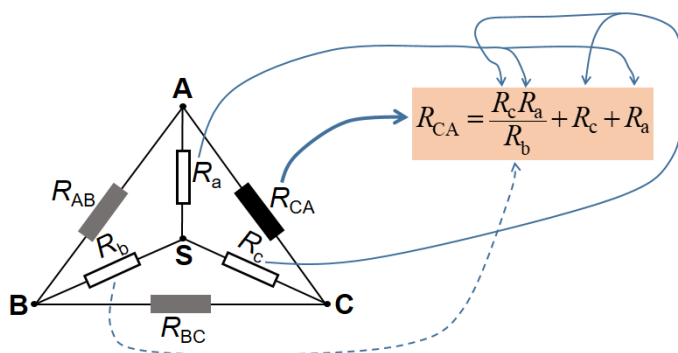
Analog se obțin:

$$R_{BC} = \frac{R_b R_c}{R_a} + R_b + R_c \quad (13)$$

și respectiv:

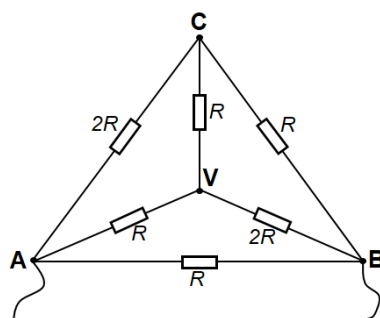
$$R_{CA} = \frac{R_c R_a}{R_b} + R_c + R_a \quad (14)$$

În concluzie, relațiile de transformare arată că **o rezistență de pe triunghi este egală cu produsul celor două rezistențe alăturate de pe stea, raportat la cea de-a treia rezistență, la care se adună suma celor două rezistențe alăturate de pe stea**, așa cum observăm în exemplul din imaginea alăturată.



EXEMPLU

Considerăm șase rezistori conectați pe laturile unui tetraedru, ca în figura alăturată („vedere de sus” a tetraedrului). Să se determine rezistența echivalentă între vârfurile **A** și **B** ale tetraedrului, $R_{e_{AB}}$.



Metoda I: transformarea unui triunghi în stea

În **Fig. (a)** s-a transformat triunghiul **ACV** în steaua la care am notat cu **S** nodul din centru. Calculăm rezistențele de pe stea:

$$R_a = \frac{2R \cdot R}{2R + R + R} \Rightarrow R_a = \frac{R}{2},$$

$$R_c = \frac{2R \cdot R}{2R + R + R} \Rightarrow R_c = \frac{R}{2},$$

$$R_v = \frac{R \cdot R}{2R + R + R} \Rightarrow R_v = \frac{R}{4}.$$

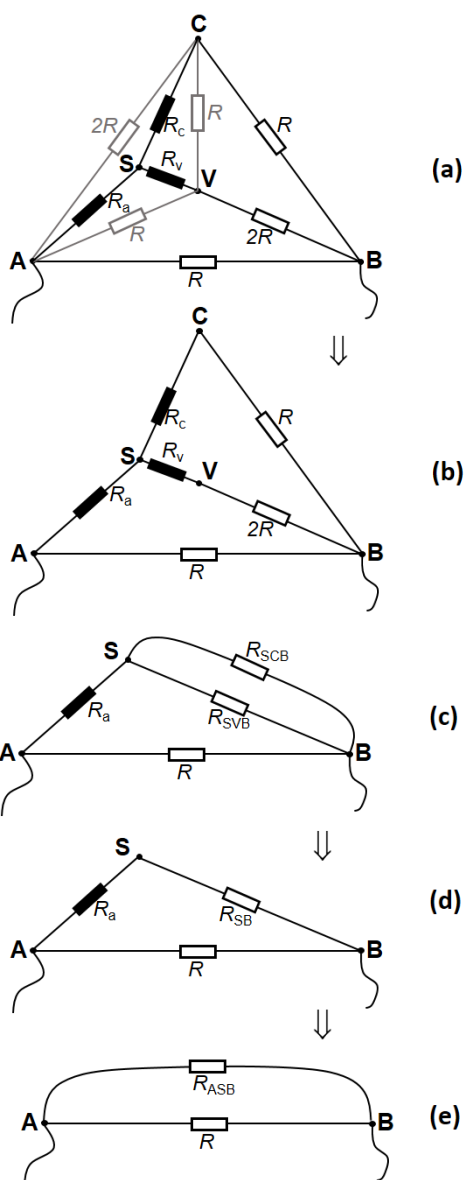
Înlocuim triunghiul cu steaua și observăm în **Fig. (b)** că avem două **grupări serie**, **S-C-B** și respectiv **S-V-B**, deoarece punctele **C** și respectiv **V** nu sunt noduri. Calculăm cele două rezistențe echivalente ale grupărilor serie:

$$R_{SCB} = R_c + R \Rightarrow R_{SCB} = \frac{3R}{2},$$

$$R_{SVB} = R_v + 2R \Rightarrow R_{SVB} = \frac{9R}{4}.$$

În **Fig. (c)** avem o grupare în paralel a celor două rezistoare cu rezistențele electrice R_{SCB} și R_{SVB} . Calculăm rezistența echivalentă a grupării paralel:

$$R_{SB} = \frac{1}{\frac{2}{3R} + \frac{4}{9R}} \Rightarrow R_{SB} = \frac{9R}{10}.$$



În **Fig. (d)** avem o grupare serie alcătuită din R_a și R_{SB} , cu rezistența echivalentă:

$$R_{ASB} = \frac{R}{2} + \frac{9R}{10} \Rightarrow R_{ASB} = \frac{14R}{10}.$$

În final, în **Fig. (e)** observăm o grupare paralel alcătuită din R_{ASB} și R , cu rezistența echivalentă:

$$R_{e_AB} = \frac{1}{\frac{10}{14R} + \frac{1}{R}} \Rightarrow R_{e_AB} = \frac{7R}{12}.$$

Metoda II: transformare stea – triunghi

Rezistența echivalentă, R_{e_AB} , poate fi calculată și utilizând transformarea stelei cu centrul în **V** într-un triunghi (**ABC**), așa cum vedem în **Fig. (a)**. Calculăm rezistențele de pe triunghi:

$$R_{AB} = \frac{R \cdot 2R}{R} + R + 2R \Rightarrow R_{AB} = 5R,$$

$$R_{BC} = \frac{2R \cdot R}{R} + 2R + R \Rightarrow R_{BC} = 5R,$$

$$R_{CA} = \frac{R \cdot R}{2R} + R + R \Rightarrow R_{CA} = \frac{5R}{2}.$$

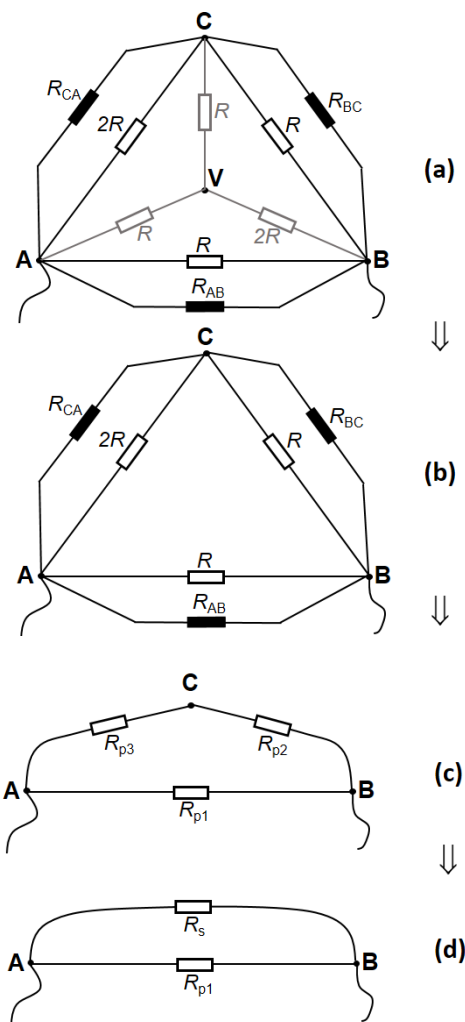
În **Fig. (b)** observăm că avem trei grupări de rezistori în paralel, între nodurile **A - B**, **C - B** și respectiv **A - C**. Calculăm rezistențele echivalente ale acestor grupări, notate în **Fig. (c)** cu R_{p1} , R_{p2} și respectiv R_{p3} :

$$R_{p1} = \frac{5R \cdot R}{5R + R} \Rightarrow R_{p1} = \frac{5R}{6},$$

$$R_{p2} = \frac{5R \cdot R}{5R + R} \Rightarrow R_{p2} = \frac{5R}{6},$$

$$R_{p3} = \frac{\frac{5R}{2} \cdot 2R}{\frac{5R}{2} + 2R} \Rightarrow R_{p3} = \frac{10R}{9}.$$

În **Fig. (c)** avem o grupare serie alcătuită din R_{p3} și R_{p2} , cu rezistența echivalentă:



$$R_s = \frac{10R}{9} + \frac{5R}{6} \Rightarrow R_s = \frac{35R}{18}.$$

În final, în **Fig. (d)** observăm o grupare paralel alcătuită din R_{p1} și R_s , cu rezistența echivalentă:

$$R_{e_{AB}} = \frac{1}{\frac{6}{5R} + \frac{18}{35R}} = \frac{35R}{60} \Rightarrow R_{e_{AB}} = \frac{7R}{12}.$$

Observăm că cele două metode conduc la același rezultat.