Rolul numerelor complexe în analiza circuitelor de curent alternativ

Ștefănescu Ștefan, Costin Dobrotă

Colegiul Național „DIMITRIE CANTEMIR” ONEȘTI

Aprilie, 2020

https://fizicaliceu.com

Abstract

The scope of this document is to analyze alternating current circuits in two different fashions: using phasors, on the one hand, and using complex numbers, on the other. Representing alternating current circuits' characteristic quantities in complex form leads to the identification of simple rules and useful relationships in problem solving. The calculation of impedance, phase shift and power can easily be performed for compound circuits, making this method invaluable to describing a wide range of electrical networks.

Scopul acestei prezentări este analiza circuitelor de curent alternativ din două perspective: utilizând diagrame fazoriale și metoda numerelor complexe. Reprezentarea mărimilor caracteristice circuitelor de curent alternativ în formă complexă conduce la identificarea unor reguli simple și relații utile în rezolvări de probleme. Calculul impedanței, defazajului și puterilor în curent alternativ poate fi făcut cu ușurință pentru circuite mixte ale căror diagrame fazoriale sunt adeseori dificil de realizat.

Cuprins

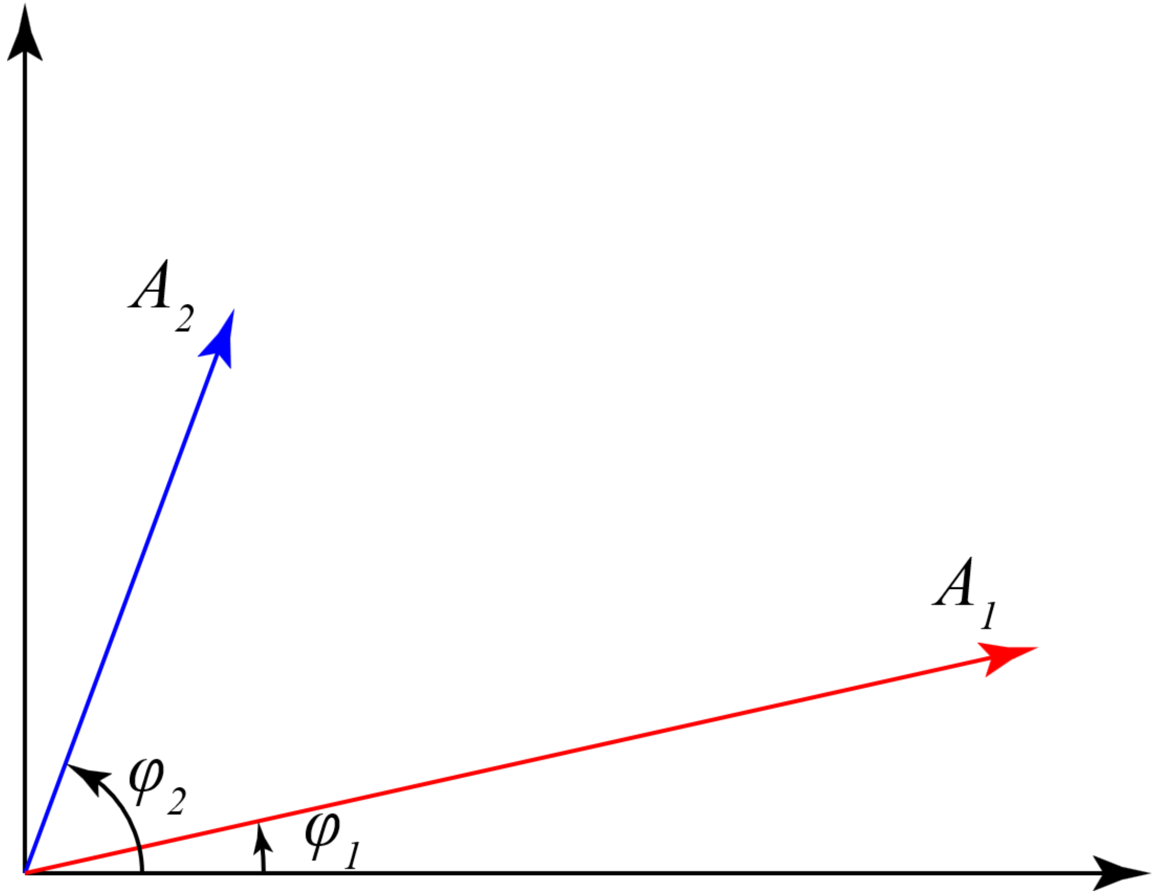
- Diagramele fazoriale: metoda „clasică” de rezolvare a circuitelor de curent alternativ
- Numere complexe și câteva proprietăți folositoare
- Mărimile electrice în forma complexă
- Impedanța complexă a elementelor de circuit
- Grupări RLC serie și paralel; grupări mixte
- Puterea în curent alternativ
- Probleme

Diagrame fazoriale

- Fazorii sunt vectori bidimensionali (în plan) care reprezintă mărimi oscilatorii obligatoriu de aceeași pulsație.
- Unghiul dintre doi fazori reprezintă defazajul dintre două mărimi, iar lungimea acestora reprezintă amplitudinea lor.
- De exemplu, diagrama fazorială din dreapta ilustrează următoarele două mărimi:

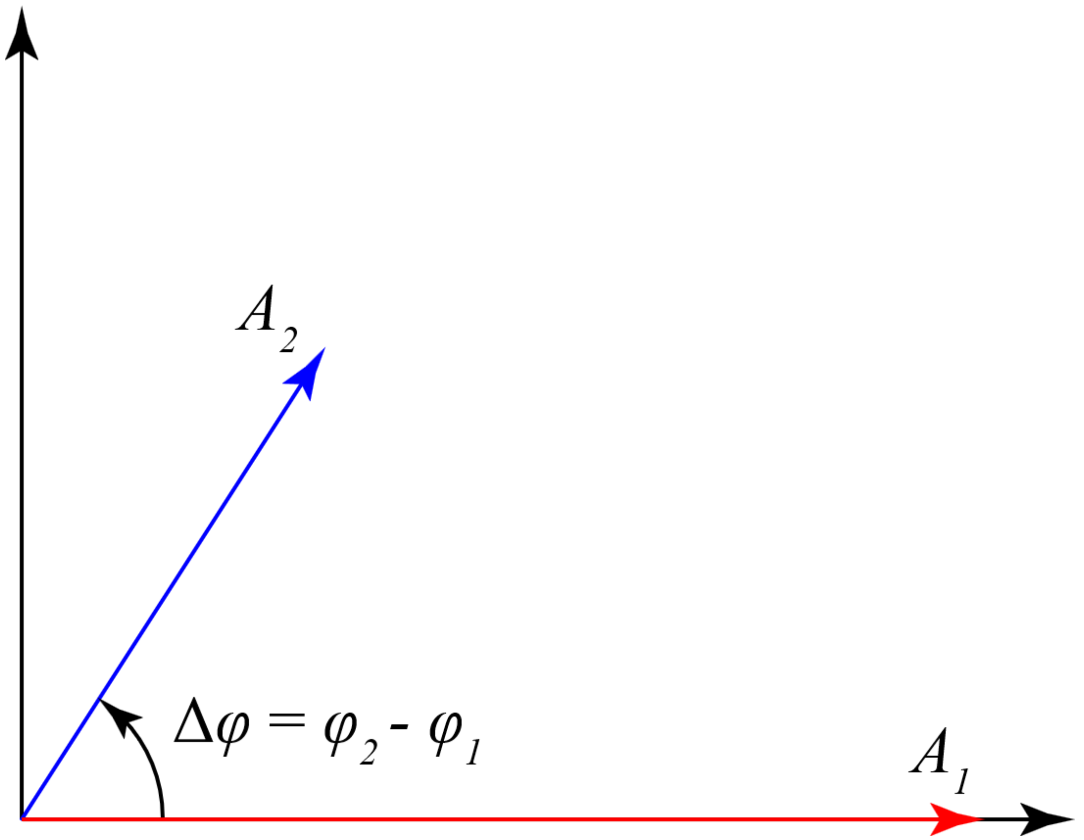
$$y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$



- Se observă că nu există un fazor de referință absolut, adică fazorii pot fi rotiți cu un același unghi arbitrar fără a le modifica semnificația fizică.
- În acest caz, cele două mărimi oscilatorii descrise anterior au forma:

$$y_1 = A_1 \sin \omega t$$
$$y_2 = A_2 \sin(\omega t + \Delta\varphi)$$



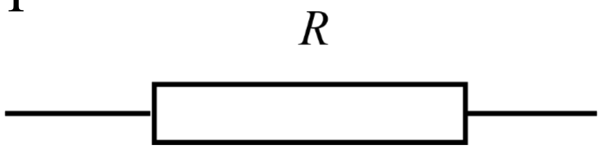
- În concluzie, o diagramă fazorială are drept parametri doar amplitudinile mărimilor și diferența de fază dintre mărimi. Fazorul de referință este ales convențional.

Elementele de circuit

1. Rezistorul – element activ

Într-un circuit de curent alternativ, rezistorul are practic același comportament ca într-un circuit de curent continuu – disiparea de energie prin efect Joule. Conform legii lui Ohm, căderea de tensiune pe acesta are expresia:

$$u = Ri$$

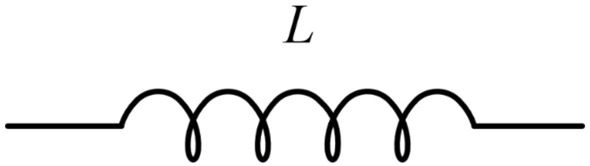


2. Bobina și condensatorul – elemente reactive

A. Bobina

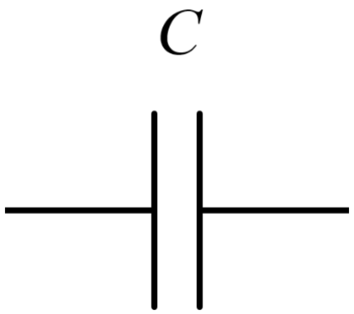
Se opune creșterii curentului prin fenomenul de autoinducție (se induce o tensiune de sens opus creșterii curentului), tensiunea fiind defazată înainte cu $\frac{\pi}{2}$ față de curent. Este caracterizată printr-o mărime analogă rezistenței numită reactanță inductivă:

$$X_L = \omega L$$



B. Condensatorul

Condensatorul se încarcă și se descarcă succesiv, defazând tensiunea în urmă față de intensitate cu $\frac{\pi}{2}$. Este caracterizat printr-o mărime analogă rezistenței numită reactanță capacitivă.



$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

Elementele reactive de circuit (bobina și condensatorul) înmagazinează energie în câmpul magnetic (în cazul bobinei) sau în câmpul electric (în cazul condensatorului). Aceasta este periodic eliberată înapoi în circuit.

$$E_{\text{bobină}} = \frac{LI^2}{2}$$

$$E_{\text{condensator}} = \frac{CU^2}{2}$$

Fazorii în contextul curentului alternativ

- Într-un circuit alimentat la o sursă alternativă sinusoidală, curentul și tensiunea pe elementele de circuit oscilează cu pulsația sursei, deci este justificată folosirea fazorilor.
- Având în vedere că aparatele de măsură detectează valorile efective ale curentului și ale tensiunii, acestea sunt de obicei folosite în diagramele fazoriale – și nu valorile maxime.
- Pentru circuitele serie se alege ca fazor de referință intensitatea (pentru că este aceeași pentru toate elementele de circuit).
- Pentru circuitele paralel se alege ca fazor de referință tensiunea (deoarece este aceeași la bornele tuturor elementelor de circuit).

Circuitul RLC serie

- Constă dintr-un rezistor, o bobină și un condensator conectate în serie.
- Curentul care trece prin aceste componente este același, deci vom alege ***intensitatea curentului – fazor de referință***.

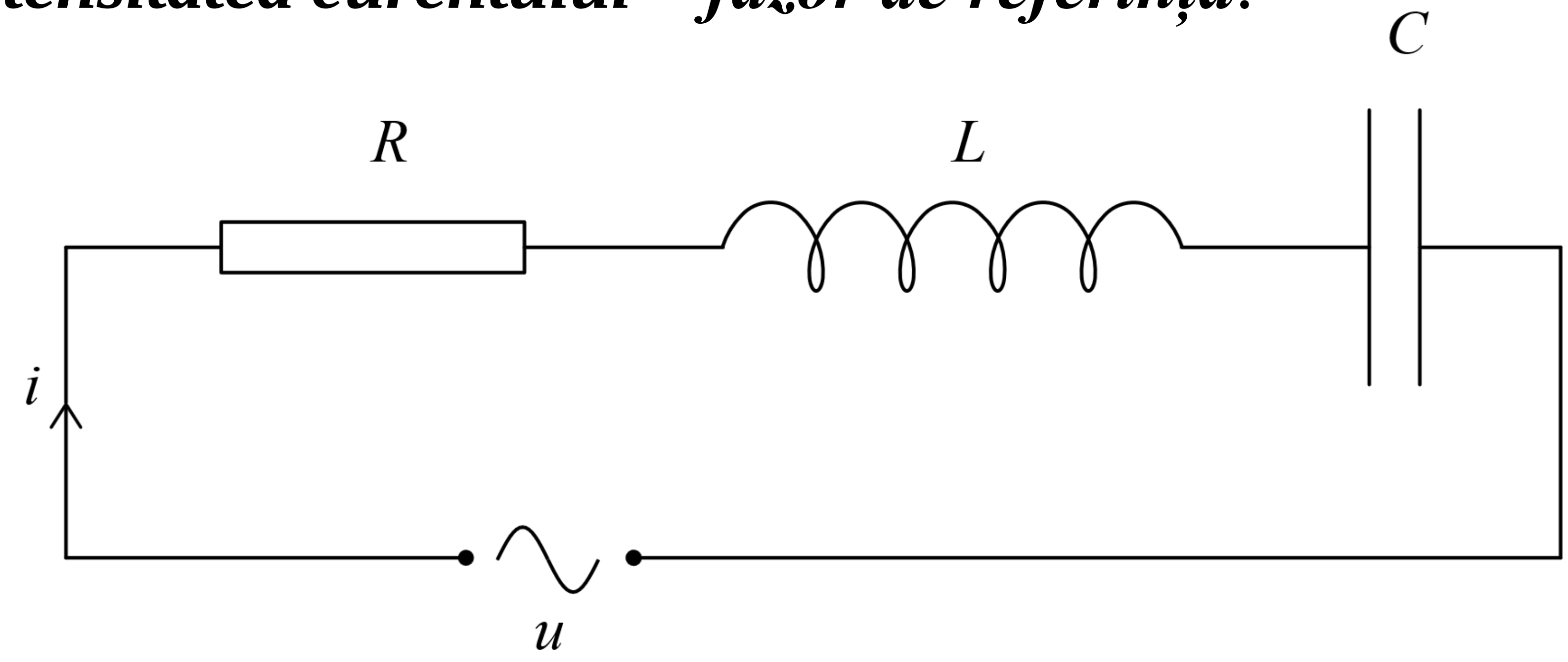


Diagrama fazorială a circuitului RLC serie

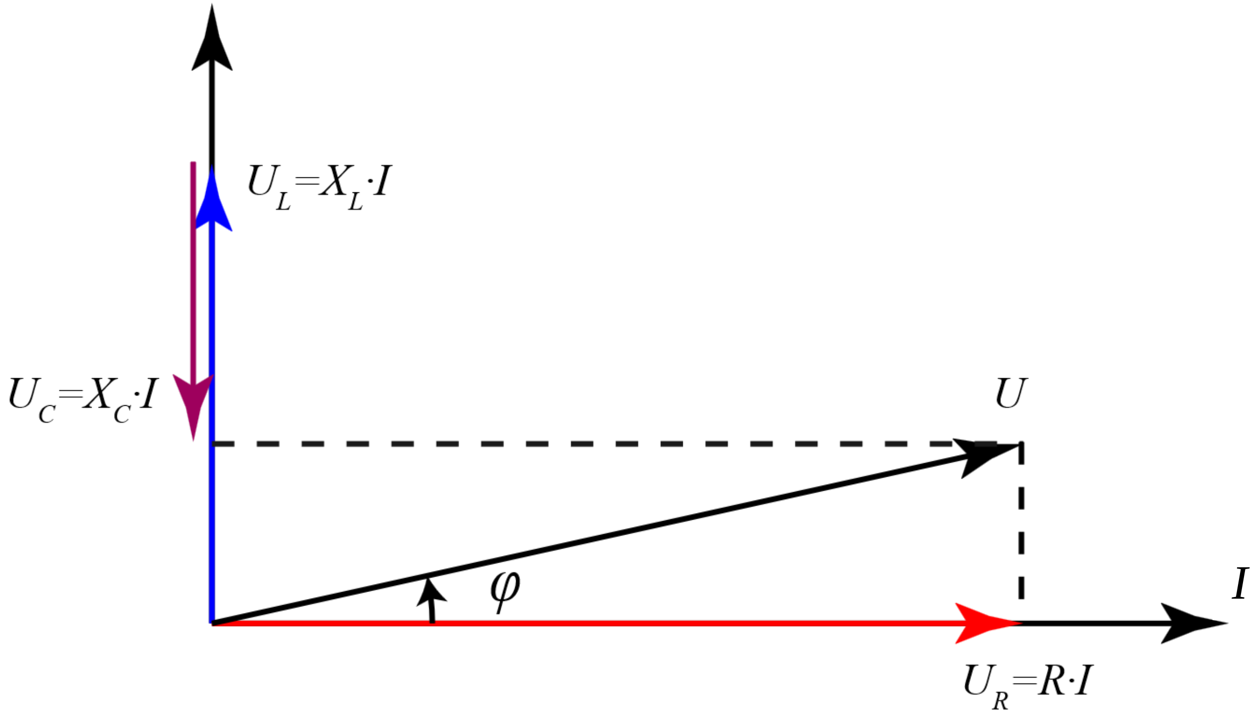
Tensiunea pe rezistor este în fază cu intensitatea și are expresia:

$$U_R = R \cdot I$$

Tensiunea pe bobină este defazată în față cu $\frac{\pi}{2}$, în timp ce tensiunea pe condensator este în urmă cu $\frac{\pi}{2}$.

$$U_L = X_L \cdot I$$

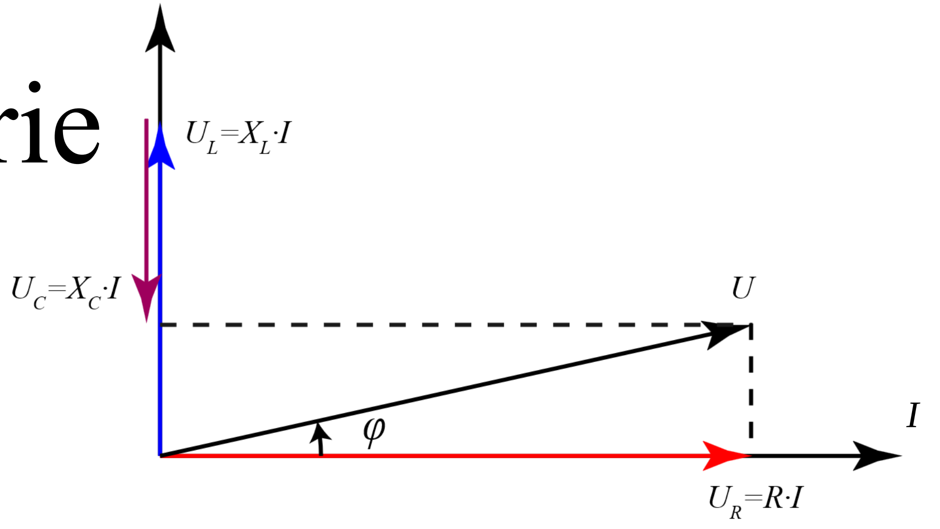
$$U_C = X_C \cdot I$$



Suma vectorială a acestor trei fazori este egală cu tensiunea la bornele circuitului. Din diagramă se observă că tensiunea U este defazată față de intensitate cu un unghi care poate fi calculat în triunghiul dreptunghic astfel:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{(X_L - X_C)I}{RI} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

Impedanța circuitului RLC serie



- Modulul tensiunii este determinat din teorema lui Pitagora aplicată în triunghiul dreptunghic din diagramă.

$$U^2 = (X_L - X_C)^2 \cdot I^2 + R^2 \cdot I^2$$

- Dacă se cunoaște tensiunea aplicată la bornele circuitului, valoarea efectivă a intensității va avea expresia:

$$I = \frac{U}{\sqrt{(X_L - X_C)^2 + R^2}}$$

- Raportul dintre valorile efective ale tensiunii și intensității poartă numele de impedanță, notată Z ($[Z]_{\text{S.I.}} = [R]_{\text{S.I.}} = 1\ \Omega$). În cazul circuitului RLC serie, Z este:

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{(X_L - X_C)^2 + R^2}$$

- Impedanța este mărimea analogă rezistenței în circuitele de curent alternativ.

Circuitul RLC paralel

- Constă dintr-un rezistor, o bobină și un condensator conectate în paralel.
- Tensiunea la bornele celor 3 elemente este identică, deci vom alege ***tensiunea – fazor de referință***.

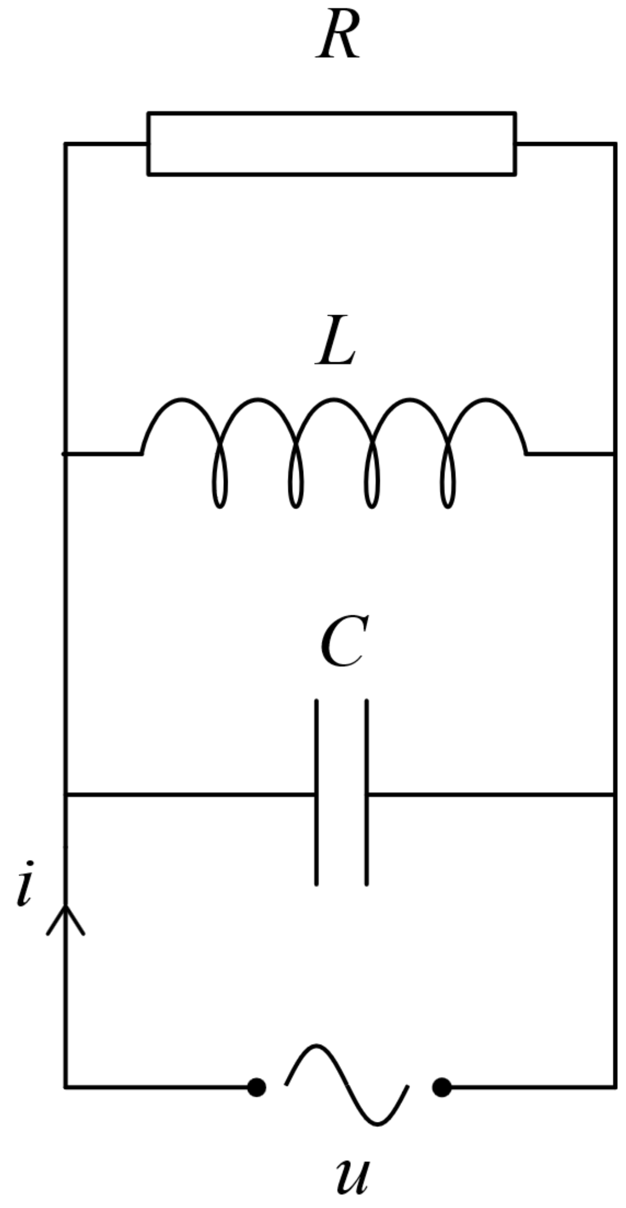


Diagrama fazorială a circuitului RLC paralel

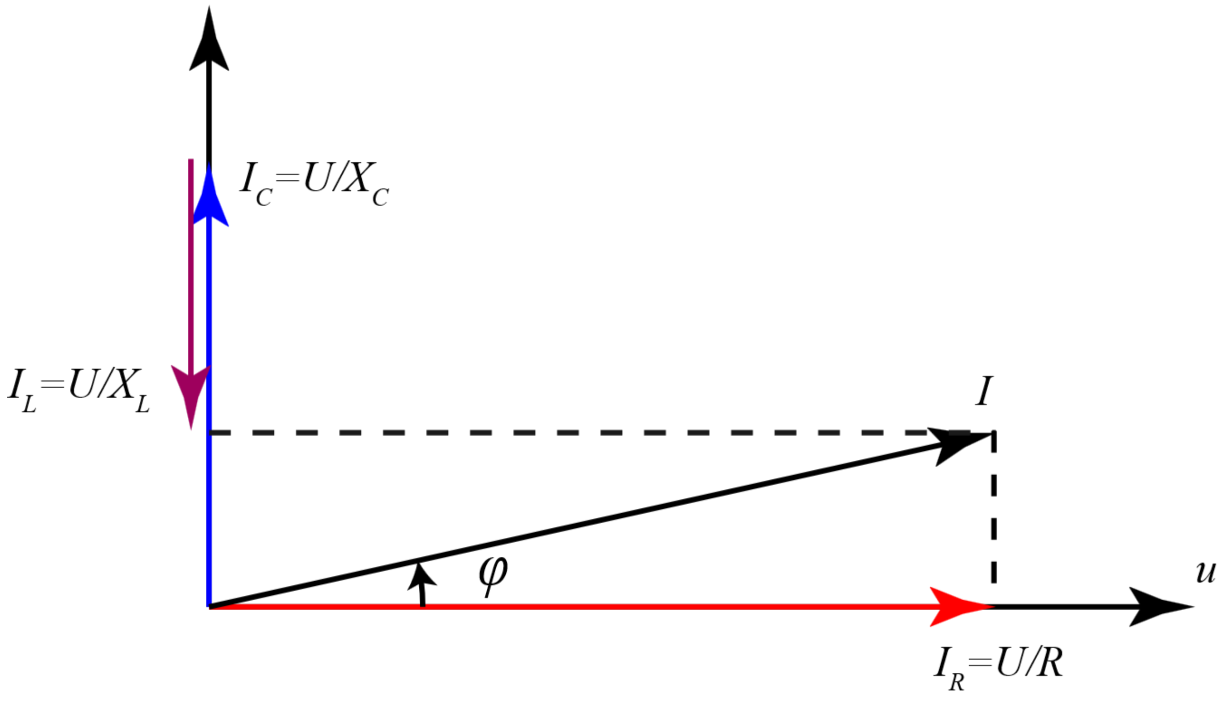
Curentul prin rezistor este în fază cu tensiunea aplicată și are intensitatea:

$$I_R = \frac{U}{R}$$

Curentul prin bobină este în urmă cu $\frac{\pi}{2}$, în timp ce curentul prin condensator este în față cu $\frac{\pi}{2}$.

$$I_C = \frac{U}{X_C}$$

$$I_L = \frac{U}{X_L}$$



Suma vectorială a celor trei fazori reprezentând intensitatea curentului prin ramuri este egală cu intensitatea curentului total. Din diagramă se observă că intensitatea este înaintea tensiunii cu un unghi care poate fi calculat astfel:

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{\frac{U}{X_C} - \frac{U}{X_L}}{\frac{U}{R}} = R\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)$$

Observație. Anterior am calculat defazajul intensității față de tensiunea la borne, dar de obicei se determină defazajul tensiunii față de intensitate. Acesta are aceeași valoare în modul, dar de semn opus:

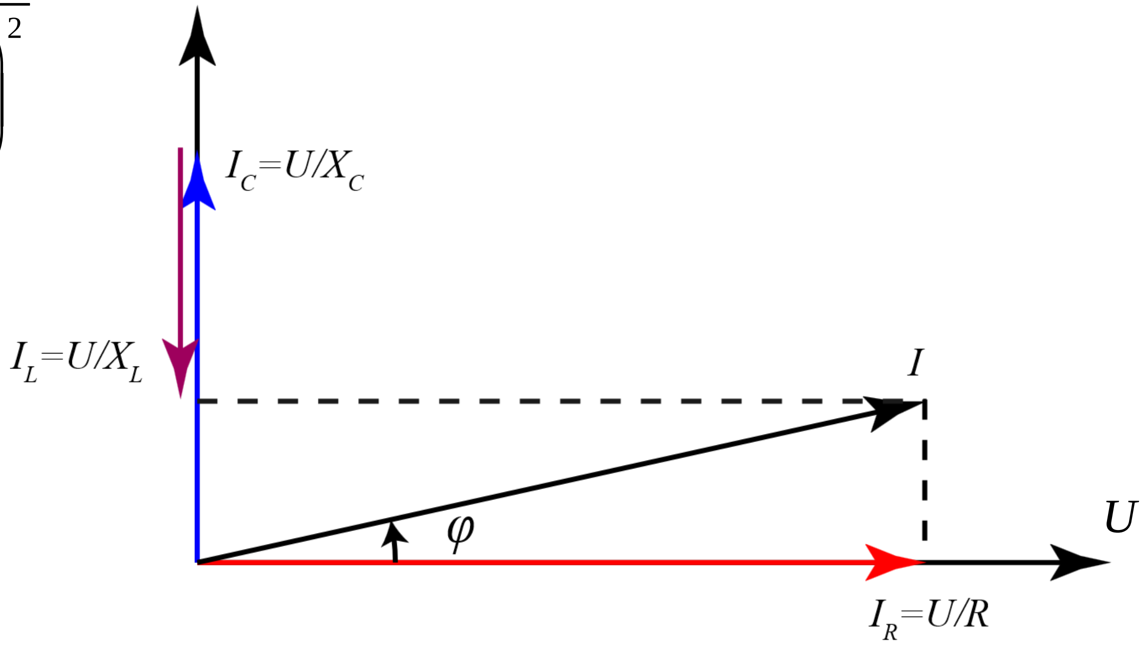
$$\mathrm{tg}\,\varphi' = \mathrm{tg}\left(-\varphi\right) = -\mathrm{tg}\,\varphi = R\left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)$$

Valoarea efectivă a intensității totale se calculează cu ajutorul teoremei lui Pitagora aplicată în triunghiul dreptunghic din diagrama fazorială.

$$I = \sqrt{\left(\frac{U}{R}\right)^2 + \left(\frac{U}{X_C} - \frac{U}{X_L}\right)^2} = U\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}$$

Impedanța circuitului RLC paralel va avea expresia:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}}$$



Numere complexe. Proprietăți

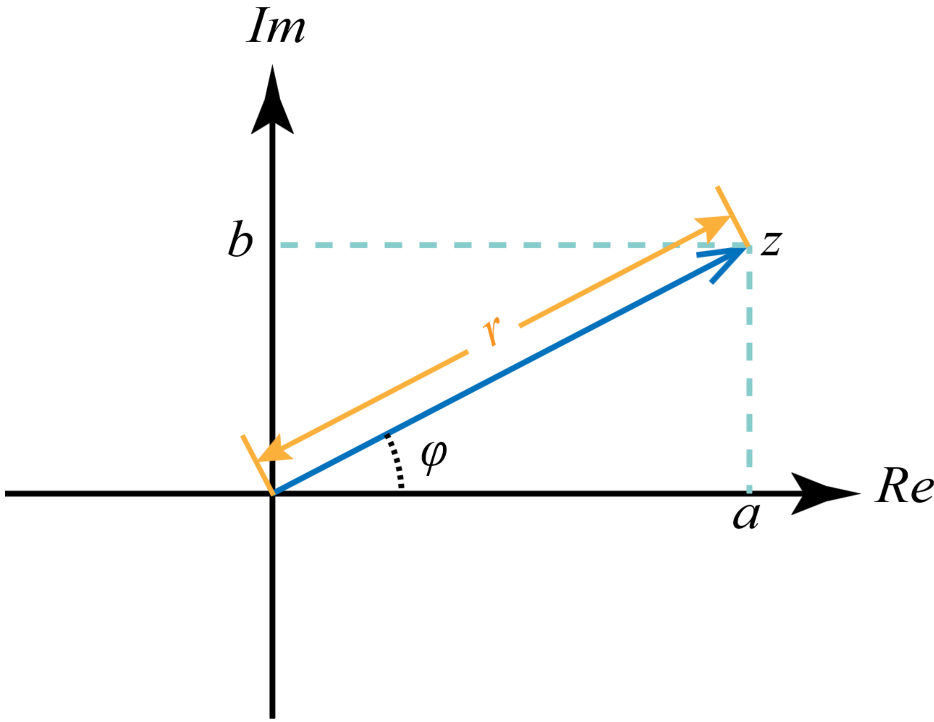
- Mulțimea numerelor complexe, $\mathbb{C}$, este formată din elemente de forma:

  $z = a + b \cdot j$, unde $a, b \in \mathbb{R}$

- j este unitatea imaginară, acel număr care are proprietatea: $j^2 = -1$
- a se numește partea reală a numărului complex z, not. $\operatorname{Re} z = a$
- b se numește partea imaginară a numărului complex z, not. $\operatorname{Im} z = b$
- Conjugatul unui număr complex: $\overline{z} = a - b \cdot j$
- Modulul unui număr complex: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Planul complex. Forma trigonometrică

- Numerele complexe pot fi vizualizate ca puncte într-un plan, numit plan complex.
- Numărul reprezentat, z, este asimilat cu un vector bidimensional de lungime $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Din figură se observă că numărul z poate fi exprimat și în funcție de lungimea sa, notată r, și unghiul facut cu axa reală, numit argument. Această scriere poartă numele de formă trigonometrică (polară).



$$a = r\cos\varphi$$

$$b = r\sin\varphi$$

φ este argumentul numărului z

$$\boxed{z = r\cdot(\cos\varphi + j\cdot\sin\varphi)}$$

Formula lui Euler

- Un rezultat cu o importanță deosebită în matematică și fizică, formula lui Euler face legătura între funcțiile trigonometrice și funcția exponențială complexă:

$$\boxed{e^{j\cdot\varphi} = \cos\varphi + j\cdot\sin\varphi}$$

- Prin urmare, orice număr complex se poate scrie sub forma:

$$\boxed{z = r\cdot(\cos\varphi + j\sin\varphi) = r\cdot e^{j\cdot\varphi}}$$

Mărimile electrice în formă complexă

- Anterior s-au introdus numerele complexe și s-a pus în evidență că prin intermediul lor sunt reprezentați vectori bidimensionali în planul complex, deci și fazori.
- Se știe că mărimile momentane ale tensiunii și intensității au forma:

$$u = U_m \cdot \cos(\omega t + \Delta\varphi)$$

$$i = I_m \cdot \cos(\omega t)$$

- Observând că $\mathrm{Re}\left(A \cdot e^{j\varphi}\right) = A \cdot \cos\varphi$, mărimile momentane se exprimă sub formă complexă astfel:

$$u = U_m \cdot e^{j(\omega t + \Delta\varphi)}$$

$$i = I_m \cdot e^{j\omega t}$$

Impedanța complexă

- Impedanța complexă se definește ca raportul dintre tensiunea la bornele unui circuit și intensitate (folosind formele complexe).

$$Z = \frac{u}{i} = \frac{U_m \cdot e^{j\omega t + j\cdot\Delta\varphi}}{I_m \cdot e^{j\omega t}} = \frac{U}{I} \cdot e^{j\omega t + j\cdot\Delta\varphi - j\omega t} = \frac{U}{I} \cdot e^{j\cdot\Delta\varphi}$$

Unde:

$\Delta\varphi$ este defazajul dintre tensiune și intensitate la bornele respectivei porțiuni de circuit
U este tensiunea efectivă la bornele porțiunii
I este intensitatea efectivă care trece prin porțiunea de circuit

- Luând modul din impedanța complexă, obținem:

$$|Z| = \frac{U}{I} \cdot \left|e^{j\varphi}\right| = \frac{U}{I} \cdot |\cos\varphi + j\sin\varphi| = \frac{U}{I}$$

Defazajul dintre tensiune și intensitate

- Cunoscând valoarea impedanței complexe, se poate determina unghiul de defazaj exprimând impedanța în două feluri:

$$Z = \operatorname{Re} Z + j \cdot \operatorname{Im} Z = |Z| \cdot \left(\frac{\operatorname{Re} Z}{|Z|} + j \cdot \frac{\operatorname{Im} Z}{|Z|} \right)$$

$$Z = |Z| \cdot e^{j\Delta\varphi} = |Z| \cdot (\cos\Delta\varphi + j\sin\Delta\varphi)$$

- Prin identificare, obținem:

$$\cos\Delta\varphi = \frac{\operatorname{Re} Z}{|Z|}$$

$$\sin\Delta\varphi = \frac{\operatorname{Im} Z}{|Z|}$$

- Deci, tangenta unghiului de defazaj va avea expresia:

$$\operatorname{tg}\Delta\varphi = \frac{\operatorname{Im} Z}{\operatorname{Re} Z}$$

Impedanțele elementelor de circuit

1) Rezistor – defazajul este dintre tensiune și intensitate este nul, deci:

$$Z_R = R$$

2) Bobină – defazajul este dintre tensiune și intensitate este $+\frac{\pi}{2}$, deci:

$$Z_L = \frac{U}{I} \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{X_L I}{I} \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + j \sin\frac{\pi}{2}) = X_L \cdot j$$

3) Condensator – defazajul este dintre tensiune și intensitate este $-\frac{\pi}{2}$, deci:

$$Z_C = \frac{U}{I} \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{X_C I}{I} \cdot (\cos\frac{\pi}{2} - j \sin\frac{\pi}{2}) = -X_C \cdot j$$

Calculul impedanței

- Utilizarea numerelor complexe în studiul circuitelor de curent alternativ are avantajul că regulile de la curentul continuu pentru grupările serie și paralel se aplică întocmai pentru impedanțele complexe.

$$Z_{\text{serie}} = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$$

$$\frac{1}{Z_{\text{paralel}}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \ldots + \frac{1}{Z_n}$$

- Relațiile de mai sus se folosesc obligatoriu pentru impedanțele complexe.

Analiza circuitului RLC serie

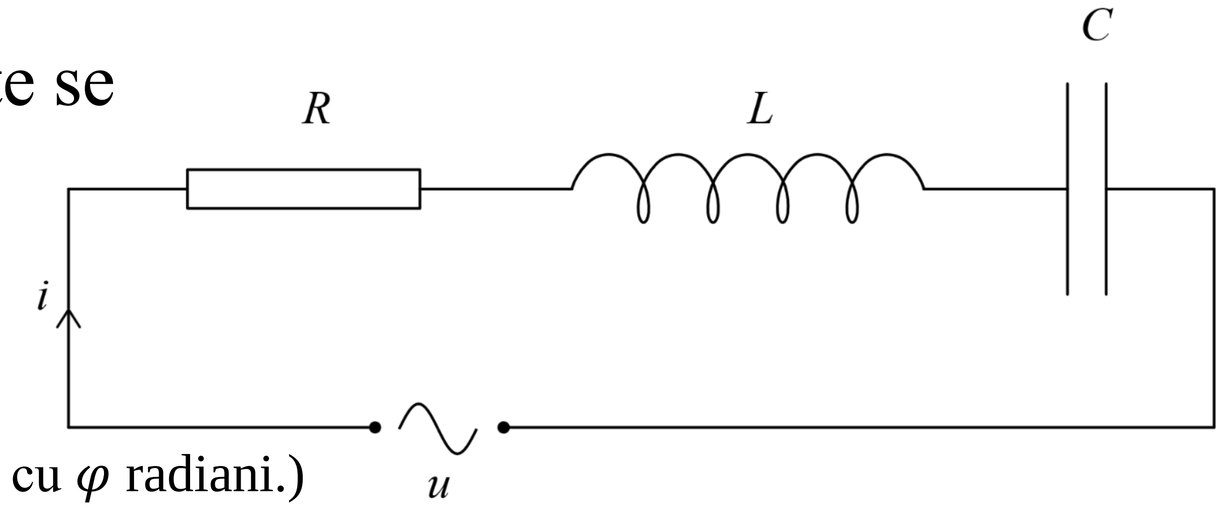
- Folosind formula pentru gruparea serie, se determină impedanța echivalentă a circuitului astfel:

$$Z_e = Z_R + Z_L + Z_C = R + X_L j - X_C j = R + (X_L - X_C) j$$

$$\frac{U}{I} = |Z_e| \Rightarrow I = \frac{U}{|R + (X_L - X_C) j|} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

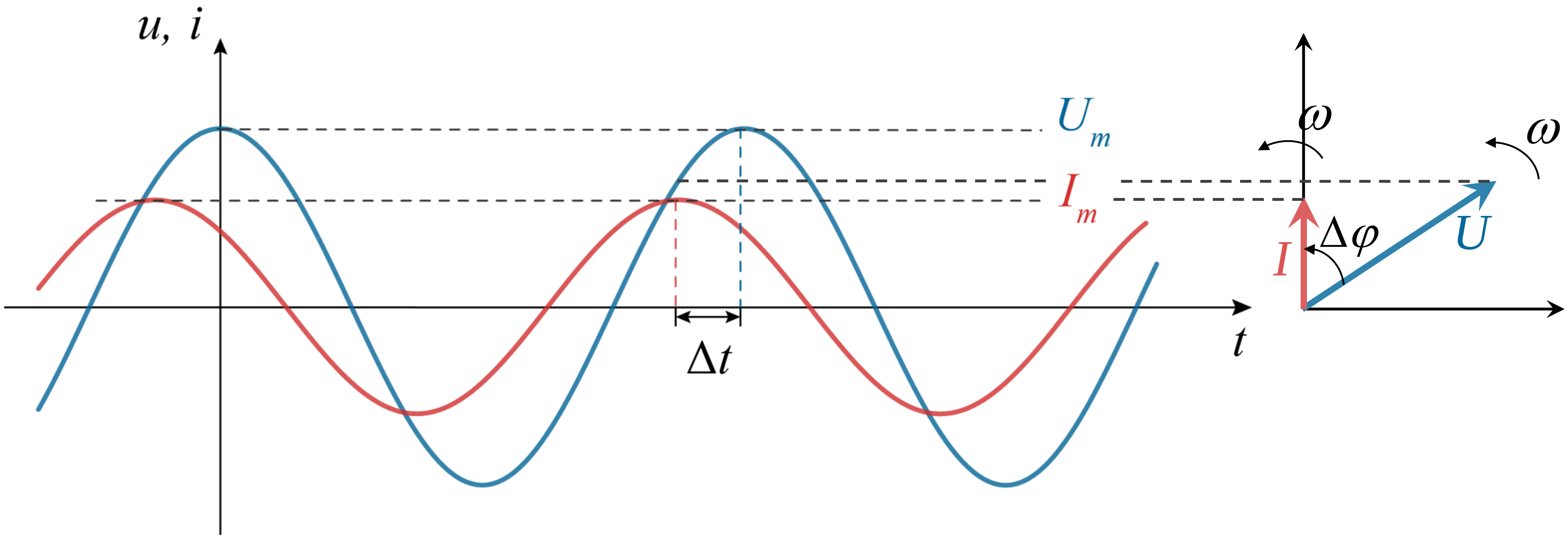
- Defazajul dintre tensiune și intensitate se calculează cu ajutorul tangentei:

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{\text{Im}\, Z_e}{\text{Re}\, Z_e} = \frac{X_L - X_C}{R}$$



(Tensiunea la bornele circuitului este înaintea intensității cu φ radiani.)

Reprezentarea tensiunii și intensității



Graficul de mai sus pune în evidență defazajul dintre tensiunea la bornele circuitului și intensitatea curentului: $\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t$ (tensiunea este defazată în urmă cu $\Delta\varphi$ față de intensitate, circuitul fiind capacitiv în acest exemplu).

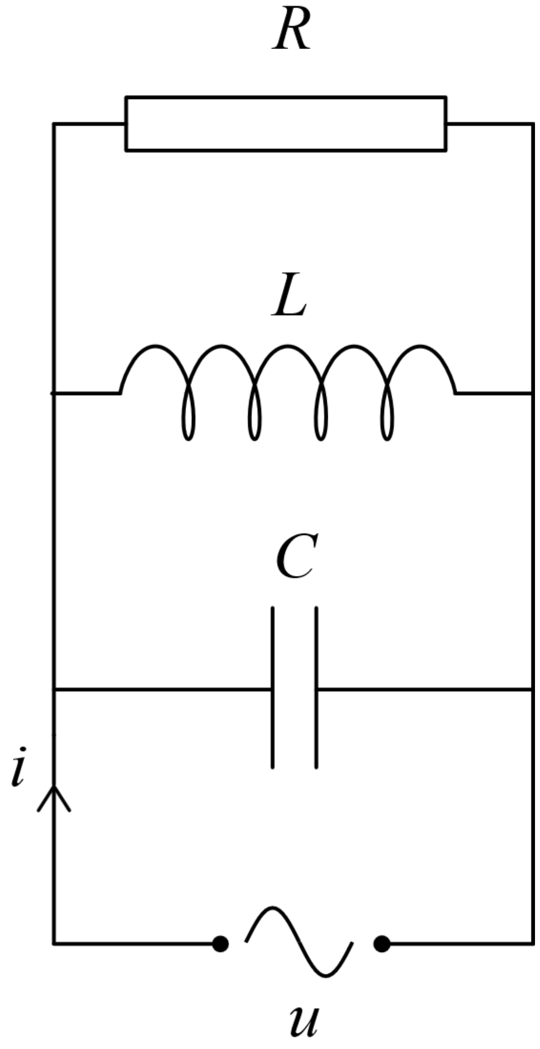
Analiza circuitului RLC paralel

- Folosind formula pentru gruparea paralel, se determină impedanța echivalentă a circuitului astfel:

$$\frac{1}{Z_e}=\frac{1}{Z_R}+\frac{1}{Z_L}+\frac{1}{Z_C}=\frac{1}{R}+\frac{1}{j\cdot X_L}-\frac{1}{j\cdot X_C}=\frac{1}{R}+j\cdot\left(\frac{1}{X_C}-\frac{1}{X_L}\right)$$

$$\frac{U}{I}=\left|Z_e\right|\Rightarrow I=\frac{U}{\left|Z_e\right|}=U\cdot\left|\frac{1}{R}+j\left(\frac{1}{X_C}-\frac{1}{X_L}\right)\right|\Rightarrow I=U\cdot\sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(\frac{1}{X_C}-\frac{1}{X_L}\right)^2}$$

$$Z_e=\frac{1}{\frac{1}{R}+j\left(\frac{1}{X_C}-\frac{1}{X_L}\right)}=\frac{\frac{1}{R}-j\left(\frac{1}{X_C}-\frac{1}{X_L}\right)}{\frac{1}{R^2}+\left(\frac{1}{X_C}-\frac{1}{X_L}\right)^2}=\frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R^2}+\left(\frac{1}{X_C}-\frac{1}{X_L}\right)^2}+j\cdot\frac{\frac{1}{X_L}-\frac{1}{X_C}}{\frac{1}{R^2}+\left(\frac{1}{X_C}-\frac{1}{X_L}\right)^2}$$



- Tangenta unghiului de defazaj va avea expresia:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{Im} Z}{\operatorname{Re} Z} = \frac{\dfrac{1}{X_L} - \dfrac{1}{X_C}}{\dfrac{1}{R}} = R\left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)$$

(Tensiunea la bornele circuitului este înaintea intensității cu φ radiani.)

- Calculând modulul impedanței complexe a circuitului RLC paralel obținem bineînțeles valoarea determinată cu ajutorul fazorilor.

$$|Z_e| = \frac{1}{\dfrac{1}{|Z_e|}} = \frac{1}{\left|\dfrac{1}{Z_e}\right|} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{R^2} + \left(\dfrac{1}{X_C} - \dfrac{1}{X_L}\right)^2}}$$

Puterea

- **Puterea instantanee** este produsul dintre valoarea momentană a tensiunii și valoarea momentană a intensității curentului alternativ.

$$p = u \cdot i = U_m \cdot \cos\left(\omega t + \Delta\varphi\right) \cdot I_m \cdot \cos\left(\omega t\right)$$

- **Puterea activă** reprezintă puterea medie disipată prin efect Joule (se obține prin medierea pe o perioadă a puterii instantanee).

$$p = U_m \cdot I_m \cdot \cos\left(\omega t + \Delta\varphi\right) \cdot \cos\left(\omega t\right) = \frac{U_m \cdot I_m}{2}\left[\cos\left(2\omega t + \Delta\varphi\right) + \cos\Delta\varphi\right]$$

$$= U \cdot I \cdot \cos\Delta\varphi + U \cdot I \cdot \cos\left(2\omega t + \Delta\varphi\right) \qquad \Rightarrow$$

$$P = \left\langle p \right\rangle = \left\langle U \cdot I \cdot \cos\Delta\varphi \right\rangle + \left\langle U \cdot I \cdot \cos\left(2\omega t + \Delta\varphi\right) \right\rangle = U \cdot I \cdot \cos\Delta\varphi$$

Valoarea medie a unei constante este chiar constanta, în timp ce valoarea medie a funcției cosinus este 0.

- **Puterea reactivă** reprezintă puterea efectuată de sursă care se întoarce periodic înapoi la aceasta (spre deosebire de puterea activă, care este consumată în circuit și eliberată sub formă de căldură, lumină sau lucru mecanic).

$$P_r = U \cdot I \cdot \sin \Delta\varphi$$

Observație

Într-un circuit format numai din condensatoare și bobine ideale, unghiul de defazaj este $\frac{\pi}{2}$, deci puterea activă este nulă (consumul net de energie necesar punerii în funcțiune a circuitului este nul). În practică această situație este imposibilă deoarece nu există circuit fără rezistență electrică și orice circuit de curent alternativ eliberează energie prin efecte radiative (unde electromagnetice).

- **Puterea aparentă** este produsul dintre intensitatea și tensiunea efectivă.

$$P_a = U \cdot I$$

Puterea în formă complexă

- Puterea, ca număr complex, are expresia: $S = |U| \cdot |I| = |Z| \cdot |I|^2$

- Se știe că impedanța complexă se poate exprima în funcție de unghiul de defazaj astfel:

$$Z = |Z| \cdot \left(\cos\Delta\varphi + j \cdot \sin\Delta\varphi\right)$$

- Expresia puterii devine, prin urmare:

$$S = |I|^2 \cdot |Z| \cdot \left(\cos\Delta\varphi + j \cdot \sin\Delta\varphi\right) = |U| \cdot |I| \cdot \cos\Delta\varphi + j \cdot |U| \cdot |I| \cdot \sin\Delta\varphi$$

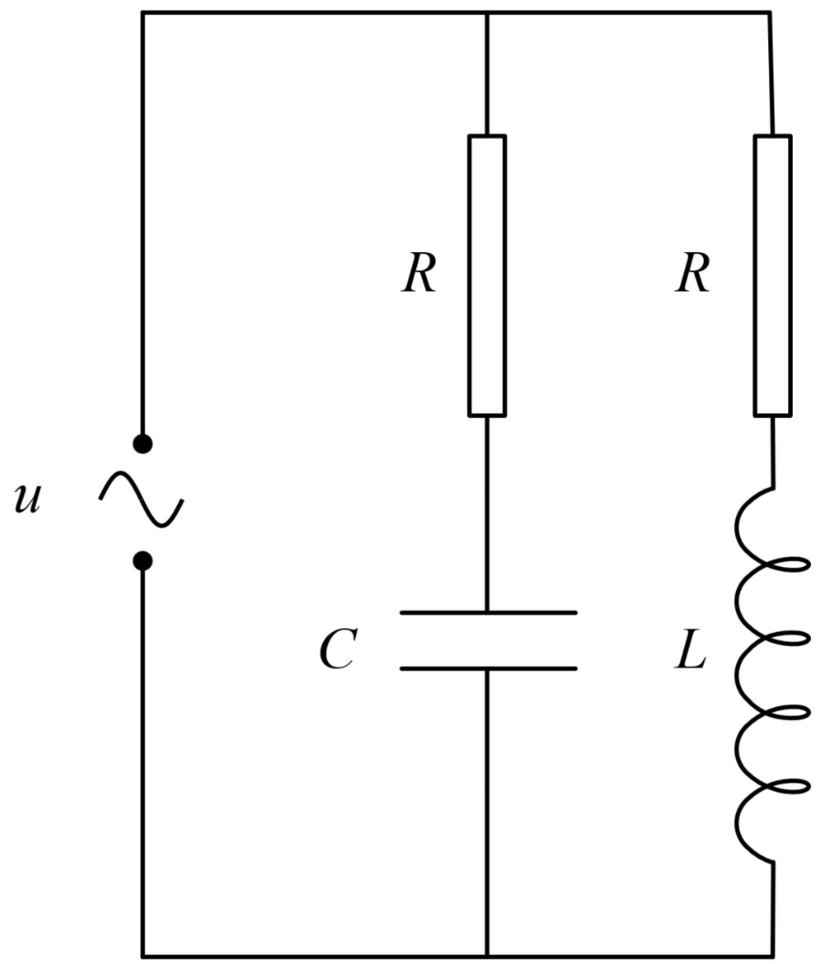
- Observăm că: $\mathrm{Re}\, S = P$ (puterea activă este partea reală a puterii complexe)

  $\mathrm{Im}\, S = P_r$ (puterea reactivă este partea imaginară a puterii complexe)

  $|S| = P_{\text{aparentă}}$

Probleme

1. **În circuitul din figură se cunosc: $\boldsymbol{\omega L = \frac{1}{\omega C}}$ și $\boldsymbol{\frac{\omega L}{R} = 10}$. Aflați de câte ori este mai mic curentul principal decât curenții prin ramuri. (A. Hristev, Probleme de electricitate, 2012)**



Soluție. Vom începe prin calcularea impedanțelor și a curenților prin ramuri:

$$Z_C = R - j\frac{1}{\omega C} \Rightarrow \frac{U}{I_C} = \left| R - j\frac{1}{\omega C} \right| \Rightarrow I_C = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$Z_L = R + j \cdot \omega L \Rightarrow \frac{U}{I_L} = \left| R + j \cdot \omega L \right| \Rightarrow I_L = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

Știind că $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, deducem că cele două intensități sunt egale: $$I_{\text{ramuri}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

Pentru a determina intensitatea curentului principal, calculăm mai întâi impedanța întregului circuit (se folosește formula pentru gruparea paralel):

$$\frac{1}{Z_e}=\frac{1}{Z_L}+\frac{1}{Z_C}=\frac{1}{R+j\omega L}+\frac{1}{R-j\cdot\frac{1}{\omega C}}=\frac{1}{R+j\omega L}+\frac{1}{R-j\omega L}=\frac{2R}{R^2+\left(\omega L\right)^2}$$

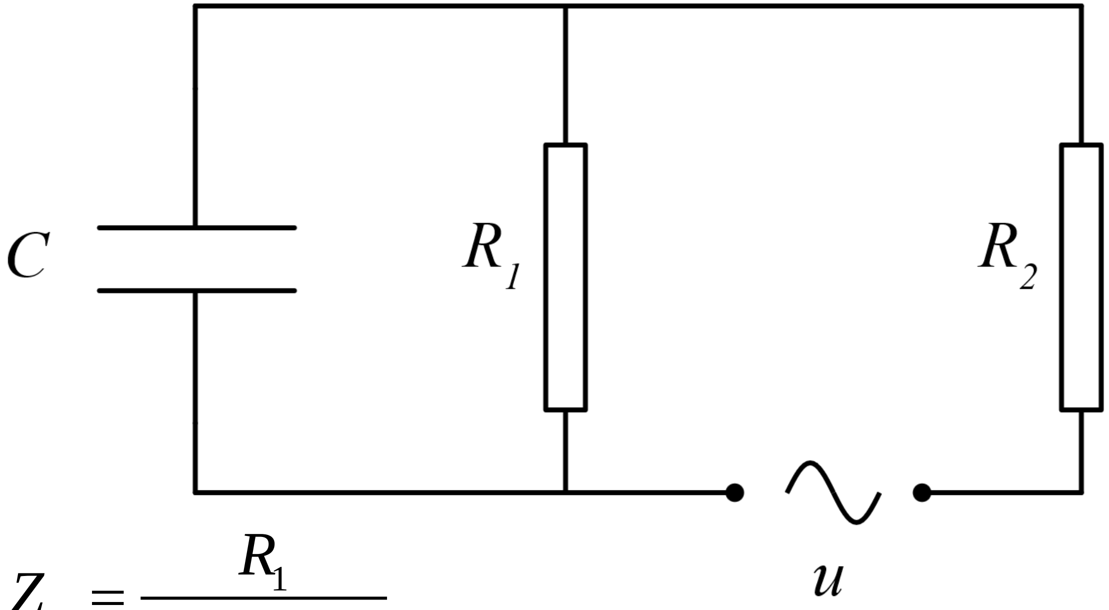
Intensitatea curentului principal va avea expresia:

$$I=\frac{U}{\left|Z_e\right|}=U\cdot\frac{2R}{R^2+\left(\omega L\right)^2}$$

Raportul cerut este:

$$\frac{I_{\text{ramuri}}}{I}=\frac{\frac{1}{\sqrt{R^2+\left(\omega L\right)^2}}}{\frac{2R}{R^2+\left(\omega L\right)^2}}=\frac{\sqrt{R^2+\left(\omega L\right)^2}}{2R}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{101}\approx 5$$

2. **În circuitul din figură se cunosc: R_1, R_2, C, U. Aflați intensitatea curentului principal. (A. Hristev, Probleme de electricitate, 2012)**



Soluție. Începem prin a calcula impedanța complexă a circuitului. Al doilea rezistor este înseriat cu gruparea paralel formată din condensator și rezistorul 1.

$$\frac{1}{Z_p}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{-j\cdot\frac{1}{\omega C}}=\frac{1}{R_1}+j\omega C=\frac{1+j\omega CR_1}{R_1}\Rightarrow Z_p=\frac{R_1}{1+j\omega CR_1}$$

$$Z_e=Z_p+R_2=\frac{R_1}{1+j\omega CR_1}+R_2=\frac{R_1+R_2+j\omega CR_1R_2}{1+j\omega CR_1}$$

Expresia intensității curentului principal este: $I=\frac{U}{|Z_e|}=U\cdot\left|\frac{1+j\omega CR_1}{R_1+R_2+j\omega CR_1R_2}\right|=U\cdot\frac{\sqrt{1+(\omega CR_1)^2}}{\sqrt{(R_1+R_2)^2+(\omega CR_1R_2)^2}}$

Concluzii

Utilizarea numerelor complexe este avantajoasă în special pentru studiul circuitelor mixte deoarece regulile de la curentul continuu pentru grupările rezistoarelor în serie și paralel se aplică întocmai pentru impedanțele complexe. Totodată evaluarea defazajului dintre tensiune și intensitate se realizează cu ușurință folosind forma complexă a impedanței. Din expresia puterii în formă complexă se obțin imediat puterile activă, reactivă și aparentă în circuitele de curent alternativ.

În concluzie, utilizarea numerelor complexe oferă o alternativă la metoda diagramelor fazoriale pentru rezolvarea problemelor de curent alternativ.