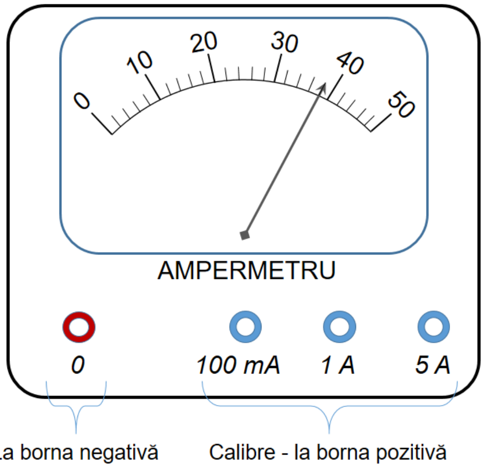
Prof. Costin-Ionuț DOBROTĂ

MĂSURĂRI ELECTRICE

Utilizarea ampermetrului și voltmetrului

Ampermetrul

Ampermetrul este instrumentul cu care se măsoară intensitatea curentului electric și se conectează ***în serie*** cu elementele de circuit. În figura alăturată prezentăm un ampermetru analogic a cărui scală gradată are valoarea maximă $N_{\max} = 50\,\text{diviziuni}$, scala gradată având 25 de repere fine (liniuțe mici). Acul indicator se află, în exemplul din imaginea alăturată, la $N_{\text{div\_citite}} = 38\,\text{diviziuni}$.



Un ampermetru poate avea mai multe calibre, măsurând astfel cu precizie bună curenți electrici cu intensități mai mari sau mai mici. Ampermetrul din figura alăturată are o bornă **„0”** și trei borne notate **„100mA”**, **„1A”** și **„5A”**, numite ***calibre*** ce reprezintă *valorile maxime ale intensităților care pot fi măsurate*, pe care le vom nota cu $I_{\max}$. Conectarea ampermetrului în circuit se face prin intermediul bornei „**0**” (care se conectează, de regulă, la borna negativă a sursei) și a uneia dintre celelalte trei borne. Intensitatea curentului ce trebuie măsurat fiind necunoscută, se recomandă să se conecteze inițial ampermetrul la calibrul cel mai mare. Dacă deviația acului indicator este prea mică, se va alege un calibru inferior, astfel încât deviația acului indicator să fie mai mare.

Relația cu care calculăm intensitatea curentului măsurat de ampermetru este:

$$I = \frac{I_{\max}}{N_{\max}} \times N_{\text{div\_citite}},$$

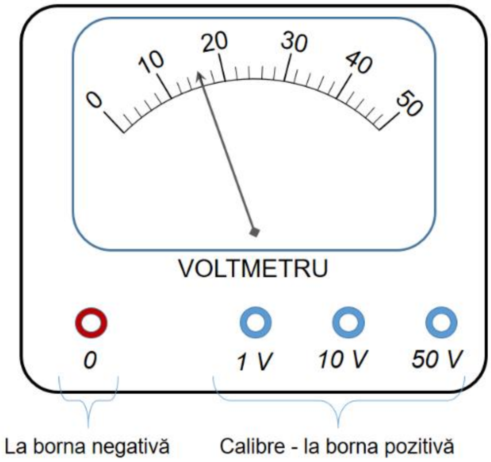
unde raportul $\frac{I_{\max}}{N_{\max}}$ reprezintă intensitatea care se atribuie unei diviziuni a scalei gradate, pentru calibrul ales.

În <u>exemplul</u> din figură, intensitatea măsurată este:

- $I = \frac{0,1}{50} \times 38 = 0,076\,\text{A} = 76\,\text{mA},$ într-un circuit electric în care se utilizează calibrul de **100mA**,
- $I = \frac{1}{50} \times 38 = 0,76\,\text{A},$ într-un circuit electric în care se utilizează calibrul de **1A,**
- $I = \frac{5}{50} \times 38 = 3,8\,\text{A},$ într-un circuit electric în care se utilizează calibrul de **5A**.

Voltmetrul

Voltmetrul este instrumentul cu care se măsoară tensiunea electrică și se conectează ***în paralel*** cu elementul de circuit la bornele căruia se măsoară tensiunea. Voltmetrul analogic din figura alăturată are pe scala gradată valoarea maximă $N_{\max} = 50\,\text{diviziuni},$ scala gradată având 25 de repere fine (liniuțe mici). Acul indicator se află, în exemplul din imaginea alăturată, la $N_{\text{div\_citite}} = 16\,\text{diviziuni}.$



Voltmetrul poate avea mai multe calibre, măsurând astfel cu precizie bună tensiuni mai mari sau mai mici. Voltmetrul din figura alăturată are o bornă **„0”** și trei borne notate **„1V”**, **„10V”** și respectiv **„50V”**, numite ***calibre*** ce reprezintă *valorile maxime ale tensiunilor care pot fi măsurate,* pe care le vom nota cu $U_{\max}$.

Conectarea voltmetrului în circuit se face prin intermediul bornei „0” (care se conectează, de regulă, la borna negativă a sursei) și a uneia dintre celelalte trei borne. Tensiunea ce trebuie măsurată fiind necunoscută, se recomandă să se conecteze inițial voltmetrul la calibrul cel mai mare. Dacă deviația acului indicator este prea mică, se va alege un calibru inferior, astfel încât deviația acului indicator să fie mai mare.

Relația cu care calculăm tensiunea măsurată de voltmetru este:

$$U = \frac{U_{\max}}{N_{\max}} \times N_{\text{div\_citite}},$$

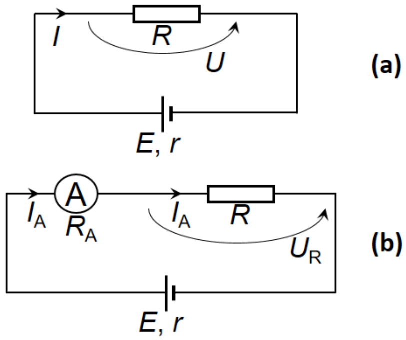
unde raportul $\frac{U_{\max}}{N_{\max}}$ reprezintă valoarea tensiunii care se atribuie unei diviziuni a scalei gradate, pentru calibrul ales.

În exemplul din figură, tensiunea măsurată este:

- $U = \frac{1}{50} \times 16 = 0,32\,\text{V}$, într-un circuit electric în care se utilizează calibrul de **1V**,
- $U = \frac{10}{50} \times 16 = 3,2\,\text{V}$, într-un circuit electric în care se utilizează calibrul de **10V**,
- $U = \frac{50}{50} \times 16 = 16\,\text{V}$. într-un circuit electric în care se utilizează calibrul de **50V**.

Ampermetrul și voltmetrul: rezistențele interne

Ampermetru real/ideal



În imaginea alăturată este prezentat circuitul simplu **(a)** în care rezistorul este parcurs de curentul electric cu intensitatea *I*, având la borne tensiunea *U*. Din legea lui Ohm obținem:

$$I = \frac{E}{R + r}, \quad U = RI = \frac{RE}{R + r}.$$

Notăm cu R_A rezistența interioară a ampermetrului. După conectarea ampermetrului în circuit **(b)**, rezistența circuitului exterior generatorului se modifică, fiind acum $R + R_A$, iar legea lui Ohm devine:

$$I_A = \frac{E}{R + R_A + r}, \quad U_R = RI_A = \frac{RE}{R + R_A + r}.$$

Este evident faptul că cele două circuite nu sunt echivalente atât timp cât $R_A \neq 0$, ceea ce înseamnă că prin conectarea ampermetrului în circuit se modifică atât intensitatea curentului cât și tensiunea la bornele rezistorului. Totuși, modificările datorate conectării ampermetrului vor fi cu atât mai mici cu cât rezistența interioară a ampermetrului este mai mică decât rezistența rezistorului din circuit. Așadar un ampermetru real bun trebuie să aibă $R_A \ll R$ pentru a introduce o eroare cât mai mică prin conectarea lui în circuit.

Din ecuațiile scrise anterior observăm că $I_A = I$, respectiv $U_A = U$ (cele două circuite **(a)** și **(b)** sunt echivalente) numai dacă $R_A \approx 0$. În concluzie, **ampermetrul cu rezistență interioară nulă este numit ampermetru ideal**.

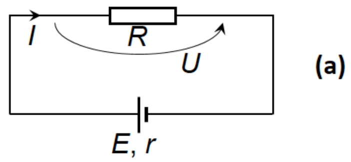
Exemplu:

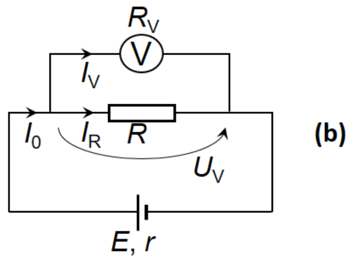
Considerăm un rezistor cu rezistența electrică $R = 18\,\Omega$, conectat la bornele unui generator cu tensiunea electromotoare $E = 10\,\text{V}$ și cu rezistența interioară $r = 2\,\Omega$. Calculăm intensitatea curentului prin rezistor când în circuit se conectează succesiv:

- un ampermetru ideal $(R_\text{A} \approx 0)$: $I = \dfrac{E}{R+r} = 0,5\text{A}$;
- un ampermetru cu $R_{\text{A}1} = 0,5\Omega$: $I_{\text{A}1} = \dfrac{E}{R+R_{\text{A}1}+r} = 0,4878\text{A} \approx 0,49\text{A}$;
- un ampermetru cu $R_{\text{A}2} = 15\Omega$: $I_{\text{A}2} = \dfrac{E}{R+R_{\text{A}2}+r} = 0,2857\text{A} \approx 0,29\text{A}$.

Observăm că $I_{\text{A}1} \approx I$, deci eroarea introdusă de ampermetrul real este mică dacă rezistența acestuia este mică prin comparație cu rezistența circuitului.

Voltmetru real/ideal





Voltmetrul este instrumentul cu care se măsoară tensiunea electrică și se conectează în paralel cu elementul de circuit la bornele căruia se măsoară tensiunea. În imaginea alăturată este prezentat circuitul simplu **(a)** în care rezistorul este parcurs de curentul electric cu intensitatea *I*, având la borne tensiunea *U*. Din legea lui Ohm obținem:

$$I = \frac{E}{R+r}, \quad U = RI = \frac{RE}{R+r} \quad \Rightarrow \quad U = \frac{E}{1+\dfrac{r}{R}}.$$

Notăm cu R_V rezistența interioară a voltmetrului. După conectarea voltmetrului în circuit **(b)**, rezistența circuitului exterior generatorului se modifică. Rezistența echivalentă a circuitului exterior devine acum $R_e = \dfrac{RR_\text{V}}{R+R_\text{V}}$, iar din legea lui Ohm obținem:

$$I_0 = \frac{E}{R_e+r}, \quad U_\text{V} = R_e I_0 = \frac{R_e E}{R_e+r} = \frac{E}{1+\dfrac{r}{R_e}} \quad \Rightarrow \quad U_\text{V} = \frac{E}{1+r\left(\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R_\text{V}}\right)}.$$

Este evident faptul că cele două circuite nu sunt echivalente atât timp cât rezistența internă a voltmetrului este finită ceea ce înseamnă că prin conectarea voltmetrului în circuit se modifică atât intensitatea curentului cât și tensiunea la bornele rezistorului. Totuși, modificările datorate conectării voltmetrului în circuit vor fi cu atât mai mici cu cât termenul $\frac{1}{R_V}$ este mai mic comparativ cu termenul $\frac{1}{R}$. Din $\frac{1}{R_V} \ll \frac{1}{R}$ obținem $R_V \gg R.$ Așadar un voltmetru real bun trebuie să aibă $R_V \gg R$ pentru a introduce o eroare cât mai mică prin conectarea lui la bornele rezistorului.

Din ecuațiile scrise anterior observăm că $I_0 = I,$ respectiv $U_V = U$ (cele două circuite **(a)** și **(b)** sunt echivalente) numai dacă $R_V \to \infty.$ În concluzie, **voltmetrul cu rezistență interioară infinită este numit voltmetru ideal**.

Exemplu:

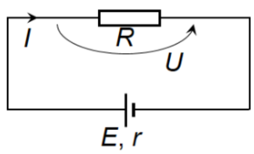
Considerăm un rezistor cu rezistența electrică $R = 18\Omega,$ conectat la bornele unui generator cu tensiunea electromotoare $E = 10\text{V}$ și cu rezistența interioară $r = 2\Omega.$ Calculăm tensiunea la bornele rezistorului când se conectează succesiv, în paralel cu rezistorul:

- un voltmetru cu $R_{V1} = 24\Omega$: $U_{V1} = \frac{E}{1 + r\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_{V1}}\right)} = 8,3721\text{V} \approx 8,37\text{V}.$
- un voltmetru cu $R_{V2} = 1000\Omega$: $U_{V2} = \frac{E}{1 + r\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_{V2}}\right)} = 8,9838\text{V} \approx 8,98\text{V}.$
- un voltmetru ideal $(R_V \to \infty)$: $U = \frac{E}{1 + \frac{r}{R}} = 9\text{V}.$

Observăm $U_{V2} \approx U,$ deci eroarea introdusă de voltmetrul real este mică dacă rezistența acestuia este mare prin comparație cu rezistența rezistorului.

Ampermetrul ideal și voltmetrul ideal – determinarea rezistenței electrice

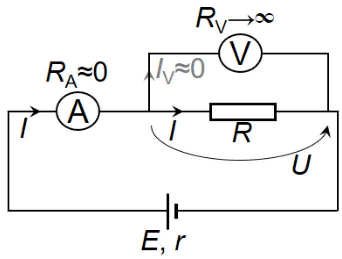
Prin definiție, ***rezistența electrică*** este egală cu raportul constant dintre tensiunea aplicată și intensitatea curentului electric, la temperatură constantă. Așadar, în circuitul simplu prezentat în figura alăturată, $R = \frac{U}{I}$.



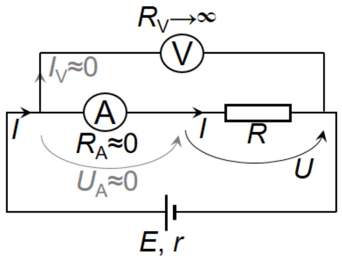
Determinarea experimentală a rezistenței electrice impune măsurarea tensiunii la bornele rezistorului și măsurarea intensității curentului electric prin rezistor. Dacă vom considera că voltmetrul și ampermetrul sunt ideale, atunci conectarea acestora în circuit nu modifică nici intensitatea curentului prin rezistor și nici tensiunea la bornele rezistorului.

Sunt posibile doua configurații:

i) Montajul aval în care *voltmetrul* se montează în circuit *„după" ampermetru* (adică în „*aval*" față de ampermetru, în sensul „curgerii" curentului electric prin circuit), ca în circuitul prezentat în figura alăturată, adică ampermetrul este conectat în serie cu gruparea paralel formată din rezistor și voltmetru. Ampermetrul ideal nu opune rezistență la trecerea curentului, în timp ce voltmetrul ideal nu permite trecerea curentului electric prin el. De aceea, ampermetrul ideal măsoară intensitatea curentului electric ce trece prin el dar și prin rezistor, *I*, deoarece $I_V \approx 0$, iar voltmetrul ideal măsoară exact tensiunea la bornele rezistorului, *U*. În consecință rezistența rezistorului se calculează cu precizie, $R = \frac{U}{I}$.



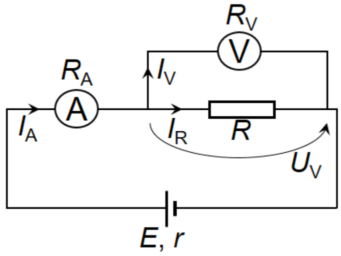
ii) Montajul amonte în care *voltmetrul* se montează în circuit *„înaintea ampermetrului"* (adică în „*amonte*" față de ampermetru, în sensul „curgerii" curentului electric prin circuit), ca în circuitul prezentat în figura alăturată, adică voltmetrul este conectat în paralel cu gruparea serie formată din ampermetru și rezistor. Ampermetrul ideal nu opune rezistență la trecerea curentului, în timp ce voltmetrul ideal nu permite trecerea curentului electric prin el. De aceea, tensiunea la bornele ampermetrului ideal este nulă, $U_A = R_A I \approx 0$, iar voltmetrul ideal măsoară tensiunea la bornele rezistorului, *U*, în timp ce ampermetrul ideal măsoară exact intensitatea curentului electric ce trece prin rezistor, *I*. În consecință rezistența rezistorului se calculează cu precizie, $R = \frac{U}{I}$, la fel ca în cazul montajului aval.



Ampermetrul real și voltmetrul real – determinarea rezistenței electrice

Analizăm, din nou, cele doua configurații, luând în calcul rezistențele instrumentelor de măsură, R_A – rezistența internă a ampermetrului, respectiv R_V – rezistența internă a voltmetrului. Dacă notăm cu U_V și I_A indicațiile voltmetrului și ampermetrului, atunci rezistența măsurată se calculează cu relația $R_m = \dfrac{U_\mathrm{V}}{I_\mathrm{A}}$ și va conține o eroare sistematică de metodă, mai mare sau mai mică în funcție de configurația aleasă (aval sau amonte).

i) Montajul aval



În circuitul prezentat în figura alăturată voltmetrul indică exact tensiunea la bornele rezistorului, U_V, dar ampermetrul ***nu*** indică intensitatea curentului prin rezistor, notată cu I_R. Curentul indicat de ampermetru este cel care trece prin ampermetru, adică $I_\mathrm{A} = I_\mathrm{R} + I_\mathrm{V}$. În montajul aval, relația corectă pentru calculul rezistenței trebuie să țină cont de curentul care „se pierde” prin voltmetru:

$$R = \frac{U_\mathrm{V}}{I_\mathrm{R}} = \frac{U_\mathrm{V}}{I_\mathrm{A} - I_\mathrm{V}} = \frac{U_\mathrm{V}}{I_\mathrm{A} - \dfrac{U_\mathrm{V}}{R_\mathrm{V}}}.$$

Dar rezistența măsurată este $R_m = \dfrac{U_\mathrm{V}}{I_\mathrm{A}} \Rightarrow U_\mathrm{V} = R_m I_\mathrm{A}$. Înlocuim în relația anterioară și obținem:

$$R = \frac{R_m I_\mathrm{A}}{I_\mathrm{A} - \dfrac{R_m I_\mathrm{A}}{R_\mathrm{V}}} = \frac{R_m}{1 - \dfrac{R_m}{R_\mathrm{V}}} = \frac{R_m R_\mathrm{V}}{R_\mathrm{V} - R_m} \quad \Leftrightarrow \quad RR_\mathrm{V} - RR_m = R_m R_\mathrm{V}.$$

Așadar, rezistența măsurată exprimată în funcție de rezistența reală a rezistorului este:

$$R_m = \frac{RR_\mathrm{V}}{R + R_\mathrm{V}}.$$

Eroarea absolută sistematică a metodei aval este dată de relația:

$$(\Delta R)_{aval} = R_m - R = \frac{RR_\mathrm{V}}{R + R_\mathrm{V}} - R = -\frac{R^2}{R + R_\mathrm{V}},$$

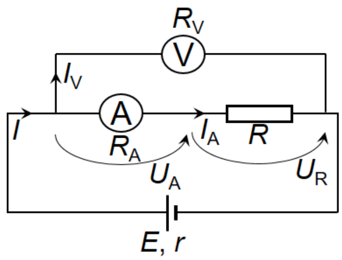
Iar modulul erorii relative în montajul aval este dat de relația:

$$\varepsilon_{aval} = \left|\frac{(\Delta R)_{aval}}{R}\right| = \frac{R}{R + R_\mathrm{V}} = \frac{1}{1 + \dfrac{R_\mathrm{V}}{R}}.$$

Concluzii:

- Dacă voltmetrul ar fi ideal, $R_V \to \infty$, $\frac{1}{\infty} \to 0$, eroarea relativă ar fi nulă.
- În cazul montajului aval, doar rezistența internă a voltmetrului reprezintă sursa erorii sistematice, eroarea fiind independentă de rezistența internă a ampermetrului.
- Eroarea relativă este cu atât mai mică cu cât raportul $\frac{R_V}{R}$ este mai mare. De exemplu, dacă $R = R_V \Rightarrow \varepsilon_{aval} = \frac{1}{2} = 50\%$.
- **Deci montajul aval este potrivit pentru măsurarea rezistențelor de valori mici**.

ii) Montajul amonte



În circuitul prezentat în figura alăturată ampermetrul indică exact intensitatea curentului prin rezistor, I_A, dar voltmetrul ***nu*** indică tensiunea la bornele rezistorului, notată cu U_R. Tensiunea măsurată de voltmetru este tensiunea la bornele grupării serie alcătuite din ampermetru și rezistor, adică $U_V = U_A + U_R$. În montajul amonte, relația corectă pentru calculul rezistenței trebuie să țină cont de tensiunea care „se pierde” la bornele ampermetrului:

$$R = \frac{U_R}{I_A} = \frac{U_V - U_A}{I_A} = \frac{U_V - R_A I_A}{I_A} = \frac{U_V}{I_A} - R_A .$$

Dar rezistența măsurată este $R_m = \frac{U_V}{I_A}$. Înlocuim în relația anterioară și obținem:

$$R = R_m - R_A .$$

Așadar, rezistența măsurată exprimată în funcție de rezistența reală a rezistorului este: $R_m = R + R_A$.

Eroarea absolută sistematică a metodei amonte este dată de relația:

$$(\Delta R)_{amonte} = R_m - R = R_A ,$$

Iar modulul erorii relative în montajul amonte este dat de relația:

$$\varepsilon_{amonte} = \left| \frac{(\Delta R)_{amonte}}{R} \right| = \frac{R_A}{R} .$$

Concluzii:

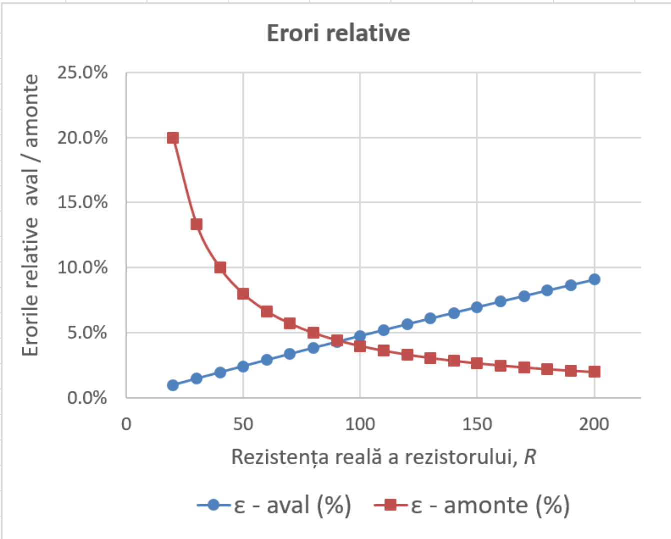
- Dacă ampermetrul ar fi ideal, $R_A \approx 0$, eroarea relativă ar fi nulă.
- În cazul montajului amonte, doar rezistența internă a ampermetrului reprezintă sursa erorii sistematice, eroarea fiind independentă de rezistența internă a voltmetrului.
- Eroarea relativă este cu atât mai mică cu cât raportul $\frac{R_A}{R}$ este mai mic. De exemplu, dacă $R = R_A \Rightarrow \varepsilon_{amonte} = 1 = 100\%$.
- **Deci montajul amonte este potrivit pentru măsurarea rezistențelor de valori mari**.

Comparație aval/amonte. Exemplu

Considerăm un rezistor cu rezistența electrică în intervalul $R \in [20\Omega, 200\Omega]$. Având la dispoziție un ampermetru cu rezistența internă $R_A = 4\Omega$ și un voltmetru cu rezistența internă $R_V = 2000\Omega$, reprezentăm grafic cele două erori relative ale montajelor aval și respectiv amonte, în funcție de rezistența rezistorului, *R*. Cele două funcții sunt:

- $\varepsilon_{aval} = \frac{R}{R + R_V}$
- $\varepsilon_{amonte} = \frac{R_A}{R}$

A	B	D: R - reală (Ω)	E: ε - aval (%)	F: ε - amonte (%)
RA (Ω)	4	20	1.0%	20.0%
RV (Ω)	2000	30	1.5%	13.3%
		40	2.0%	10.0%
		50	2.4%	8.0%
		60	2.9%	6.7%
		70	3.4%	5.7%
		80	3.8%	5.0%
		90	4.3%	4.4%
		100	4.8%	4.0%
		110	5.2%	3.6%
		120	5.7%	3.3%
		130	6.1%	3.1%
		140	6.5%	2.9%
		150	7.0%	2.7%
		160	7.4%	2.5%
		170	7.8%	2.4%
		180	8.3%	2.2%
		190	8.7%	2.1%
		200	9.1%	2.0%



Observăm în tabel și pe grafic că pentru măsurarea rezistențelor mici eroarea relativă este mai mică în cazul utilizării montajului aval $(\varepsilon_{aval} < \varepsilon_{amonte})$, iar pentru măsurarea rezistențelor mari eroarea relativă este mai mică în cazul utilizării montajului amonte $\left(\varepsilon_{amonte} < \varepsilon_{aval}\right)$.

Limita se poate estima din egalarea celor două erori relative:

$$\varepsilon_{aval} = \varepsilon_{amonte} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{R}{R+R_{\mathrm{V}}} = \frac{R_{\mathrm{A}}}{R} \quad \Leftrightarrow \quad R^2 = R_{\mathrm{A}}\left(R+R_{\mathrm{V}}\right)$$

Dacă neglijăm R în comparație cu R_{V} obținem $R \approx \sqrt{R_{\mathrm{A}} R_{\mathrm{V}}}$. În concluzie, pentru minimizarea erorii sistematice se va folosi:

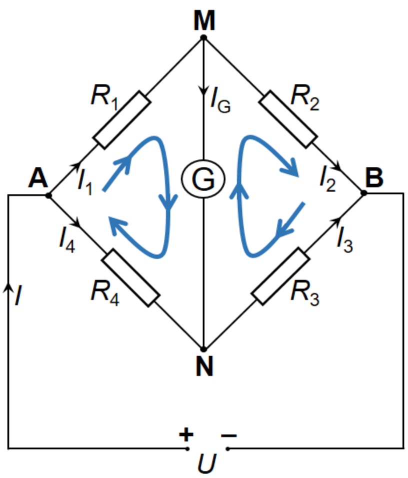
- montajul aval dacă $R < \sqrt{R_{\mathrm{A}} R_{\mathrm{V}}}$,
- montajul amonte dacă $R > \sqrt{R_{\mathrm{A}} R_{\mathrm{V}}}$.

Determinarea rezistenței electrice cu puntea Wheatstone

Puntea Wheatstone

Măsurarea cu mare precizie a rezistenței electrice se poate face cu ajutorul punții Wheatstone, prezentată în figura alăturată.

Puntea Wheatstone conține patru rezistoare conectate pe laturile unui pătrat. La o diagonală a punții (**AB**) se conectează o sursă de tensiune, iar la cealaltă diagonală (**MN**) se conectează un galvanometru, adică un miliampermetru (sau chiar microampermetru) cu poziția „zero" la centrul scalei gradate. Galvanometrul este utilizat pentru a pune în evidență intensitatea curentului electric notat cu I_{G} în figura alăturată. Notăm cu R_{G} rezistența electrică a galvanometrului.



Dacă prin galvanometru nu trece curent electric, $I_{\mathrm{G}} = 0$, atunci **puntea Wheatstone este echilibrată**. În aceste condiții, teoremele lui Kirchhoff se scriu astfel:

- în nodul **M**: $I_1 - I_{\mathrm{G}} - I_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = I_2$
- în nodul **N**: $I_4 + I_{\mathrm{G}} - I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_4 = I_3$
- în ochiul **AMN**: $0 = I_1 R_1 + I_{\mathrm{G}} R_{\mathrm{G}} - I_4 R_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 R_1 = I_4 R_4$

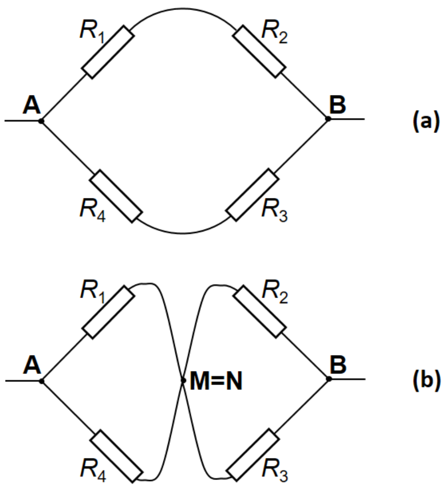
- în ochiul **MNB**: $0 = I_2R_2 - I_GR_G - I_3R_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_2R_2 = I_3R_3$

Din ultimele două relații obținem:

$$\frac{I_1R_1}{I_2R_2} = \frac{I_4R_4}{I_3R_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3} \quad \Leftrightarrow \quad R_1R_3 = R_2R_4$$

Relația $R_1R_3 = R_2R_4$ reprezintă condiția de echilibrare a punții Wheatstone, $I_0 = 0$. **Dacă produsul rezistențelor electrice de pe laturile opuse ale punții este același, atunci puntea este echilibrată, adică prin galvanometru nu trece curent electric.** În acest caz, tensiunea la bornele diagonalei MN este nulă, $U_{MN} = R_GI_0 = 0$, de aceea $U_{AM} = U_{AN}$ și $U_{MB} = U_{NB}$.

Puntea Wheatstone echilibrată se poate transforma astfel:



- **Fig. a)** rezistoarele parcurse de același curent sunt în serie: $R_{12} = R_1 + R_2$ și $R_{34} = R_3 + R_4$, iar rezistența echivalentă a punții între bornele **A** și **B** este $R_{AB(a)} = \frac{R_{12}R_{34}}{R_{12} + R_{34}} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$.
- **Fig. b)** rezistoarele cu aceeași tensiune la borne sunt în paralel (se pot aduce în comun punctele **M** și **N**): $R_{14} = \frac{R_1R_4}{R_1 + R_4}$ și $R_{23} = \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3}$, iar rezistența echivalentă a punții între bornele **A** și **B** este

$$R_{AB(b)} = R_{14} + R_{23} = \frac{R_1R_4}{R_1 + R_4} + \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3}.$$

Se poate demonstra ușor că $R_{AB(a)} = R_{AB(b)}$ dacă puntea este echilibrată. Notăm $R_1R_3 = R_2R_4 = X$, de unde rezultă $R_3 = \frac{X}{R_1}$ și $R_4 = \frac{X}{R_2}$.

Pentru circuitul din **fig. (a)**: $R_{AB(a)} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{(R_1 + R_2)\left(\frac{X}{R_1} + \frac{X}{R_2}\right)}{R_1 + R_2 + \frac{X}{R_1} + \frac{X}{R_2}} \quad \Rightarrow$

$$R_{\text{AB(a)}} = \frac{\dfrac{X\left(R_1+R_2\right)^2}{R_1R_2}}{R_1+R_2+\dfrac{X\left(R_1+R_2\right)}{R_1R_2}} \Rightarrow$$

$$R_{\text{AB(a)}} = \frac{\dfrac{X\left(R_1+R_2\right)^2}{R_1R_2}}{\dfrac{\left(R_1+R_2\right)\left(R_1R_2+X\right)}{R_1R_2}} \Rightarrow R_{\text{AB(a)}} = \frac{X\left(R_1+R_2\right)}{R_1R_2+X} \qquad (1)$$

Pentru circuitul din **fig. (b)**: $R_{\text{AB(b)}} = R_{14}+R_{23} = \dfrac{R_1R_4}{R_1+R_4}+\dfrac{R_2R_3}{R_2+R_3} \Rightarrow$

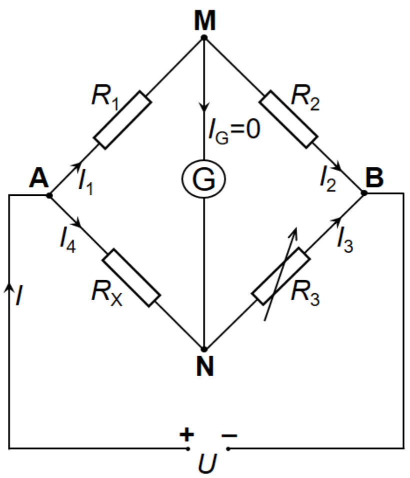
$$R_{\text{AB(b)}} = \frac{R_1\dfrac{X}{R_2}}{R_1+\dfrac{X}{R_2}}+\frac{R_2\dfrac{X}{R_1}}{R_2+\dfrac{X}{R_1}} \Rightarrow$$

$$R_{\text{AB(b)}} = \frac{R_1X}{R_1R_2+X}+\frac{R_2X}{R_1R_2+X} \Rightarrow R_{\text{AB(b)}} = \frac{X\left(R_1+R_2\right)}{R_1R_2+X} \qquad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă că $R_{\text{AB(a)}} = R_{\text{AB(b)}}$ dacă puntea este echilibrată, deci cele două circuite **(a)** și **(b)** sunt echivalente cu puntea Wheatstone echilibrată.

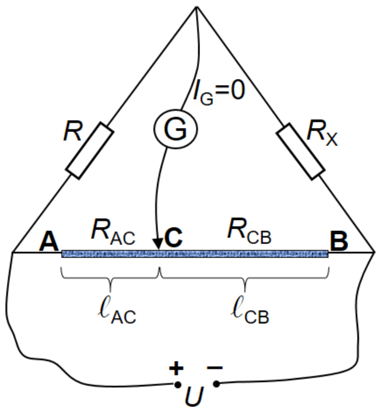
Puntea Wheatstone: determinarea rezistenței electrice

Utilizarea punții Wheatstone pentru determinare rezistenței electrice a unui rezistor are avantajul de a nu implica măsurarea unui curent electric sau a unei tensiuni. Galvanometrul punții este folosit pentru a echilibra puntea $\left(I_G=0\right)$, de aceea această metodă precisă de determinare a rezistenței electrice este numită și ***metodă de nul***.



În circuitul din figura alăturată, R_X este rezistența constantă, necunoscută, care va fi determinată, iar R_1, R_2 și R_3 sunt rezistențe cunoscute, rezistorul R_3 având rezistența electrică variabilă (fiind un reostat sau un potențiometru). Rezistența R_3 se modifică până când galvanometrul indică zero $\left(I_G=0\right)$, ceea ce înseamnă că puntea este echilibrată. În acest caz, din relația $R_1R_3=R_2R_X$ se calculează $R_X = \frac{R_1 R_3}{R_2}$. Așadar, dacă R_1, R_2 și R_3 sunt cunoscute cu mare precizie, atunci și R_X se va determina cu mare precizie.

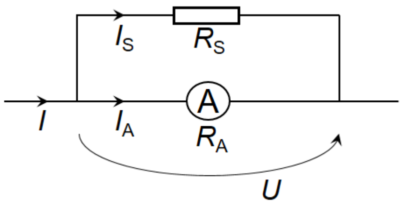
Puntea Wheatstone cu fir: determinarea rezistenței electrice



În circuitul din figura alăturată este prezentată o variantă a punții Wheatstone în care două din cele patru rezistoare sunt înlocuite cu un fir conductor (**AB**) pe care poate culisa un cursor mobil conectat la o bornă a galvanometrului (**C**). R_X este rezistența constantă, necunoscută, care va fi determinată, iar R este o rezistență cunoscută. Se deplasează cursorul mobil (**C**) în lungul firului până când galvanometrul indică zero $\left(I_G = 0\right)$, ceea ce înseamnă că puntea este echilibrată. În acest caz, din relația $RR_{CB} = R_{AC}R_X$ se obține $R_X = \frac{RR_{CB}}{R_{AC}}$. Rezistențele electrice ale celor două porțiuni ale firului sunt dependente de lungimile acestora, $R_{AC} = \rho\frac{\ell_{AC}}{S}$, respectiv $R_{CB} = \rho\frac{\ell_{CB}}{S}$. Astfel, rezistența necunoscută R_X se exprimă în funcție de rezistența cunoscută, R și de lungimile celor două porțiuni ale firului: $R_X = \frac{R\ell_{CB}}{\ell_{AC}}$.

Șuntul ampermetrului. Rezistența adițională a voltmetrului

Șuntul ampermetrului: extinderea domeniului de măsurare



Șuntul este un rezistor care se conectează în paralel cu ampermetrul cu scopul de a-i mări acestuia domeniul de măsurare. În figura alăturată este prezentată gruparea paralel formată din ampermetru și șunt, utilizată pentru măsurarea unui curent cu intensitatea $I > I_A$. Rezistența electrică a șuntului, notată R_S, este mai mică decât a ampermetrului (R_A), astfel încât ramura care conține șuntul preia o mare parte din curentul cu intensitatea *I*. Astfel, prin ampermetru trebuie să treacă cel mult curentul cu intensitatea maximă pe care acesta o poate măsura, pe care o vom nota I_{A_max}.

Notăm cu $n = \dfrac{I}{I_A}$ factorul de multiplicare, adică numărul care arată de câte ori se mărește domeniul de măsurare, deci $I = nI_A$.

Din teorema I a lui Kirchhoff, $I = I_A + I_S$, obținem $I_S = I - I_A \Leftrightarrow I_S = (n-1)I_A$.

Tensiunea la bornele grupării paralel este aceeași pe fiecare ramură, $U = R_A I_A = R_S I_S$, înlocuim I_S și obținem $R_A I_A = R_S (n-1) I_A$.

În final, rezistența șuntului, care trebuie conectat în paralel cu ampermetrul pentru a-i extinde domeniul de măsurare de *n* ori, este $R_S = \dfrac{R_A}{n-1}$.

<u>Exemplu</u>:

Considerăm un ampermetru cu $R_A = 1\,\Omega$, care poate măsura curenți electrici cu intensitatea maximă $I_{A\_max} = 0,2\,\text{A}$. Dacă dorim să determinăm curenți electrici cu intensitatea de până la $I_{max} = 1,2\,\text{A}$, factorul de multiplicare fiind $n = \dfrac{I_{max}}{I_{A\_max}} = 6$, atunci rezistența electrică a șuntului trebuie să fie $R_S = \dfrac{R_A}{n-1} = 0,2\,\Omega$. Astfel, gruparea paralel alcătuită din ampermetru și șunt poate fi folosită pentru a determina orice intensitate mai mică decât $I_{max} = 1,2\,\text{A}$, folosind relația $I = nI_A$, de exemplu:

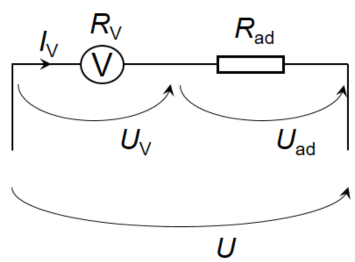
- dacă ampermetrul măsoară $I_A = 0,08\,\text{A}$, atunci $I = 6 \cdot 0,08\,\text{A} = 0,48\,\text{A}$;

- dacă ampermetrul măsoară $I_A = 0{,}1\,A$, atunci $I = 6 \cdot 0{,}1\,A = 0{,}6\,A$;
- dacă ampermetrul măsoară $I_A = 0{,}15\,A$, atunci $I = 6 \cdot 0{,}15\,A = 0{,}9\,A$.

Observăm că dacă șuntul ar fi lipsit din circuit, ampermetrul ar fi fost parcurs de curenți electrici cu intensitatea mai mare decât $I_{A\_max} = 0{,}2\,A$, curenți care ar putea deteriora ampermetrul.

Rezistența adițională a voltmetrului: extinderea domeniului de măsurare

Rezistorul adițional este un rezistor care se conectează în serie cu voltmetrul cu scopul de a-i mări acestuia domeniul de măsurare. În figura alăturată este prezentată gruparea serie alcătuită din voltmetru și rezistorul adițional, grupare utilizată pentru măsurarea unei tensiuni electrice $U > U_V$. Rezistența adițională, notată R_{ad}, este, de regulă, mai mare decât rezistența internă a voltmetrului (R_V), astfel încât rezistorul adițional să preia o mare parte din tensiunea U.



Astfel, tensiunea la bornele voltmetrului trebuie să fie cel mult egală cu tensiunea maximă pe care acesta o poate măsura, pe care o vom nota U_{V_max}.

Notăm cu $n = \dfrac{U}{U_V}$ factorul de multiplicare, adică numărul care arată de câte ori se mărește domeniul de măsurare, deci $U = nU_V$.

Tensiunea la bornele grupării serie fiind $U = U_V + U_{ad}$, obținem $U_{ad} = U - U_V$ $\Rightarrow$ $U_{ad} = (n-1)U_V$.

Intensitatea curentului electric este aceeași prin voltmetru și prin rezistorul adițional, $I_V = \dfrac{U_V}{R_V} = \dfrac{U_{ad}}{R_{ad}}$, înlocuim U_{ad} și obținem $\dfrac{U_V}{R_V} = \dfrac{(n-1)U_V}{R_{ad}}$.

În final, rezistența adițională care trebuie conectată în serie cu voltmetrul pentru a-i extinde domeniul de măsurare de *n* ori, este $R_{ad} = (n-1)R_V$.

<u>Exemplu</u>:

Considerăm un voltmetru cu $R_V = 500\,\Omega$, care poate măsura tensiuni cu valori de cel mult $U_{V\_max} = 10\,V$. Dacă dorim să determinăm tensiuni cu valori de până la $U_{max} = 120\,V$, factorul de multiplicare fiind $n=\dfrac{U_{\max}}{U_{\mathrm{V\_max}}}=12,$ atunci rezistența adițională trebuie să fie $R_{\mathrm{ad}}=(n-1)R_{\mathrm{V}}=5500\,\Omega.$ Astfel, gruparea serie alcătuită din voltmetru și rezistorul adițional poate fi folosită pentru a determina orice tensiune mai mică decât $U_{\max}=120\,\mathrm{V},$ folosind relația $U=nU_{\mathrm{V}}.$ de exemplu:

- dacă voltmetrul măsoară $U_{\mathrm{V}}=2\,\mathrm{V},$ atunci $U=12\cdot 2\,\mathrm{V}=24\,\mathrm{V};$
- dacă voltmetrul măsoară $U_{\mathrm{V}}=5\,\mathrm{V},$ atunci $U=12\cdot 5\,\mathrm{V}=60\,\mathrm{V};$
- dacă voltmetrul măsoară $U_{\mathrm{V}}=9\,\mathrm{V},$ atunci $U=12\cdot 9\,\mathrm{V}=108\,\mathrm{V}.$

Observăm că dacă rezistorul adițional ar fi lipsit din circuit, voltmetrul ar fi avut la borne tensiuni mai mari decât $U_{\mathrm{V\_max}}=10\,\mathrm{V},$ tensiuni care ar putea deteriora voltmetrul.